بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه حکیم سبزواری

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی محض - جبر

توسیع های چندجمله ای از حلقه ها و مدولهای بئر و شبه بئر

استاد راهنما

دکتر علی اکبر استاجی

استاد مشاور

دکتر لیلی شریفان

نگارش

علی اکبر سلطان آبادی

زمستان ۱۳۹۱

تقدیم به

پدر و مادرم

تشکر و قدردانی

سپاس خدایی را که بی همتاست و هرچه داریم از لطف و کرم اوست. درود بر محمد مصطفی (ص) آخرین فرستاده خدا و ائمه معصومین (ع). سلام بر امام زمان، حجةالحسن العسکری.

حال که با فضل و عنایت حضرت حق و مساعدت یاران، موفق به تنظیم و تدوین این پایان نامه شده ام بر خود واجب می دانم از تمامی بزرگوارانی که در به فرجام رسانیدن این مهم از سرچشمه معرفتشان بهره برده ام، کمال تشکر و قدردانی را بنمایم و امیدوارم مراتب امتنان و احترام مرا برساند.

از پدر و مادرم، بخاطر تمام فداکاریها و زحمتهایشان سپاسگزارم. از جناب آقای دکتر علی اکبر استاجی که در تمام طول دوره، از تجربه های ارزشمندشان بهره برده ام و راهنمایی این پایان نامه را پذیرفته اند، کمال تشکر و قدردانی را دارم. از سرکار خانم دکتر لیلی شریفان به جهت مشاوره در این پایان نامه و از دیگر اساتید گروه ریاضی محض، اساتید محترم آقایان دکتر مقدسی، دکتر عارفی جمال و دکتر صادقی که در طول این دوره مرا مرهون لطف خود قرار دادند، تشکر و قدردانی می کنم. باعث افتخار است که استاد بزرگوار، سرکار خانم دکتر بهناز طلوع حقیقی، قبول زحمت فرموده داوری این پایان نامه را به عهده گرفته اند، صمیمانه از ایشان سپاسگزاری می نمایم.

علی اکبر سلطان آبادی

زمستان ۱۳۹۱

چکیده

نام خانوادگی : سلطان آبادی **نام :** علی اکبر	
عنوان پایان نامه : توسیع های چندجمله ای از حلقه ها و مدولهای بئر و شبه بئر	
استاد راهنما : دکتر علی اکبر استاجی **استاد مشاور:** دکتر لیلی شریفان	
درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی محض **گرایش:** جبر **محل تحصیل:** دانشگاه حکیم سبزواری **دانشکده:** ریاضی و علوم کامپیوتر **تاریخ فارغ التحصیلی:** بهمن ماه ۱۳۹۱ **تعداد صفحه:** ۱۱۰	
واژه‌های کلیدی: مدول های (α,δ)-سازگار، مدولهای تقلیل یافته، مدولهای بئر و شبه بئر، حلقه چندجمله ایهای اریب، حلقه های (α,δ)-سازگار، حلقه های بئر و شبه بئر، حلقه های آرمنداریز و شبه آرمنداریز، حلقه های α-صلب و حلقه های تقلیل یافته	

چکیده: در این پایان نامه حلقه ها و مدولهای بئر، شبه بئر و شبه بئر اصلی و همچنین حلقه ها و مدولهای آرمنداریز و شبه آرمنداریز را مورد مطالعه قرار می دهیم. همچنین روابط بین ویژگیهای بئر، شبه بئر و شبه بئر اصلی از یک حلقه ی R و R-مدول M و توسیع های چندجمله ایهای حلقه ی R و مدول M را مطالعه می کنیم. ایده ی اصلی این پایان نامه از مقاله های

E. Hashemi and A. Moussavi, Extensions of baer and quasi-Baer moduls, Bull. Iranian Math. Soc. 37 (1) (2011), 1-13.

و

E. Hashemi and A. Moussavi, Polynomial extensions of quasi-Baer rings, Acta Math. Hungar, 107 (3) (2005), 207-224.

گرفته شده است.

