دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

نگاشت‌های خطی حافظ تشابه بر روی فضاهای هیلبرت

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (آنالیز)

مریم هرتمنی

اساتید راهنمای پایان‌نامه

دکتر فرید بهرامی
دکتر سید محمود منجگانی

۱۳۸۹

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (آنالیز)خانم مریم هرتمنی

تحت عنوان

نگاشت‌های خطی حافظ تشابه بر روی فضاهای هیلبرت

در تاریخ ۸۹/۱۱/٦ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱ – استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر فرید بهرامی
۲– استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر سید محمود منجگانی
۳– استاد داور ۱	دکتر محمود لشگری زاده بمی (دانشگاه اصفهان)
۴– استاد داور ۲	دکتر محمدتقی جهاندیده

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده   دکتر اعظم اعتماد

ستایش بی انتها ایزد یکتا را که مرا در این مهم یاری نمود.
از خانواده‌ی عزیزم، پدر و مادر مهربانم به خاطر تمام همراهی‌ها و دلگرمی‌هایشان صمیمانه سپاسگذارم و از خداوند متعال توفیق خدمتگزاری بیش از پیش به آن‌ها را خواستارم.
مراتب سپاس و تشکر صمیمانه‌ی خود را از اساتید ارجمندم جناب آقای دکتر فرید بهرامی و جناب آقای دکتر سید محمود منجگانی که در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه با روی خوش پاسخگوی سوالات من بودند دارم.
از آقایان دکتر محمود لشگری زاده بمی و دکتر محمدتقی جهاندیده که زحمت بازخوانی و داوری این پایان‌نامه را برعهده داشتند متشکرم.

فهرست مطالب

چکیده:

فرض کنیم $M_n(\mathbb{C})$ فضای همه‌ی ماتریس‌های مختلط $n \times n$ باشد. نگاشت خطی $\Phi : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ را حافظ تشابه نامیم اگر برای هر دو ماتریس متشابه $A, B \in M_n(\mathbb{C})$، $\Phi(A)$ و $\Phi(B)$ نیز متشابه باشند.

در این پایان‌نامه ابتدا نگاشت‌های خطی حافظ تشابه بر روی فضای همه‌ی ماتریس‌های مختلط $n \times n$ را تعیین می‌کنیم. سپس نتایج حاصله را روی حالت نامتناهی‌البعد گسترش می‌دهیم و به بررسی نگاشت‌های خطی حافظ تشابه بر روی جبر همه‌ی عملگرهای خطی کراندار بر روی یک فضای هیلبرت نامتناهی‌البعد جدایی‌پذیر می‌پردازیم.

رده‌بندی موضوعی: ۴۷B۴۹

کلمات کلیدی: ماتریس مختلط، فضای هیلبرت، عملگر خطی، عملگر فشرده، عملگر پوچ توان، نگاشت خطی حافظ تشابه

فصل ۱

مقدمه

درباره‌ی نگاشت‌های خطی روی فضای ماتریس‌ها، ریاضیدانان کارهای زیادی انجام داده‌اند. فرض کنیم $\mathcal{A}$ فضای همه‌ی ماتریس‌ها و برای ماتریس $A \in \mathcal{A}$، $Q(A)$ یک ویژگی از ماتریس A باشد. در این صورت تعیین ساختار نگاشت‌های خطی $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ که ویژگی Q را حفظ می‌کنند $\big(Q(\Phi(A)) = Q(A)\big)$، همواره برای مؤلفین و نویسندگان قابل توجه بوده است.

برخی از جنبه‌های این موضوع را مارکوس در سال ۱۹۷۱ در مرجع [۱۷]، پیرس در سال ۱۹۹۲ در مرجع [۲۲]، لی و تی‌سینگ در سال ۱۹۹۲ در مرجع [۱۴] و لی و پیرس در سال ۲۰۰۱ در مرجع [۱۳] مورد بررسی قرار داده‌اند. به ویژه نگاشت‌های خطی حافظ یک رتبه‌ی ثابت را مارکوس در سال ۱۹۵۹ در مرجع [۱۸] و پس از آن بیسلی در سال ۱۹۷۰ در مرجع [۱] و لیم در سال ۱۹۷۹ در مرجع [۱۵] تعیین کرده‌اند.

