بسم الله الرحمن الرحيم

همه امتیازات این پایان نامه به دانشگاه لرستان تعلق دارد. در صورت استفاده از تمام یا بخشی از مطالب در مجلات، کنفرانس ها یا سخنرانی ها، باید نام دانشگاه لرستان (یا استاد یا اساتید راهنمای پایان نامه) و نام دانشجو با ذکر ماخذ و ضمن کسب مجوز کتبی از دفتر تحصیلات تکمیلی دانشگاه ثبت شود. در غیر اینصورت مورد پیگرد قانونی قرار خواهد گرفت.

دانشگاه لرستان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

مدلهای اولیه و دوگان تحلیل پوششی داده‌های فازی

نگارش:

کوروش آریاوش

استاد راهنما:

دکتر محمد خدابخشی

استاد مشاور:

دکتر بهمن غضنفری

پایان‌نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی کاربردی

آذر ۱۳۸۹

چکیده

نام خانوادگی: آریاوش **نام:** کوروش

عنوان پایان‌نامه: مدلهای اولیه و دوگان تحلیل پوششی داده‌های فازی

استاد راهنما: دکتر محمد خدابخشی
درجه تحصیلی: استادیار **رشته:** ریاضی کاربردی **گرایش:** تحقیق در عملیات

استاد مشاور: دکتر بهمن غضنفری
درجه تحصیلی: استادیار **رشته:** ریاضی کاربردی **گرایش:** آنالیز عددی

محل تحصیل: دانشگاه لرستان **دانشکده:** علوم پایه **گروه آموزشی:** ریاضی
درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی کاربردی
تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۸۹ **تعداد صفحه:** ۸۵

کلید واژه‌ها: تحلیل پوششی داده‌ها؛ تحلیل پوششی داده‌های فازی؛ دوگان مدلهای فازی تحلیل پوششی داده‌ها

چکیده:
چند سال پس از معرفی نظریه مجموعه‌های فازی پژوهشگران رشته‌های گوناگون علمی کوششهای فراوانی را آغاز نمودند، تا با استفاده از مفاهیم این نظریه نوبنیاد یافته‌های علمی حوزه کاری خود را بروز کنند. در همین راستا چند روش برای تعمیم مدلهای اساسی تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) ارائه شده است، که در آنها بجای داده‌های قطعی از داده‌های فازی استفاده می‌شود. این روشها که به تحلیل پوششی داده‌های فازی (FDEA) معروفند عبارتند از: روش تولرنس، روش قطعی سازی، روش α−سطح محور، روش رتبه‌بندی فازی و روش امکان. در این روشها، به علت پیچیدگی‌های بکارگیری داده‌های فازی، فقط به ارائه مدلهای اولیه بسنده شده و به مدلهای دوگان پرداخته نشده است. در این پایان‌نامه با توجه به اهمیت مدلهای دوگان در برنامه‌ریزی خطی، افزون بر بررسی روشهای یاد شده به موضوع دوگان آنها نیز پرداخته شده است.