فهرست مطالب

علائم

a، b را عاد می کند .... $a \mid b$

I یک ایده آل R است .... $I \lhd R$

A یکریخت است با B .... $A \cong B$

ایده آل تولید شده توسط X .... $< X >$

پوچ ساز چپ X .... $l_R(X)$

پوچ ساز راست X .... $r_R(X)$

توسیع جردن حلقه ی R .... $A(R,\alpha)$

چندجمله ای روی متغیر x .... $f(x)$

حاصل جمع $\{M_i\}_{i\in I}$ از R–زیر مدول های M .... $\sum_{i\in I} M_i$

حاصل جمع خانواده ی $\{M_i\}_{i\in I}$ از R–مدول ها .... $\coprod_{i\in I} M_i$

حاصل جمع مستقیم $R_1,...,R_n$ .... $\bigoplus_{i=1}^{n} R_i$

حاصل ضرب خانواده ی $\{M_i\}_{i\in I}$ از R–مدول ها .... $\prod_{i\in I} M_i$

حاصل ضرب تانسوری R–مدول های A و B .... $A \otimes_R B$

حاصل ضرب مستقیم $R_1,...,R_n$ .... $\prod_{i=1}^{n} R_i$

حلقه ی چندجمله ایها روی حلقه ی R .... $R[x]$

حلقه ی چندجمله ایها ی اریب روی R . . . . $R[x;\alpha,\delta]$

حلقه ی چندجمله ایهای اریب لوران روی R . . . . $R[x,x^{-1};\alpha]$

حلقه ی چندجمله ایها ی مشتق روی R . . . . $R[x;\delta]$

حلقه ی خارج قسمتی R روی I . . . . $\frac{R}{I}$

حلقه ی سریهای توانی اریب روی R . . . . $R[[x;\alpha]]$

حلقه ی سریهای توانی اریب لوران روی R . . . . $R[[x,x^{-1};\alpha]]$

حلقه ی سریهای توانی روی R . . . . $R[[x]]$

حلقه ی ماتریسهای n×n بالا مثلثی روی R . . . . $UT_n(R)$

حلقه ی ماتریسهای n×n روی R . . . . $M_n(R)$

رسته ی تمام R-مدول های راست . . . . M_R

زیرمدول . . . . $\preceq$

زیرمجموعه . . . . $\subseteq$

زیرمجموعه اکید . . . . $\subset$

مجموعه اعداد صحیح . . . . $\mathbb{Z}$

مجموعه اعداد طبیعی . . . . $\mathbb{N}$

مجموعه ی تمام پوچ سازهای چپ ایده آلهای حلقه ی R . . . . $lAnn_R(Id(R))$

مجموعه ی تمام پوچ سازهای راست ایده آلهای حلقه ی R . . . . $rAnn_R(Id(R))$

مجموعه ی ضرایب چندجمله ای $f(x)$ . . . . C_f

همدسته ی چپ $a+I$ در $\frac{R}{I}$ . . . . $\bar{a}$

پیشگفتار

در این پایان نامه حلقه ها و مدولهای بئر، شبه بئر و شبه بئر اصلی، حلقه ی تقلیل یافته، حلقه ی α-صلب و حلقه ی (α,δ)-سازگار را مطالعه می کنیم.

کاپلانسکی[۱] حلقه ی بئر را در [۲۵]، معرفی می کند و نتایجی از جبرهای فن نیومن و حلقه های کامل $*$-منظم را به دست می آورد. رده ای از حلقه های بئر در جبر فن نیومن قرار دارد.

کلارک[۲] در [۱۴]، یک حلقه تعریف می کند که شبه بئر است، اگر پوچ ساز چپ هر ایده آل آن، به عنوان ایده آل چپ، توسط یک عنصر خودتوان تولید شود. او از مفهوم شبه بئر، در توصیف یک جبر متناهی بعد یک دار روی میدان جبری بسته که با جبر نیم گروه ماتریسهای واحد تابی [۳] یکریخت است، استفاده می کند. کارهای بیشتر روی حلقه های شبه بئر در [۶، ۹، ۱۲، ۲۰] موجود است.