به علاوه اگر $R(A, B)$ یک رابطه بین دو ماتریس $A, B \in \mathcal{A}$ باشد، در این صورت تعیین نگاشت‌های خطی $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ که R را حفظ می‌کنند، یعنی اگر $R(A, B)$، آن‌گاه داشته باشیم $R(\Phi(A), \Phi(B))$، نیز مورد توجه بوده و نویسندگان زیادی آن را مورد بحث قرار داده‌اند. به عنوان مثال در سال ۱۹۸۲ چان و لیم در مرجع [۳]، در سال ۱۹۸۴ رجوی در مرجع [۲۵] و در سال ۱۹۸۷ چوی و جعفریان و رجوی در مرجع [۴]، نگاشت‌های خطی حافظ تعویض پذیری را روی برخی فضاهای ماتریسی مورد بررسی قرار دادند. یعنی برای دو ماتریس $A, B \in \mathcal{A}$ اگر $AB = BA$، آن‌گاه داشته باشیم $\Phi(A)\Phi(B) = \Phi(B)\Phi(A)$.

در این پایان نامه فرض می‌کنیم $R(A, B)$ رابطه‌ی تشابه بین دو ماتریس A, B باشد. سپس

نگاشت‌های خطی حافظ تشابه روی فضای همه‌ی ماتریس‌های مختلط $n \times n$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم و پس از آن نتایج حاصله را به مجموعه‌ی عملگرهای خطی و کراندار روی فضاهای هیلبرت نامتناهی البعد جدایی پذیر گسترش می‌دهیم.

در سال ۱۹۸۷ هیای در مرجع [۲۴]، نگاشت‌های خطی حافظ تشابه روی ماتریس‌های مختلط $n \times n$ را مورد بررسی قرار داد و پس از آن در سال ۱۹۹۳، لیم در مرجع [۱۶] نتیجه‌ی هیای درباره‌ی نگاشت‌های خطی حافظ تشابه روی ماتریس‌های مختلط $n \times n$ روی هر میدان با مشخصه‌ی صفر را با روشی ساده‌تر بیان کرد. در دهه‌های اخیر بسیاری از مؤلفین به این فکر افتادند که نتایج حاصله را به حالت‌های نامتناهی البعد گسترش دهند. به عنوان مثال جی و دو در سال ۲۰۰۲ در مرجع [۱۲]، زیرفضاهای پایا نسبت به تشابه و نگاشت‌های خطی کراندار حافظ تشابه را روی فضای هیلبرت جدایی‌پذیر H مورد بررسی قرار دادند. پس از آن در سال ۲۰۰۳، جی در مرجع [۱۰] و سپس در مرجع [۱۱] نگاشت‌های خطی حافظ تشابه روی $B(H)$ را برای فضای هیلبرت جدایی پذیر H بیان کرد. سپس در سال ۲۰۰۴ پتک در مرجع [۲۱] نتیجه‌ی بهتری را برای نگاشت‌های خطی حافظ تشابه بر روی $B(H)$ که H یک فضای هیلبرت نامتناهی البعد است نشان داد. پس از آن در سال ۲۰۰۸ شمرل در مرجع [۲۸] با شرایطی ضعیف‌تر نتیجه‌ی پتک را برای نگاشت‌های خطی حافظ تشابه بر روی $B(H)$ که H یک فضای هیلبرت نامتناهی‌البعد جدایی‌پذیر است نشان داد.

در این پایان نامه پس از بیان مقدمه و تاریخچه‌ی موضوع، در فصل دوم به بیان تعاریف و قضایای مقدماتی مورد نیاز می‌پردازیم. سپس در فصل سوم بر مبنای مرجع [۲۴]، نگاشت‌های خطی حافظ تشابه بر روی فضای همه‌ی ماتریس‌های مختلط $n \times n$ را بیان می‌کنیم. در این فصل ابتدا صورت قضیه‌ی اصلی را بیان کرده سپس به تعیین هسته‌ی نگاشت‌های خطی حافظ تشابه بر روی ماتریس‌های مختلط $n \times n$ می‌پردازیم. پس از آن با بیان چند لم کاربردی به اثبات قضیه‌ی اصلی بیان شده در قسمت اول می‌پردازیم.