فهرست مندرجات

پیشگفتار ۱

۱ مفاهیم بنیادی تحلیل پوششی داده‌ها ۴

۱.۱ مقدمه ۴

۲.۱ مفهوم کارایی ۵

۳.۱ پیشینه ارزیابی کارایی ٦

۱.۳.۱ میانگین تولید کارگر ٦

۲.۳.۱ شاخص‌های کارایی ٦

۳.۳.۱ تابع تولید پارامتری ٦

۴.۳.۱ تابع تولید ناپارامتری ۷

۵.۳.۱ تحلیل پوششی داده‌ها ۸

۴.۱ ارزیابی کارایی در تحلیل پوششی داده‌ها ۹

۵.۱ مدلهای اساسی تحلیل پوششی داده‌ها ۱۴

۱.۵.۱ مدل CCR با ماهیت ورودی ۱۵

۲.۵.۱ مدل CCR با ماهیت خروجی ۲۰

۳.۵.۱ مدل BCC با ماهیت ورودی ۲۱

۴.۵.۱ مدل BCC با ماهیت خروجی ۲۲

۵.۵.۱ مدل جمعی ۲۴

۲ مفاهیم بنیادی نظریه مجموعه‌های فازی ۲۷

۱.۲ مقدمه ۲۷

۲.۲ نظریه مجموعه‌های قطعی ۳۰

۳.۲ نظریه مجموعه‌های فازی ۳۳

۴.۲ اصل گسترش و اعداد فازی ۳۷

۵.۲ نظریه امکان ۴۳

۳ مدلهای فازی تحلیل پوششی داده‌ها ۵۰

۱.۳ مقدمه ۵۰

۲.۳ روش تولرنس ۵۱

۳.۳ روش قطعی سازی ۵۴

۴.۳ روش $\alpha-$ سطح محور ۵۵

۵.۳ روش رتبه‌بندی فازی ۶۱

۶.۳ روش امکان ۷۰

نتیجه‌گیری ۷۷

واژه نامه ۷۹

کتاب نامه ۸۴

لیست جداول

۱.۱ (مثال ۳.۵.۱) ۱۸

۲.۱ (نتایج مثال ۳.۵.۱) ۱۸

۱.۲ (مثال ٦.۲.۲) ۳۲

۲.۲ روابط متناظر اندازه‌های امکان و الزام ۴٦

۳.۲ (مثال ٦.۵.۲) ۴۷

۴.۲ (مثال ۱۰.۵.۲) ۴۹

۱.۳ داده‌های مثال روش $\alpha-$ سطح محور ۵۹

۲.۳ نتایج مدل بهترین—بدترین روش $\alpha-$ سطح محور ۵۹

۳.۳ نتایج مدل بدترین—بهترین روش $\alpha-$ سطح محور ۵۹

۴.۳ داده‌های مثال روش رتبه‌بندی فازی ۶۸

۵.۳ نتایج مدل اولیه مثال روش رتبه‌بندی فازی ۶۸

۶.۳ نتایج مدل دوگان مثال روش رتبه‌بندی فازی ۶۹

۷.۳ نتایج مدل اولیه مثال روش امکان ۷۳

۸.۳ نتایج مدل دوگان مثال روش امکان ۷۶

لیست اشکال

۱.۱ تابع تولید ناپارامتری فارل ۸

۲.۱ وضعیت DMU_j ۱۰

۳.۱ مجموعه‌های امکان تولید CCR و BCC ۱۴

۴.۱ تصویر واحد ناکارا بر روی مرز کارایی ۱۵

۵.۱ (مثال ۳.۵.۱) ۱۹

۶.۱ فرم پوششی مدل BCC با ماهیت ورودی ۲۲

۱.۲ نمایش مجموعه بلند قد بودن در منطق فازی ۲۹

۲.۲ نمایش مجموعه های بلند قد بودن در منطق ارسطویی ۳۰

۳.۲ تابع معمولی ۳۷

۴.۲ تابع فازی ۳۸

۵.۲ نمایش عدد معمولی ۳۹

۶.۲ عدد فازی مثلثی ۴۲

۷.۲ بازه فازی ذوزنقه‌ای ۴۲

۱.۳ نمودار تابع عضویت تابع هدف ۵۲

۲.۳ نابرابری متغیرهای فازی ۶۳

۳.۳ بیشینه سازی متغیر فازی Z ۶۳

۴.۳ $Z \approx$ آ ۶۴

پیشگفتار

تحلیل پوششی داده‌ها[۱] (DEA) روشی ناپارامتری برای ارزیابی کارایی تکنیکی نسبی[۲] و همچنین همسنجی واحدهای تصمیم‌گیری[۳](DMU) همگنی می‌باشد، که ورودیهای یکسانی را برای تولید یا ارائه خروجیهای یکسانی، به کار می‌برند. نخستین مدل این روش که بر پایه برنامه ریزی خطی می‌باشد CCR نام دارد که در سال ۱۹۷۸ توسط چارنز و همکارانش[۴] [۴] معرفی گردید. سپس بنکر و همکارانش[۵] [۲] در سال ۱۹۸۴ مدلی با بازده به مقیاس متغیر (BCC) برای DEA ارائه کردند. تاکنون مدلهای دیگری از DEA مانند مدل جمعی، مدل ابرکارایی و مدل AR ارائه شده است که همگی بر پایه مدل اولیه DEA یعنی CCR می‌باشند.