در سال ۱۹۷۴، آرمنداریز [۴] رفتار یک چندجمله ای را روی یک حلقه ی بئر، به صورت زیر مطرح کرد:

گزاره: ([۵]، قضیه ی B) فرض کنید R یک حلقه ی تقلیل یافته باشد. (یعنی هیچ عنصر پوچ توان ناصفر نداشته باشد)، در این صورت $R[x]$ یک حلقه ی بئر است اگر و تنها اگر R یک حلقه ی

[۱] I.Kaplansky
[۲] W.E.Clark
[۳] Twisted matrix units semigroup algebra
[۴] E.P. Armendariz

بئر باشد.

آرمنداریز با یک مثال نشان داد که شرط تقلیل یافته در گزاره ی بالا ضروری است. یک تعمیم از نتایج آرمنداریز برای انواع مختلف توسیع چندجمله ایها روی حلقه های بئر و شبه بئر، در [۱۸، ۳۱] فراهم می شود.

بیرکن مایر[۵]، کیم[۶] و پارک[۷]، در [۹]، نشان داده اند که حلقه ی R شبه بئر اصلی راست است اگر و تنها اگر $R[x]$ یک حلقه ی شبه بئر اصلی راست باشد.

این پایان نامه با هدف فراهم نمودن بستری مناسب برای دانشجویان علاقمند در سرآغاز تحقیقات و مطالعات در رابطه با توسیع های چندجمله ای از حلقه ها و مدولهای بئر و شبه بئر تدوین شده است. پژوهش حاضر بررسی حلقه ها و مدولهای بئر، شبه بئر و شبه بئر اصلی را به همراه تنوع مطالب بسیاری در خود جای داده است. شایان ذکر است که این گوناگونی مطلب خود سرشار از ایده برای آغاز پژوهش در این راستا خواهد بود. روند بررسی موضوع به نحوی انتخاب شده است که در ابتدا ابزار مورد نیاز را فراهم آورده و در ادامه مورد استفاده و کاربرد هر یک به نحو شایسته بیان شود. برای این منظور مطالب در قالب دو فصل با عناوین توسیع های چندجمله ای از مدول های بئر و شبه بئر و توسیع های چندجمله ای از حلقه های بئر و شبه بئر مدون شده است.

فصل اول در دو بخش تعاریف و مفاهیم اولیه و چندجمله ایها روی مدولهای بئر و شبه بئر شکل گرفته است. در این فصل ابتدا به معرفی مدول های (α,δ)-سازگار می پردازیم، سپس مدول های آرمنداریز و شبه آرمنداریز را معرفی می کنیم. همچنین در این فصل حلقه های α-صلب، که در این پژوهش نقش مهمی دارند، معرفی شده است.

فصل دوم شامل سه بخش است. بخش اول شامل دو مثال از حلقه های شبه بئر اصلی چپ

[۵] G.F. Birkenmeier
[۶] J.Y. Kim
[۷] J.K. Park

α-سازگار که α-صلب نیستند، می باشد. بخش دوم از این فصل به ارائه ی مباحثی نظیر چندجمله ایهای اریب پرداخته شده و در نهایت حلقه های سریهای توانی روی حلقه های شبه بئر و شبه بئر اصلی چپ مورد بررسی قرار گرفته اند. همچنین در این بخش یک تعمیم از حلقه های α-صلب را بررسی می کنیم و شروط $SQA1$ [8] و $SQA2$ [9] را که نسخه هایی از چندجمله ایهای اریب از حلقه های شبه آرمنداریزند را معرفی می کنیم. بخش سوم از این فصل شامل حلقه های چندجمله ایهای اریب لوران و حلقه های سریهای توانی اریب لوران روی حلقه های شبه بئر و شبه بئر اصلی چپ می باشد. همچنین در این بخش شروط $SQA3$ [10] و $SQA4$ [11] را که نسخه هایی از چندجمله ایهای اریب لوران از حلقه های شبه آرمنداریزند، بررسی می کنیم و رابطه ی بین خاصیت شبه بئری و $p.q$-بئری حلقه ی R را مطالعه می کنیم.

[8] شبه آرمنداریز اریب۱
[9] شبه آرمنداریز اریب ۲
[10] شبه آرمنداریز اریب ۳
[11] شبه آرمنداریز اریب ۴

فصل ۱

توسیع های چندجمله ای از مدول های بئر و شبه بئر

در این فصل ابتدا به معرفی مدول های (α, δ)-سازگار می پردازیم، سپس مدول های آرمنداریز و شبه آرمنداریز را معرفی می کنیم. همچنین در این فصل حلقه های α-صلب و رابطه ی آن با حلقه ی چندجمله ایها ی اریب را بررسی می کنیم. فصل حاضر شامل دو بخش تعاریف و مفاهیم اولیه و چندجمله ایها روی مدول های بئر و شبه بئر می باشد.