در فصل چهارم بر مبنای مرجع [۲۸]، به بررسی نگاشت‌های خطی حافظ تشابه بر روی جبر عملگرهای خطی کراندار بر روی یک فضای هیلبرت نامتناهی البعد جدایی پذیر می‌پردازیم. در این فصل ابتدا به معرفی یک نماد و بررسی برخی از خواص آن می‌پردازیم. سپس نگاشت‌های خطی حافظ پوچ توانی با رتبه‌ی یک را بررسی کرده و پس از آن به بیان نتیجه‌ی اصلی در مورد نگاشت‌های خطی حافظ تشابه بر روی $B(H)$ می‌پردازیم.

فصل ۲

پیش نیازها

۲—۱ مقدمه

در این فصل برخی از تعاریف و قضایای مورد نیاز در این پایان نامه را مطرح می‌کنیم. ابتدا مفهوم عملگرهای تصویر و زیرفضاهای پایا را بیان کرده سپس به نمایش ماتریسی یک عملگر، متناظر با تجزیه‌ی H می‌پردازیم. در ادامه e^A را برای ماتریس $A \in M_n(\mathbb{C})$ معرفی کرده و مشتق‌پذیری آن را که در اثبات لم ۱۵.۳ مورد نیاز است بررسی می‌کنیم. مطالب این فصل بر مبنای مراجع [۵] و [۲۰] و [۲۷] تنظیم شده‌اند.

۲—۲ عملگرهای تصویر و زیرفضاهای پایا

فرض کنیم H یک فضای هیلبرت و $B(H)$ فضای تمام عملگرهای خطی و کراندار روی H باشند.

تعریف ۱.۲ عملگر $P \in B(H)$ را یک عملگر تصویر نامیم هرگاه $P^2 = P = P^*$، که در آن P^* همان عملگر الحاقی P است.

در زیر به برخی از خواص عملگرهای تصویر اشاره می‌کنیم.

لم ۲.۲ اگر $P \in B(H)$ یک عملگر تصویر باشد، آن‌گاه $\ker(P) = \operatorname{rang}(I - P)$.

اثبات. چون $\ker(P) = (\mathrm{rang}(P^*))^\perp$، در نتیجه $\ker(P) = (\mathrm{rang}(P))^\perp$. از طرفی برای هر $\xi, \eta \in H$ داریم

$$< (I-P)\xi, P\eta > = < P(I-P)\xi, \eta > = ۰.$$

در نتیجه $\mathrm{rang}(I-P) = (\mathrm{rang}(P))^\perp$. پس $\ker(P) = (\mathrm{rang}(P))^\perp = \mathrm{rang}(I-P)$. ■

لم ۳.۲ فرض کنیم M یک زیرفضای H باشد. تجزیه‌ی H به فرم $H = M \oplus M^\perp$ را در نظر می‌گیریم. تبدیل خطی $P : H \longrightarrow H$ را برای هر $\xi \in M$ و $\eta \in M^\perp$ با ضابطه‌ی $P(\xi + \eta) = \xi$ تعریف می‌کنیم. در این صورت

الف) $P \in B(H)$.

ب) P یک عملگر تصویر است.

ج) $M = \mathrm{rang}(P)$ و $M^\perp = \ker(P) = \mathrm{rang}(I-P)$.

اثبات. فرض کنیم $\nu \in H$. پس بردارهای $\xi \in M$ و $\eta \in M^\perp$ وجود دارند به قسمی که $\nu = \xi + \eta$. با توجه به قانون متوازی الاضلاع داریم

$$\| P\nu \|^۲ = \| P(\xi+\eta) \|^۲ = \| \xi \|^۲ \leq \| \xi \|^۲ + \| \eta \|^۲ = \| \nu \|^۲ .$$

در نتیجه P عملگری کراندار می‌باشد. از طرفی P به وضوح خطی است. پس $P \in B(H)$.

با توجه به تعریف P روی H، داریم $P^۲ = P$. فرض کنیم $\xi, \eta \in H$. پس بردارهای یکتای $\xi_۱, \xi_۲ \in M$ و $\eta_۱, \eta_۲ \in M^\perp$ وجود دارند به قسمی که $\xi = \xi_۱ + \eta_۱$ و $\eta = \xi_۲ + \eta_۲$. بنابراین

$$\begin{aligned} < P\xi, \eta > &= < P(\xi_۱ + \eta_۱), \eta > = < \xi_۱, \xi_۲ + \eta_۲ > = < \xi_۱, \xi_۲ > \\ &= < \xi_۱ + \eta_۱, \xi_۲ > = < \xi, P\eta > = < P^*\xi, \eta > . \end{aligned}$$

در نتیجه $P = P^*$.