مدلهای آغازین DEA را تنها هنگامی می‌توان به کار برد که داده‌های ورودی و خروجی اعداد قطعی باشند، در صورتیکه در جهان واقعی بیشتر داده‌ها غیرقطعی و نادقیق هستند. داده‌های غیرقطعی به یکی از صورتهای تصادفی، ترتیبی، بازه‌ای و فازی نمایش داده می‌شوند. اعداد فازی و به طور کلی نظریه مجموعه‌های فازی[۶]، چند سال پس از اینکه توسط پرفسور زاده[۷][۱۶] (۱۹۶۵) مطرح شدند، به طور گسترده مورد استقبال و استفاده نهادهای علمی، صنعتی و مدیریتی قرار گرفتند. در همین راستا تلاشهایی صورت گرفت، تا مدلهای اساسی DEA به گونه‌ای گسترش داده شوند که توانایی ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیری با ورودیها و خروجیهای فازی را داشته باشند.

---

[۱] Data Envelopment Analysis
[۲] Relative Technical Efficiency
[۳] Decision Making Unit
[۴] Charnes, Cooper and Rhodes
[۵] Banker, Charnes and Cooper
[۶] Fuzzy sets theory
[۷] Zadeh

بکارگیری نظریه مجموعه‌های فازی در تحلیل پوششی داده‌ها افزون بر محاسن عمومی، موجب کاهش حساسیت نتایج به دست آمده نسبت به داده‌های ورودی و خروجی می‌شود. DEA یک تحلیل مرزی می‌باشد از این رو در مدلهای قطعی آن با تغییر کوچکی در مقدارهای ورودی و خروجی، وضعیت کارایی واحدهای تصمیم‌گیری تغییر می‌یابد. بنابراین از سال ۱۹۹۲ تا کنون چند روش برای حل مدلهای تحلیل پوششی داده‌های فازی[۸] (FDEA) ارائه شده است. این روشها را می‌توان به پنج دسته کلی تقسیم کرد که عبارتند از: روش تولرنس[۹]، روش قطعی سازی[۱۰]، روش α–سطح محور[۱۱]، روش رتبه‌بندی فازی[۱۲] و روش امکان[۱۳].

نخستین روش FDEA در سال ۱۹۹۲ توسط سنگوپتا [۱۴] [۱۴] ارائه شد که در آن نخست با استفاده از مفهوم تولرنس، فازی بودن قیدها لحاظ می‌شود. سپس مدل را با در نظر گرفتن مقدارهای تولرنس از پیش تعیین شده حل می‌کنند. از دیگر منابع این روش می‌توان به کارمن و تولگا[۱۵] [۸] اشاره کرد. روش قطعی‌سازی توسط لرتورساریکول[۱۶] [۱۰] ارائه شد. در این روش نخست ورودی و خروجی‌های فازی را به داده‌های قطعی تبدیل می‌کنند، سپس مدل قطعی شده را حل می‌کنند. در روش α–سطح محور، مدل FDEA با استفاده از برنامه‌ریزی پارامتریک به ازای α–برشهای داده شده حل می‌شود. با حل کردن مدل به ازای هر α یک بازه کارایی برای DMU تحت ارزیابی پدید می آید. در پایان می‌توان با بکارگیری بازه‌های به دست آمده، کارایی را بر حسب یک عدد فازی تعیین کرد. از منابع این روش می‌توان، مئیدا[۱۷] و همکاران [۱۲]، کاو[۱۸] و همکاران [۹] و لرتورساریکول [۱۰] را نام برد. در روش رتبه بندی فازی که توسط گو[۱۹] و تاناکا[۲۰] [۶] ارائه شده است معادلات و نامعادلات فازی در مدل CCR به گونه‌ای تعریف می‌شوند که مدل فازی به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی

[۸] Fuzzy Data Envelopment Analysis
[۹] Tolerance Approach
[۱۰] Defuzzification Approach
[۱۱] α-Level Based Approach
[۱۲] Fuzzy Ranking Approach
[۱۳] Possibility Approach
[۱۴] Sengupta
[۱۵] Kahraman and Tolga
[۱۶] Lertworasirikul
[۱۷] Maeda
[۱۸] kao
[۱۹] Guo
[۲۰] Tanaka

دومرحله‌ای تبدیل شود. در روش امکان، قیدهای مدل فازی به صورت پیشامدهای فازی در نظر گرفته شده و به ازای سطوح امکان مختلف به صورت قطعی درآورده می‌شوند. با حل مدل قطعی شده، کارایی در سطوح امکان از پیش تعیین شده، به دست آورده می‌شود. این روش نیز توسط لرتورساریکول و همکاران [۱۱] ارائه شده است.