۱.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

در این بخش مطالب پیش نیاز پایان نامه آورده شده است. در بخش حاضر ابتدا مدول ها را به عنوان یکی از مهم ترین ساختارهای جبری معرفی کرده و به بررسی مطالبی از حاصل ضرب تانسوری مدول ها و قضایای مربوط به آن خواهیم پرداخت. در ادامه مفهوم مدول های بئر، شبه بئر و شبه بئر اصلی را ارائه خواهیم کرد. در سراسر این پایان نامه R حلقه ای [۱] یک دار است و M، R-مدولی راست[۲] در نظر گرفته می شود.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه و $(M, +)$ یک گروه آبلی باشد. چنان چه نگاشت

[۱] Ring

[۲] Right R-Module

$$\begin{aligned} . \quad : \quad & M \times R \longrightarrow M \\ & (m,r) \longmapsto mr \end{aligned}$$

برای هر $r, r' \in R$ و $m, m' \in M$ در شرایط

۱. $m.(r+r') = m.r + m.r'$

۲. $(m+m').r = m.r + m'.r$

۳. $m.(rr') = (mr).r'$

۴. $m.1 = m$

صدق کند، M را یک R-مدول راست می نامیم و از نماد M_R برای نمایش آن استفاده می کنیم.

به طریق مشابه و با در نظر گرفتن ضرب اسکالر

$$\begin{aligned} . \quad : \quad & R \times M \longrightarrow M \\ & (r,m) \longmapsto rm \end{aligned}$$

می توان R-مدول چپ را تعریف نمود. در صورتی که M هم یک R-مدول راست و هم یک R-مدول چپ باشد، گوییم M یک R-مدول است.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید M یک R-مدول راست باشد. پوچساز[۳] M را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$Ann_R(M) = \{a \in R | \forall m \in M \qquad ma = 0\}.$$

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید M و N دو R-مدول راست و $\varphi : M \longrightarrow N$ یک همریختی [۴] گروهی جمعی باشد. اگر برای هر $m \in M$ و $r \in R$، داشته باشیم $\varphi(mr) = \varphi(m)r$، آن گاه φ یک همریختی R-مدولی راست یا یک R-همریختی راست نامیده می شود.

[۳] Annihilator
[۴] Homomorphism

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید R و S دو حلقه و $\psi : R \longrightarrow S$ یک همریختی گروهی جمعی باشد. چنان چه برای هر $r, r' \in R$ ، داشته باشیم $\psi(rr') = \psi(r)\psi(r')$، آن گاه ψ را یک همریختی حلقه ای می نامیم.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید M یک R-مدول، $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده ای ناتهی از زیر مدول های آن و I یک مجموعه ی ناتهی باشد. در این صورت مجموعه $\sum_{i\in I} M_i$ را به صورت

$$\sum_{i\in I} M_i = \{\sum_{i=۱}^{n} x_{i_k} | n \in \mathbb{N}, i_k \in I, x_{i_k} \in M_{i_k}\}$$

تعریف می کنیم و اگر $I = \emptyset$، قرار می دهیم: $\sum_{i\in I} M_i = ۰$.

در ادامه ی بخش حاصل ضرب تانسوری [۵] دو R-مدول M و N را تعریف می کنیم.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید A یک R-مدول راست، B یک R-مدول چپ، F گروه آبلی آزاد روی مجموعه ی $A \times B$ و K زیرگروهی از F باشد که برای هر $a, a' \in A$، $b, b' \in B$ و $r \in R$ توسط عناصری به فرم