همچنین با توجه به تعریف P روی H، روشن است که $\mathrm{rang}(P) = M$ و به این ترتیب $\ker(P) = M^\perp$.

■

تعریف ۴.۲ زیرفضای L از فضای هیلبرت H را یک زیرفضای پایا نسبت به عملگر $T \in B(H)$ گوییم، هرگاه برای هر $\xi \in L$ داشته باشیم $T\xi \in L$.

زیرفضای L از H را یک زیرفضای پایای غیربدیهی نامیم، هرگاه L نسبت به T پایا بوده و $L \neq \{0\}, \mathrm{H}$.

تعریف ۵.۲ مجموعه‌ی همه‌ی زیرفضاهای L از H را که نسبت به عملگر T پایا هستند، شبکه‌ی زیرفضاهای پایا نسبت به T می‌نامیم و با $\mathrm{Lat}T$ نمایش می‌دهیم.

لم ۶.۲ فرض کنیم $T, P \in B(H)$ و P یک عملگر تصویر باشد. آن‌گاه

الف) $\mathrm{rang}(P) \in \mathrm{Lat}T$ اگر و تنها اگر $PTP = TP$.

ب) $\mathrm{rang}(P), \mathrm{rang}(I-P) \in \mathrm{Lat}T$ اگر و تنها اگر $PT = TP$.

اثبات. برای اثبات قسمت (الف)، ابتدا فرض کنیم $\mathrm{rang}(P) \in \mathrm{Lat}T$. برای $\xi \in H$، $P\xi \in \mathrm{rang}(P)$. در نتیجه $TP\xi \in \mathrm{rang}(P)$. چون $P^{2} = P$، پس P روی $\mathrm{rang}(P)$ مانند همانی اثر می‌کند. در نتیجه داریم $P(TP\xi) = TP\xi$. بنابراین $PTP = TP$.

برعکس، فرض کنیم $PTP = TP$. برای $\eta \in \mathrm{rang}(P)$، بردار $\xi \in H$ وجود دارد به قسمی که $P\xi = \eta$. در نتیجه $T\eta = TP\xi = PTP\xi$. چون $PTP\xi \in \mathrm{rang}(P)$، پس $T\eta \in \mathrm{rang}(P)$. لذا $\mathrm{rang}(P)$ نسبت به T پایاست.

برای اثبات قسمت (ب)، فرض کنیم $\mathrm{rang}(P) \in \mathrm{Lat}T$ و $\mathrm{rang}(I-P) \in \mathrm{Lat}T$. طبق قسمت (الف) داریم $PTP = TP$ و $(I-P)T(I-P) = T(I-P)$. بنابراین

$$T - TP = (I-P)T(I-P) = T - PT - TP + PTP = T - PT.$$

در نتیجه $TP = PT$.

برعکس، اگر $PT = TP$، آن‌گاه $PTP = TP^{2} = TP$. طبق قسمت (الف)، $\mathrm{rang}(P) \in \mathrm{Lat}T$. به علاوه

$$(I-P)T(I-P) = T - TP - PT + PTP = T - TP = T(I-P).$$

در نتیجه بنابر قسمت (الف)، $\mathrm{rang}(I-P) \in \mathrm{Lat}T$. ■

۲—۳ نمایش ماتریسی یک عملگر

عملگر تصویر P که دارای برد پایا نسبت به T باشد، می‌تواند یک نمایش ماتریسی ویژه‌ای برای عملگر T بسازد. در این بخش به بررسی نمایش ماتریسی عملگر T متناظر با تجزیه‌ی H می‌پردازیم.

فرض کنیم $L, M \subset H$ دو زیرفضای بسته و ناصفر از H به قسمی باشند که $H = L \oplus M$. یعنی

$M = L^{\perp}$. همچنین فرض کنیم $P_1 : H \longrightarrow L$ و $P_2 : H \longrightarrow M$ عملگرهای تصویر به قسمی باشند که برای هر $h = \xi + \eta \in H$ داشته باشیم $P_1(h) = \xi$ و $P_2(h) = \eta$. برای عملگر $T \in B(H)$، چهار عملگر به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$T_{11} : L \hookrightarrow H \xrightarrow{T} H \xrightarrow{P_1} L \qquad T_{12} : M \hookrightarrow H \xrightarrow{T} H \xrightarrow{P_1} L$$

$$T_{21} : L \hookrightarrow H \xrightarrow{T} H \xrightarrow{P_2} M \qquad T_{22} : M \hookrightarrow H \xrightarrow{T} H \xrightarrow{P_2} M$$