به خاطر روشن نبودن روابط میان مدلهای اولیه[۲۱] و دوگان[۲۲] تحلیل پوششی داده‌های فازی، روشهای یاد شده تنها به مدلهای اولیه FDEA پرداخته‌اند و از مدل دوگان آنها سخنی به میان نیاورده‌اند. در این پایان‌نامه با توجه به اهمیت مدلهای دوگان، افزون بر بررسی مدلهای اولیه روشهای یادشده به دوگان آنها نیز پرداخته شده است. البته به علت پیچیدگی استفاده از داده‌های فازی یافتن دوگان همه مدلهای FDEA ممکن نیست، اما برای چند تا از آنها این کار انجام شده است.

سازماندهی این پایان نامه بصورت زیر است:

بخش نخست تعریفها، مفاهیم اولیه، و مدلهای پایه‌ای تحلیل پوششی داده‌ها را در بر دارد.

بخش دوم به بررسی نظریه مجموعه‌های فازی و برخی از مفاهیم و روابط اولیه آن می‌پردازد.

بررسی راه‌حلهای مدلهای فازی تحلیل پوششی داده‌ها و یافتن دوگان آنها در بخش پایانی انجام شده است.

[۲۱] Primal
[۲۲] Dual

فصل ۱

مفاهیم بنیادی تحلیل پوششی داده‌ها

۱.۱ مقدمه

یکی از مهمترین وظایف مدیران در سطح کلان بررسی عملکرد واحدهای تحت نظارت می‌باشد. این کار در تعیین میزان کارایی، مقایسه و شناسایی نقاط ضعف و قوت واحدها به مدیران کمک کرده و رقابت میان واحدها را افزایش می‌دهد. مدیران با ارزیابی کارایی واحدهای زیر نظرشان در اتخاذ سیاستهای تشویقی و تنبیهی و برنامه‌ریزی برای آینده بهتر عمل می‌کنند. یکی از روشهای ارزیابی کارایی تحلیل پوششی داده‌هاست که کارایی واحدهای تصمیم‌گیری همگنی را ارزیابی می‌کند که ورودیهای یکسانی را برای تولید یا ارائه خروجیهای یکسانی بکار می‌برند. این روش، چون از برنامه‌ریزی ریاضی استفاده می‌کند، می‌تواند با مورد توجه قرار دادن همه متغیرها، قیدها و عواملی که در تعیین کارایی نقش دارند مسائل پیچیده مدیریتی را به سادگی حل می‌کند. از سوی دیگر تئوری قوی برنامه‌ریزی ریاضی امکان تحلیل و تفسیر نتایج به دست آمده این روش را فراهم می‌کند. موارد یاد شده سبب شده‌اند که هر روز شاهد کاربرد تازه‌تری از تحلیل پوششی داده‌ها در حوزه‌های علمی، مدیریتی و صنعتی باشیم.

۲.۱ مفهوم کارایی

کارایی در مفهوم عام آن به معنای درجه و کیفیت رسیدن به مجموعه اهداف مطلوب[۱] است. مفهوم کارایی به دو بخش کلی **کارایی فنی**[۲] و **کارایی تخصیص**[۳] تقسیم می‌شود. کارایی فنی مربوط به ساختار تکنولوژیکی یک واحد تولیدی یا خدماتی است. به عبارت دیگر، در کارایی فنی بحث بر سر رابطه بین نهاده‌ها و ستاده‌ها (ورودیها و خروجیها) و چگونگی تبدیل نهاده‌ها به ستاده‌هاست. کارایی تخصیص مربوط به اهداف رفتاری واحدها مانند بیشینه کردن سود و کمینه کردن هزینه‌هاست. بنابراین برای تعیین کارایی تخصیص به اطلاعات قیمتی در مورد نهاده‌ها و ستاده‌ها نیاز است. **کارایی کل**[۴] یا کارایی اقتصادی به روش زیر به دست می آید:

$$\text{کارایی تخصیص} \times \text{کارایی فنی} = \text{کارایی کل}$$

سیستم قیمتها در مورد کالاها و خدماتی که از بازار نمی‌گذرند یا ناقص عمل می‌کند و یا اصلا وجود ندارد. به همین دلیل کارایی تخصیص آنها را نمی‌توان اندازه‌گیری کرد و فقط به کارایی فنی بسنده می‌شود. برای اندازه‌گیری کارایی فنی از دو تعریف زیر استفاده می‌شود. بنا بر تعریف یک بردار نهاده – ستاده ممکن کاراست اگر به طور تکنولوژیکی امکان افزایش تولید یک ستاده بدون کاهش همزمان تولید ستاده‌های دیگر وجود نداشته باشد[۵]. در این تعریف تغییر تولید ستاده محور بحث است، بنابراین به آن کارایی فنی ستاده یا جهت‌گیری ستاده[۶] می‌گویند. بنا بر تعریفی دیگر که معادل تعریف بالاست، یک بردار نهاده—ستاده ممکن کاراست اگر به طور تکنولوژیکی امکان کاهش یک نهاده بدون افزایش همزمان نهاده‌های دیگر وجود نداشته باشد. این تعریف را جهت‌گیری نهاده[۷] می‌گویند.

[۱] Fare (1985)
[۲] Technical Efficiency
[۳] Allocative Efficiency
[۴] Overal Efficiency
[۵] Koopmans (1957)
[۶] Output Orinted
[۷] Input Orinted

۱.۳ پیشینه ارزیابی کارایی

از دیر باز روشهایی برای ارزیابی کارایی واحدهای تولیدی و خدماتی ارائه شده است که در این زیربخش به آنها پرداخته می‌شود.

۱.۳.۱ میانگین تولید کارگر

مدتها، کارایی را با اندازه‌گیری میانگین تولید کارگر[۸]، تعیین می‌کردند که روشی ساده اما ناقص است. این روش از همه ورودی‌ها بجز تعداد کارگران چشم‌پوشی می‌کند، در نتیجه برای ارزیابی کارایی واحدهای با ورودیهای چندگانه مناسب نیست. اندازه کارایی در روش میانگین تولید کارگر از نسبت مقدار تولید به تعداد کارگران به دست می آید.

۲.۳.۱ شاخص‌های کارایی

شاخص‌های کارایی[۹] عبارت است از مقایسه میانگین ورودیهای وزندار با خروجی. در این روش وزن ورودی‌ها متناسب با هزینه (قیمت) آنها تعیین می‌شود. بنابراین ارزیابی کارایی در این روش یک مقایسه هزینه‌ای محسوب می‌شود. با این روش تنها کارایی واحدهایی را می‌توان ارزیابی کرد که یک خروجی دارند و همچنین ارزش ورودیها و خروجیشان بر حسب پول مشخص می‌باشد.

۳.۳.۱ تابع تولید پارامتری

در این روش برای ارزیابی کارایی هر واحد، عملکرد آن واحد را با یک تابع تولید[۱۰] از پیش تعیین شده مقایسه می‌کنند. تابع تولید تابعی است که بیشترین خروجی ممکن را از ترکیب ورودی‌ها فراهم می‌کند. در واقع تابع تولید معرف رابطه مقداری موجود بین میزان تولید و عوامل تولید است. بنابراین

[۸] Average Productivity of Labor
[۹] Indices of Efficiency
[۱۰] Production Function

اگر مقدار تولید را با Y و مقدارهای عوامل تولید را با $X_1, \ldots, X_n$ نشان دهیم، تابع تولید به صورت $Y = f(X_1, \ldots, X_n)$ می‌باشد.

در این روش ابتدا پیش فرض اولیه‌ای از تابع تولید در نظر گرفته می‌شود که معرف رابطه مقداری موجود بین میزان تولید و عوامل تولید است، سپس با استفاده از اطلاعات موجود پارامترهای تابع تخمین زده می‌شوند. از میان تابعهای تولید پارامتری می‌توان تابع تولید کاب—داگلاس[۱۱] و تابع تولید متعالی[۱۲] را نام برد، که به ترتیب به صورت زیر می‌باشند:

$$Y = Ax_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}$$

$$Y = Ax_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n} e^{\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n}$$

اما تعیین کارایی با استفاده تابع تولید پارامتری با مشکلاتی همراه است که عبارتند از:

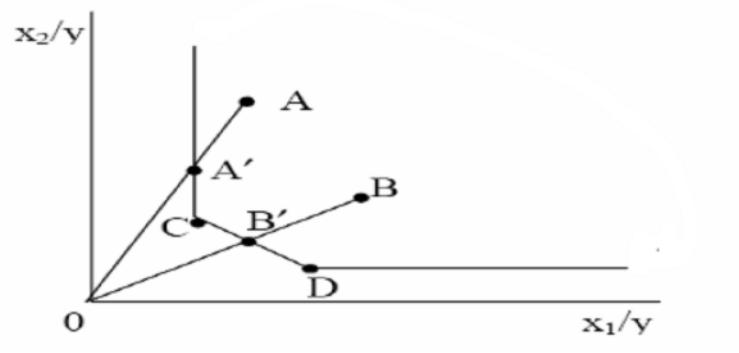
- پیش‌فرض اولیه تابع تولید، ممکن است با ماهیت واحدهای تحت ارزیابی در تضاد باشد.
- در این روش تنها ارزیابی واحدهایی با یک خروجی، ممکن است.
- ماهیت غیر خطی تابع تولید در این روش محاسبات را پیچیده می‌کند.

۴.۳.۱ تابع تولید ناپارامتری

فارل[۱۳] در سال ۱۹۵۷، برای حذف کاستی‌های روش ارزیابی کارایی تابع تولید پارامتری، روش تازه‌ای را معرفی کرد، که از مفهوم تابع تولید کارا[۱۴] استفاده می‌کند. او تابع تولید را چنان بر مجموعه مقدارهای تولید و عوامل تولید برازش داد که یک تابع قطعه قطعه خطی پدید آمد. در این روش با مقایسه واحدها با یک واحد کارای کاملاً فرضی، که به وسیله تابع تولید نمایش داده می‌شود، کارایی را تعیین می‌کنند.

[۱۱] Cobb-Douglas
[۱۲] Transcendental
[۱۳] Farrell
[۱۴] Efficient Production Function

در روش فارل اگر نقطه‌های نمودار زیر نشان‌دهنده عملکرد بنگاه‌های گوناگون در زمینه بکارگیری عوامل تولید x_1 و x_2 برای تولید محصول y باشند، با اتصال نقطه‌هایی که به محورها و مبدأ مختصات نزدیکترند، تابع محدبی به دست می آید که تابع تولید یکسان کارا نامیده می‌شود. نقاط روی این منحنی کارا و سایرین ناکارا می‌باشند.



شکل ۱.۱: تابع تولید ناپارامتری فارل

کاستی تابع تولید ناپارامتری فارل این است که، نمی‌توان آن را برای اندازه‌گیری کارایی واحدهایی با بیش از یک ستاده به کار برد.

۵.۳.۱ تحلیل پوششی داده‌ها

سرانجام در سال ۱۹۷۸ چارنز، کوپر و رودز[۱۵] مقاله فارل را پایه کار خود قرار دادند و نخستین مدل روش تحلیل پوششی داده‌ها (CCR) را برای اندازه‌گیری مقدار کارایی ارائه کردند [۴]. آنها تحلیل اولیه فارل را که در حالت چند ورودی و یک خروجی مطرح شده بود، به حالت چند ورودی و چند خروجی گسترش دادند. آنها نهادهایی که ارزیابی کاراییشان مد نظر است را واحدهای تصمیم‌گیری[۱۶] (DMU) نامیدند. روش آنها یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی است که کارایی هر DMU را با محاسبه نسبت مجموع وزن‌دار خروجی‌هایش به مجموع وزن‌دار ورودی‌هایش به دست می آورد. برنامه‌ریزی ریاضی وزنهای ورودیها و خروجی‌های هر DMU را به گونه‌ای تعیین می‌کند که کاراییش بیشنه شود. البته وزنها به گونه‌ای برگزیده می‌شوند که با استفاده از آنها، کارایی هیچ DMUی از یک بیشتر نشود. بنابراین DEA برای هر واحد مجموعه‌ای یکتا از وزن‌ها را تعیین می‌کند. مجموعه وزن‌ها ویژگیهای

[۱۵] Charnes, Cooper and Rhodes
[۱۶] Decision-Making Unit