۱. $(a + a', b) - (a, b) - (a', b)$ ،

۲. $(a, b + b') - (a, b) - (a, b')$ ،

۳. $(ar, b) - (a, rb)$ ،

تولید می شود. در این صورت گروه خارج قسمتی $\frac{F}{K}$ را حاصل ضرب تانسوری A و B می نامیم و آن را با نماد $A \otimes_R B$ (یا فقط $A \otimes B$ اگر $R = \mathbb{Z}$) نمایش می دهیم.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید A یک R-مدول راست و B یک R-مدول چپ باشد. برای هر $\mathbb{Z}$-مدول مانند L، نگاشت $f : A \times B \longrightarrow L$ را یک تابع خطی میانی نامیم هرگاه برای هر $a, a' \in A$ و $b, b' \in B$

[5] Tensor product

و $r \in R$،

۱. $f(a+a', b) = f(a,b) + f(a', b)$ ،

۲. $f(a, b+b') = f(a,b) + f(a, b')$ ،

۳. $f(ar, b) = f(a, rb)$.

تعریف ۸.۱.۱. زیر مدول N از یک R-مدول راست M را زیر مدول محض [۶] نامیم اگر

$$N \otimes_R L \longrightarrow M \otimes_R L$$

یک مونومورفیسم [۷] برای هر R-مدول چپ L باشد.

قضیه ۹.۱.۱. *(خاصیت جهانی ضرب تانسوری) فرض کنید A، R-مدول راست و B یک R-مدول چپ باشد. در این صورت برای هر $\mathbb{Z}$-مدول مثل L و هر تابع خطی میانی مثل $f : A \times B \longrightarrow L$، $\mathbb{Z}$-همریختی منحصر به فردی چون $\varphi : A \otimes_R B \longrightarrow L$ موجود است که نمودار*

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "f"'] & A \otimes B \arrow[dl, dotted, "\varphi"] \\ L & \end{tikzcd}$$

را جابجا کند.

برهان. به [۲۴] رجوع شود. □

تعریف ۱۰.۱.۱. [۲۵] گوییم R یک حلقه ی بئر [۸] است هرگاه پوچساز راست هر زیر مجموعه غیر تهی R توسط عنصری خودتوان [۹] تولید شود.

[۶] pure submodule
[۷] Monomorphism
[۸] Baer
[۹] Idempotent

تعریف ۱۱.۱.۱. [۱۴] حلقه ی R را شبه بئر[۱۰] نامیم هرگاه پوچساز هر ایده آل آن ایده آلی باشد که توسط عنصری خودتوان تولید می شود.

تعریف ۱۲.۱.۱. حلقه ی R را راست (چپ) $p.p$ گوییم هرگاه پوچساز راست (چپ) یک عنصر از R توسط عنصری خودتوان تولید شود.

در [۹] مفهوم حلقه های شبه بئر اصلی[۱۱] معرفی شده است.

تعریف ۱۳.۱.۱. حلقه ی R را شبه بئر اصلی راست (یا مشابهاً p.q -بئر راست) گوییم هرگاه پوچساز راست هر ایده آل اصلی آن، به عنوان ایده آل راست، توسط عنصری خودتوان تولید شود.

تعریف ۱۴.۱.۱. حلقه ی R را تقلیل یافته [۱۲] نامیم، اگر هیچ عنصر پوچتوان [۱۳] ناصفر نداشته باشد.

در [۳۰]، مدول های بئر، شبه بئر و شبه بئر اصلی و $p.p$-مدولها به صورت زیر معرفی شده اند:

۱. مدول M را بئرگوییم، هرگاه برای هر زیر مجموعه ی X از M، عنصر خودتوان $e = e^{2} \in R$ به قسمی وجود داشته باشد که $Ann_R(X) = eR$.

۲. مدول M را شبه بئر گوییم، هرگاه برای هر زیر مدول X از M، عنصر خودتوان $e = e^{2} \in R$ به قسمی وجود داشته باشد که $Ann_R(X) = eR$.

۳. مدول M را $p.p$ گوییم، هرگاه برای هر عنصر $m \in M$، عنصر خودتوان $e = e^{2} \in R$ به قسمی وجود داشته باشد که $Ann_R(m) = eR$.

۴. مدول M را شبه بئر اصلی گوییم، هرگاه برای هر $m \in M$، عنصر خودتوان $e = e^{2} \in R$ به قسمی وجود داشته باشد که $Ann_R(mR) = eR$.