پس

$$T_{11} = P_1 \circ T : L \longrightarrow L \qquad T_{12} = P_1 \circ T : M \longrightarrow L$$

$$T_{21} = P_2 \circ T : L \longrightarrow M \qquad T_{22} = P_2 \circ T : M \longrightarrow M.$$

در این صورت می‌توان عملگر T روی H را به کمک چهار عملگر بالا به صورت زیر تجزیه کرد. برای هر $\xi + \eta \in L \oplus M = H$ داریم

$$T(\xi + \eta) = (T_{11}\xi + T_{12}\eta) + (T_{21}\xi + T_{22}\eta). \tag{1}$$

با نوشتن $\xi + \eta \in L \oplus M$ به صورت برداری زیر

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix},$$

عمل عملگر T روی بردار $\nu = \xi + \eta$، دارای نمایش ماتریسی به فرم

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11}\xi + T_{12}\eta \\ T_{21}\xi + T_{22}\eta \end{pmatrix}$$

خواهد بود.

فرض کنیم P یک عملگر تصویر با برد L و هسته‌ی M باشد. در نتیجه برای $i, j = 1, 2$، می‌توان عملگرهای T_{ij} را به کمک T و P و با توجه به رابطه‌ی (۱) به صورت

$$\begin{aligned} PTP &= T_{11} : rang(P) \longrightarrow rang(P), \\ PT(I-P) &= T_{12} : rang(I-P) \longrightarrow rang(P), \\ (I-P)TP &= T_{21} : rang(P) \longrightarrow rang(I-P), \\ (I-P)T(I-P) &= T_{22} : rang(I-P) \longrightarrow rang(I-P) \end{aligned}$$

در نظر گرفت.

نتیجه **۷.۲** برای عملگر $T \in B(H)$ و عملگر تصویر $P : H \longrightarrow H$،

الف) $\mathrm{rang}(P) \in \mathrm{Lat}T$ اگر و تنها اگر $T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}$.

ب) $\mathrm{rang}(P), \mathrm{rang}(I-P) \in \mathrm{Lat}T$ اگر و تنها اگر $T = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}$.

اثبات. با توجه به تجزیه‌ی $H = \mathrm{rang}(P) \oplus \mathrm{rang}(I-P)$ و نمایش ماتریسی T متناظر با این تجزیه، طبق لم ٦.۲ (الف) و (ب) نتیجه خواهد شد. ■

۲—۴ معرفی تابع نمایی ماتریسی و مشتق‌پذیری آن

از مطالب این بخش در اثبات لم ۱۵.۳ استفاده می‌شود. فرض کنیم $M_n(\mathbb{C})$ فضای همه‌ی ماتریس‌های مختلط $n \times n$ باشد. ابتدا برای هر ماتریس $A \in M_n(\mathbb{C})$، e^A را تعریف کرده سپس مشتق‌پذیری تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ با ضابطه‌ی $f(t) = e^{tA}$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

با در نظر گرفتن ماتریس $A \in M_n(\mathbb{C})$ به عنوان یک عملگر خطی $A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$، نرم ماتریس A را نرم آن به عنوان یک عملگر در نظر می‌گیریم. به عبارت دیگر

$$\| A \| := \sup_{z \in \mathbb{C}^n, \|z\| \leq 1} \|Az\|.$$

در این صورت با توجه به این که برای دو ماتریس $A, B \in M_n(\mathbb{C})$، ماتریس AB ماتریس نظیر عملگر $A \circ B$ است، داریم

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

برای ماتریس $A \in M_n(\mathbb{C})$، دنباله‌ی $(S_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ را به صورت

$$S_n(A) := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k$$

تعریف می‌کنیم. بنابر قرارداد $A^0 = I$. چون برای هر k، $A^k \in M_n(\mathbb{C})$، در نتیجه $S_n(A) \in M_n(\mathbb{C})$. همچنین برای هر $n < m$ داریم

$$\begin{aligned} \| S_m(A) - S_n(A) \| &= \| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} A^k \| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} \| A^k \| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} \| A \|^k . \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن $\|A\| = a \geq 0$، با توجه به همگرایی سری عددی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}a^n$، بنابر آزمون کوشی برای سری‌های عددی، برای هر $\epsilon > 0$ عدد طبیعی N وجود دارد به قسمی که برای هر $m > n \geq N$ داریم