[۱۰] Quasi-Baer
[۱۱] Principally quasi-Baer
[۱۲] Reduced
[۱۳] Nilpotent

تعریف ۱۵.۱.۱. R-مدول N را اول می نامیم، اگر $N \neq 0$ و برای هر زیر مدول N' از N،

$$Ann_R(N) = Ann_R(N')$$

تعریف ۱۶.۱.۱. ایده آل سره ی P از حلقه ی R را اول می نامیم هرگاه، A و B، ایده آل هایی از حلقه ی R باشند و $AB \subseteq P$، در این صورت $A \subseteq P$ یا $B \subseteq P$.

تعریف ۱۷.۱.۱. حلقه ی R را اول می نامیم هرگاه، ایده آل $\{0\}$، اول باشد.

۲.۱ چندجمله ای ها روی مدول های بئر و شبه بئر

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد، اگر $a_0, a_1, \ldots \in R$، آن گاه حاصل جمع صوری و نا متناهی

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_o + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots$$

را یک چندجمله ای [۱۴] با ضرایب در R می نامیم، هر گاه به ازای جمیع مقادیر $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$، مگر تعداد متناهی از آنها، $a_i = 0$.

برای هر $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$، a_i را ضرایب x^i می نامیم و مجموعه ی تمام چندجمله ای ها با ضرایب در R را با $R[x]$ نمایش می دهیم. چندجمله ای که همه ی ضرایب آن صفر باشد را چندجمله ای صفر می نامیم.

برای هر $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \in R[x]$، $f(x)$ را برابر با $g(x)$ نامیم هر گاه، برای هر $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$، $a_i = b_i$.

$R[x]$با اعمال جمع و ضرب زیر یک حلقه است.

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty}(a_i+b_i)x^i \\ (fg)(x) &= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i\end{aligned}$$

[۱۴] Polynomial

که

$$
\begin{aligned}
d_i &= \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} \\
&= a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \cdots + a_i b_0
\end{aligned}
$$

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد و α یک درونریختی [۱۵] روی R باشد. اگر تابع $\delta : R \longrightarrow R$ به قسمی باشد که برای هر $a, b \in R$،

۱. $\delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b)$،

۲. $\delta(ab) = \delta(a)b + \alpha(a)\delta(b)$.

در این صورت δ را یک تابع α-مشتق [۱۶] می نامیم.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم $\alpha : R \longrightarrow R$ یک درونریختی و $\delta : R \longrightarrow R$ یک تابع α-مشتق باشد. حلقه ی چندجمله ایهای اریب [۱۷] روی R را با $S = R[x; \alpha, \delta]$ نشان می دهیم. عناصر S به صورت چندجمله ایهای $\sum_{i=0}^{\infty} r_i x^i \in R$ می باشند، که در آن جمع به صورت جمع معمولی و ضرب به صورت ضرب عبارات جبری است و در آن برای $b \in R$،

$$xb = \alpha(b)x + \delta(b).$$

در تعریف فوق اگر α تابع همانی [۱۸] باشد، در این صورت $R[x; \alpha, \delta]$ را با $R[x; \delta]$ نمایش می دهیم و آن را حلقه ی چندجمله ایهای مشتق [۱۹] روی R می نامیم. هرگاه $\delta = 0$، به جای $R[x; \alpha, \delta]$ از $R[x; \alpha]$ استفاده می کنیم.

قرارداد: [۲۸] فرض کنیم δ یک تابع α-مشتق روی حلقه ی R باشد و $0 \leq i \leq j$.

[۱۵] Endomorphism
[۱۶] α-derivation
[۱۷] Skew polynomial ring
[۱۸] Identity
[۱۹] Derivation polynomial ring

مجموع تمام جملاتی که بر اساس i حرف از α و $j-i$ حرف از δ ساخته می شوند را با f_i^j نمایش می دهیم.

به عنوان مثال، $f_j^j = \alpha^j$ ، $f_0^j = \delta^j$ و $f_{j-1}^j = \alpha^{j-1}\delta + \alpha^{j-2}\delta\alpha + \cdots + \delta\alpha^{j-1}$

گزاره ۴.۲.۱. *فرض کنید* $S = R[x;\alpha,\delta]$. *در این صورت برای هر* $a \in R$ *و* $i, j \in \mathbb{N}$ ،

$$x^j a = \sum_{i=0}^{j} f_i^j(a) x^i. \tag{۱.۱}$$

برهان. با استقراء روی j ثابت می کنیم. قرار می دهیم $j = 1$، با توجه به تعریف قبل داریم:

$$\begin{aligned} xa &= \alpha(a)x + \delta(a) \\ &= f_1^1(a)x + f_0^1(a)x^0 \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{1} f_i^1(a)x^i. \end{aligned}$$

لذا برای $j = 1$، تساوی (۱.۱) برقرار است. فرض کنیم حکم برای $j = k$، درست باشد، آن را برای $j = k+1$ اثبات می کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} x^{k+1}a &= x^k(xa) \\ &= x^k(\alpha(a)x + \delta(a)) \\ &= x^k\alpha(a)x + x^k\delta(a) \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{k} f_i^k(\alpha(a))x^{i+1} + \sum_{i=0}^{k} f_i^k(\delta(a))x^i \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} f_i^k(\alpha(a))x^{i+1} + f_k^k(\alpha(a))x^{k+1} + f_0^k(\delta(a))x^0 + \sum_{i=1}^{k} f_i^k(\delta(a))x^i \\ &= f_0^k(\delta(a))x^0 + \Big(f_1^k(\delta(a)) + f_0^k(\alpha(a))\Big)x + \cdots + \Big(f_k^k(\delta(a)) + f_{k-1}^k(\alpha(a))\Big)x^k + f_k^k(\alpha(a))x^{k+1} \\ &= f_0^{k+1}(a)x^0 + f_1^{k+1}(a)x + \cdots + f_k^{k+1}(a)x^k + f_{k+1}^{k+1}(a)x^{k+1} \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{k+1} f_i^{k+1}(a)x^i. \end{aligned}$$

بنابراین حکم برای $j = k+1$ نیز درست است. لذا تساوی (۱.۱) همواره برقرار است.

□

تعریف ۵.۲.۱. [۴] فرض کنیم M_R یک R-مدول راست باشد و $\alpha : R \longrightarrow R$ یک درونریختی و

$\delta: R \longrightarrow R$ یک α-مشتق باشد، گوییم M_R یک R-مدول α-سازگار [۲۰] است اگر برای هر $m \in M$ و $r \in R$ داشته باشیم:

$$mr = \circ \quad \Longleftrightarrow \quad m\alpha(r) = \circ$$

به علاوه M_R را δ-سازگار [۲۱] نامیم، هرگاه برای هر $m \in M$ و $r \in R$ داشته باشیم:

$$mr = \circ \quad \Rightarrow \quad m\delta(r) = \circ$$

اگر M_R هم α-سازگار و هم δ-سازگار باشد، آن گاه M_R را (α, δ)-سازگار [۲۲] می نامیم.

گزاره ۶.۲.۱. *هر حلقه ی اول، یک حلقه ی شبه بئر است.*

برهان. می دانیم که پوچ ساز راست هر ایده آل ناصفر از یک حلقه ی اول، صفر است. لذا هر حلقه ی اول، شبه بئر است. □

مثال زیر نشان می دهد که مدول (α, δ)-سازگار M_R موجود است به طوری که M_R، شبه بئر باشد.

مثال ۷.۲.۱. [۴] *فرض کنیم $R_\circ$ یک دامنه با مشخصه ی صفر باشد و $R := R_\circ[t]$. درونریختی $\alpha : R \longrightarrow R$ را چنان تعریف می کنیم که $\alpha \mid_{R_\circ} = Id$ و $\alpha(t) = -t$. اکنون نگاشت جمعی δ را به قسمی در نظر می گیریم که برای $a \in R_\circ$، اگر l فرد باشد، آن گاه $\delta(at^l) := at^{l-1}$ و اگر l زوج باشد، $\delta(at^l) := \circ$. نشان می دهیم که δ یک α-مشتق روی R است. فرض کنیم $a = \sum_{i=\circ}^{\infty} a_i t^i$ و $b = \sum_{i=\circ}^{\infty} b_i t^i$، داریم:*

---
[۲۰] α-compatible
[۲۱] δ-compatible
[۲۲] (α, δ)-compatible