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!}a^k < \epsilon.$$

در نتیجه $\| S_m(A) - S_n(A) \| < \epsilon$. پس دنباله‌ی $(S_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ در $M_n(\mathbb{C})$ یک دنباله‌ی کوشی بوده و در نتیجه همگراست. قرار می‌دهیم

$$e^A := \lim_{n\to\infty} S_n(A).$$

به این ترتیب، $e^A \in M_n(\mathbb{C})$.

تعریف ۸.۲ فرض کنیم I مجموعه‌ای باز در $\mathbb{R}$ و $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ یک تابع باشد. تابع f را در $x_0 \in I$ مشتق‌پذیر نامیم هرگاه برای هر $h \in \mathbb{R}$ که $x_0 + h \in I$ حد زیر

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(f(x_0 + h) - f(x_0)\Big),$$

موجود باشد. در این صورت مقدار حد مورد نظر را با $f'(x_0)$ نمایش داده و به آن مشتق تابع f در نقطه‌ی x_0 می‌گوییم.
چنانچه f در هر $x \in I$ مشتق‌پذیر باشد، گوییم f بر I مشتق‌پذیر است.

تبصره ۹.۲ فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ و Ω زیرمجموعه‌ی باز X باشد. در حالت کلی، تابع $f : \Omega \longrightarrow Y$ را در نقطه‌ی $x_0 \in \Omega$ مشتق‌پذیر نامیم هرگاه تابع خطی و پیوسته‌ی $A : X \longrightarrow Y$ وجود داشته باشد به قسمی که برای هر $h \in X$ با شرط $x_0 + h \in \Omega$ داشته باشیم

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + r(h)$$

که $r(h) \in Y$ عبارتی وابسته به h است، با این خاصیت که

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

تابع خطی A با خاصیت فوق متناظر با x_0 منحصر به فرد بوده، آن را با نماد $f'(x_0)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱۰.۲ فرض کنیم I و E به ترتیب مجموعه‌های بازی در $\mathbb{R}$ و $M_n(\mathbb{C})$ باشند و توابع $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ و $g : E \subseteq M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ داده شده باشند. همچنین فرض کنیم برای $x_\circ \in I$، $f(x_\circ) \in E$. اگر f در $x_\circ$ و g در $f(x_\circ)$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه تابع $g \circ f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ با ضابطه‌ی $g \circ f(x) = g(f(x))$ نیز در $x_\circ$ مشتق‌پذیر است و داریم

$$(g \circ f)'(x_\circ) = g'(f(x_\circ))f'(x_\circ).$$

اثبات. مشابه حالت مقدماتی مشتق‌پذیری ترکیب دو تابع حقیقی (مرجع [۲۷])، اثبات انجام می‌شود. ■

قضیه ۱۱.۲ فرض کنیم I یک مجموعه‌ی باز در $\mathbb{R}$ بوده، توابع $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ داده شده باشند. اگر توابع f و g در نقطه‌ی $x_\circ \in I$ مشتق‌پذیر باشند آن‌گاه تابع $fg : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ با ضابطه‌ی $fg(x) = f(x)g(x)$ نیز در $x_\circ$ مشتق‌پذیر بوده و داریم

$$(fg)'(x_\circ) = f'(x_\circ)g(x_\circ) + f(x_\circ)g'(x_\circ).$$

اثبات. مانند حالت مقدماتی مشتق‌پذیری ضرب دو تابع حقیقی (مرجع [۲۷])، اثبات انجام می‌شود. ■

قضیه ۱۲.۲ فرض کنیم $M_n(\mathbb{C})$ فضای همه‌ی ماتریس‌های مختلط $n \times n$ باشد و $A \in M_n(\mathbb{C})$. در این صورت

الف) تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ با ضابطه‌ی $f(t) = e^{tA}$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(t) = Ae^{tA}.$$

ب) برای هر $t \in \mathbb{R}$، تابع $f(t) = e^{tA}$ معکوس‌پذیر است و معکوس آن عبارت است از $g(t) = e^{-tA}$.

اثبات. الف) با توجه به تعریف $f(t) := \sum_{k=\circ}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k$، طبق مرجع [۲۰] با مشتق‌گیری جمله به جمله از سری فوق داریم $f'(t) = Ae^{tA}$.

ب) نگاشت $h : \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ با ضابطه‌ی $h(t) = e^{tA}e^{-tA}$ را در نظر می‌گیریم. پس نگاشت $h : \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ مشتق‌پذیر است و طبق قضیه‌ی ۱۱.۲، برای هر $t \in \mathbb{R}$ داریم

$$h'(t) = Ae^{tA}e^{-tA} - e^{tA}Ae^{-tA}.$$

با توجه به تعریف $e^{tA}=\sum_{k=\circ}^{\infty}\frac{1}{k!}t^kA^k$، برای هر $t\in\mathbb{R}$ داریم

$$Ae^{tA}=\sum_{k=\circ}^{\infty}\frac{1}{k!}At^kA^k=\sum_{k=\circ}^{\infty}\frac{1}{k!}t^kA^kA=e^{tA}A.$$

در نتیجه $h'(t)=0$. پس برای هر $t\in\mathbb{R}$، $h(t)=I$. لذا $e^{tA}e^{-tA}=I$ و به همین ترتیب $e^{-tA}e^{tA}=I$.
پس $f(t)=e^{tA}$ تابعی معکوس‌پذیر است و معکوس آن عبارت است از e^{-tA}. ■

فصل ۳

نگاشت‌های خطی حافظ تشابه بر روی فضای ماتریس‌ها

۳—۱ مقدمه

در این فصل، بعد از بیان رابطه‌ی تشابه بین مجموعه‌ی ماتریس‌های مربعی از یک مرتبه، به بررسی نگاشت‌هایی بر روی این مجموعه می‌پردازیم که رابطه‌ی تشابه را حفظ نماید. مطالب این فصل بر مبنای مرجع [۲۴] تنظیم شده است.

۳—۲ نگاشت‌های خطی حافظ تشابه روی ماتریس‌های مختلط

فرض کنیم $M_n(\mathbb{C})$ فضای همه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ مختلط باشد. برای ماتریس A در $M_n(\mathbb{C})$ ، $\mathrm{tr}(A)$ را اثر ماتریس A ، $\mathrm{rank}(A)$ را رتبه‌ی ماتریس A و A^t را ترانهاده‌ی ماتریس A در نظر می‌گیریم. ماتریس همانی را با I نمایش می‌دهیم و E_{ij} را ماتریس $n \times n$ که مولفه‌ی (i,j) آن یک و بقیه‌ی مولفه‌هایش صفر هستند، فرض می‌کنیم.

تعریف ۱.۳ دو ماتریس $B \in M_n(\mathbb{C})$ و A را متشابه نامیم هر گاه ماتریس معکوس پذیر $U \in M_n(\mathbb{C})$ طوری یافت شود که داشته باشیم $A = U^{-1}BU$.

قرارداد ۲.۳ اگر A با B متشابه باشد آن را به صورت $A \overset{s}{\sim} B$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۳ نگاشت $\Phi : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ را حافظ تشابه گوییم هرگاه برای هر A و $B \in M_n(\mathbb{C})$ که $A \overset{s}{\sim} B$ داشته باشیم $\Phi(A) \overset{s}{\sim} \Phi(B)$.

در اینجا مثالی از یک نگاشت خطی حافظ تشابه می‌آوریم.

مثال ۴.۳ فرض کنیم $\Phi : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ با ضابطه‌ی $\Phi(A) = \mathrm{tr(A)I}$ تعریف شده باشد. دراین صورت Φ به وضوح خوش تعریف و خطی است. اگر $A \overset{s}{\sim} B$ آن گاه $\mathrm{tr(A) = tr(B)}$ و در نتیجه $\Phi(A) = \mathrm{tr(A)I = tr(B)I = \Phi(B)}$. بنابراین $\Phi(A) \overset{s}{\sim} \Phi(B)$. پس Φ یک نگاشت خطی حافظ تشابه روی $M_n(\mathbb{C})$ است.

حال این سوال پیش می‌آید که آیا غیر از ساختار فوق ساختار دیگری برای چنین نگاشت‌هایی وجود دارد؟
قضیه‌ی زیر ساختار نگاشت‌های خطی حافظ تشابه روی $M_n(\mathbb{C})$ را معین می‌کند.

قضیه ۵.۳ فرض کنیم $\Phi : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ یک نگاشت خطی باشد. در این صورت Φ حافظ تشابه است اگر و تنها اگر Φ به یکی از فرم‌های زیر باشد.
الف) ماتریس $A_\circ \in M_n(\mathbb{C})$ وجود داشته باشد که

$$\forall\ X \in M_n(\mathbb{C}) \qquad , \qquad \Phi(X) = tr(X)A_\circ$$

ب) ماتریس وارون پذیر $S \in M_n(\mathbb{C})$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ وجود داشته باشند به قسمی که

$$\forall\ X \in M_n(\mathbb{C}) \qquad , \qquad \Phi(X) = \alpha SXS^{-1} + \beta tr(X)I$$

یا

$$\forall\ X \in M_n(\mathbb{C}) \qquad , \qquad \Phi(X) = \alpha SX^tS^{-1} + \beta tr(X)I.$$

اثبات یک طرف قضیه ساده است ولی جهت کامل بودن پایان نامه آن را در زیر بیان می‌کنیم.
اثبات. فرض کنیم Φ به فرم (الف) باشد. چون هر دو ماتریس متشابه دارای اثر یکسان هستند پس اگر $X \overset{s}{\sim} X'$ در این صورت،

$$\Phi(X) = tr(X)A_\circ = tr(X')A_\circ = \Phi(X')$$

در نتیجه $\Phi(X) \overset{s}{\sim} \Phi(X')$.

اگر Φ به فرم اول (ب) باشد و $X \overset{s}{\sim} X'$، آن‌گاه ماتریس معکوس پذیر P چنان وجود دارد که $X = PX'P^{-1}$. قرار می‌دهیم $Q = SPS^{-1}$. در نتیجه

$$\begin{aligned} Q\Phi(X')Q^{-1} &= (SPS^{-1})[\alpha SX'S^{-1} + \beta tr(X')I](SPS^{-1})^{-1} \\ &= \alpha(SPS^{-1})SX'S^{-1}(SP^{-1}S^{-1}) + \beta tr(X)(SPS^{-1})I(SP^{-1}S^{-1}) \\ &= \alpha SPX'P^{-1}S^{-1} + \beta tr(X)I \\ &= \alpha SXS^{-1} + \beta tr(X)I = \Phi(X) \end{aligned}$$

و بنابراین $\Phi(X) \overset{s}{\sim} \Phi(X')$.

فرم دوم (ب) مشابه فرم اول (ب) بحث می‌شود.

■

اما برای اثبات طرف دیگر قضیه نیاز به تعاریف و لم‌های زیر داریم که ابتدا آن‌ها را بیان و اثبات می‌کنیم، سپس اثبات طرف دیگر قضیه را خواهیم آورد.

۳–۳ تعیین هسته‌ی نگاشت‌های خطی حافظ تشابه روی ماتریس‌های مختلط

تعریف ۶.۳ ماتریس مربعی بالا مثلثی $[a_{ij}]$ با خواص زیر یک بلوک ژوردان نامیده می‌شود. عناصر قطر اصلی، یعنی a_{ii}، برابر هستند، هر درایه فوق قطر، برابر یک است و تمام درایه‌های دیگر صفر هستند.

در ضمن هر ماتریس ۱×۱ نیز یک بلوک ژوردان نامیده می‌شود. هر بلوک ژوردان دارای دقیقاً یک مقدار ویژه که همان اسکالر روی قطر اصلی است می‌باشد.

تعریف ۷.۳ نمایش هر ماتریس به صورت بلوک ـ قطری $\mathrm{diag}(\mathrm{J_1}, \mathrm{J_2}, \ldots, \mathrm{J_m})$ که هر J_k یک بلوک ژوردان است و اندازه‌ی ماتریس‌های J_k با افزایش k کاهش می‌یابد را فرم متعارف ژوردان آن ماتریس می‌نامیم.

طبق مرجع [۸] (صفحه‌ی ۳۲۱)، برای هر عملگر خطی $T : V \longrightarrow V$، پایه‌ی مرتبی برای V وجود دارد که در آن T با ماتریسی که به فرم ژوردان است نمایش داده می‌شود. از طرفی هر ماتریس $n \times n$ بر روی میدان $\mathbb{C}$، با فرم ژوردانش متشابه است. فرم ژوردان هر ماتریس بدون احتساب ترتیب مقادیر ویژه‌اش،