به نام خدا

تقدیم

به پدر و مادر عزیز و مهربانم

سپاسگزاری

حمد و سپاس بی قیاس خداوند سبحان را که به بندگان خود منت نهاد و او را به زیور عقل و خرد آراست تا به وسیله آن عبودیت و کمال ذات بی همتای خداوند را پیشه کند تا تعالی و کمال یابد.

قدر می دانم زحمات بی دریغ و ارزشمند استاد فرهیخته، فرزانه و عزیزم جناب آقای دکتر حسین ذاکری و سپاس دارم از تعلیمات و ارشادات دلسوزانه ایشان را که با عنایت و حسن توجه، صبورانه و صمیمانه، همپای جستجوهایم، مرا رهنما بودند.

تقدیر و سپاس حضور ارزشمند اساتید بزرگوار، گرانقدر و فهیم ام آقایان دکتر محمد تقی دیبایی، دکتر مسعود طوسی و دکتر کامران دیوانی آذر که داوری این رساله را بر عهده گرفتند و در طول این چند سال بنده را مورد لطف خویش قرار دادند.

تقدیر و سپاس حضور سرکار خانم دکتر مریم جهانگیری که مشاور این رساله بودند.

هر نفس شاکرم وجود مادر و پدری مهربان، دلسوز و زحمت کش را که به فضل تو زندگانیم را به نور تو نورانی نموده اند و استاد عزیزم که می شناسمش به پاکی و دلسوزی صادقانه و تقدیم به وجود پاکشان.

اظهارنامه

فصل های دوم، سوم و چهارم این پایان نامه به نتایج اصلی اختصاص دارند و بیشتر مطالب این رساله از مقالات [37] و [38] نوشته شده است.

چکیده

مدول های کوهن-مکالی کلاس مهمی از مدول های نوتری را تشکیل می دهند. بعنوان تعمیمی از این دسته مدول ها، کلاس مدول های کوهن-مکالی نسبی را معرفی می کنیم. در این پایان نامه هدف اصلی ما مطالعه برخی ابعاد همولوژیکی مدول های کوهن-مکالی نسبی و کوهمولوژی موضعی آنها است. فرض کنیم $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه ی جابجایی نوتری، موضعی و M یک R-مدول کوهن-مکالی نسبی وابسته به ایده آل $\mathfrak{a}$ از R است و قرار دهید $n := \mathrm{ht}_M \mathfrak{a}$. نشان می دهیم که عبارت های $\mathrm{id}_R M < \infty$ و $\mathrm{id}_R \mathrm{H}^n_{\mathfrak{a}}(M) < \infty$ بطور معادل متناهی هستند و تساوی $\mathrm{id}_R \mathrm{H}^n_{\mathfrak{a}}(M) = \mathrm{id}_R M - n$ نیز برقرار است. همچنین اثبات می کنیم که $\mathrm{fd}_R M < \infty$ اگر و تنها اگر $\mathrm{fd}_R \mathrm{H}^n_{\mathfrak{a}}(M) < \infty$ و بعلاوه $\mathrm{fd}_R \mathrm{H}^n_{\mathfrak{a}}(M) = \mathrm{fd}_R M + n$. در ادامه، بعنوان نسخه های گرنشتاین نتایج بالا، نشان داده می شود که اگر R همبافت دوگانی داشته باشد و $\mathrm{Gid}_R M < \infty$ آنگاه $\mathrm{Gid}_R \mathrm{H}^n_{\mathfrak{a}}(M) < \infty$ و $\mathrm{Gid}_R \mathrm{H}^n_{\mathfrak{a}}(M) = \mathrm{Gid}_R M - n$. بعلاوه اگر M کوهن-مکالی باشد، آنگاه $\mathrm{Gid}_R M < \infty$ هرگاه $\mathrm{Gid}_R \mathrm{H}^n_{\mathfrak{a}}(M) < \infty$. فرض کنیم M یک R-مدول کوهن-مکالی از بعد n باشد. در این صورت اثبات می کنیم $\mathrm{Gpd}_R M < \infty$ اگر وتنها اگر $\mathrm{Gfd}_R \mathrm{H}^n_{\mathfrak{m}}(M) < \infty$ و بعلاوه $\mathrm{Gfd}_R \mathrm{H}^n_{\mathfrak{m}}(M) = \mathrm{Gpd}_R M + n$. برای یک R-مدول با تولید متناهی M از بعد d، نشان داده می شود که K_M، مدول متعارف از M، کوهن-مکالی است و $\mathrm{Gid}_R \mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(M) < \infty$ اگر و تنها اگر $\mathrm{Gid}_R \mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(M) = \operatorname{depth} R - d$. قضایای بالا نتایجی دارند که برخی از قضایای معروف را بهبود می دهند و برخی مشخص سازیهایی برای مدول ها و حلقه های کوهن-مکالی و گرنشتاین ارائه می دهند. همچنین به یک سوالی که اخیرا مطرح شده است در حالت خاصی پاسخ داده می شود.

فرض کنیم $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی و C یک مدول شبه دوگانی روی R باشد. در این پایان نامه، همچنین ابعاد C-انژکتیو، C-تصویری، G_C-انژکتیو و G_C-یکدست از مدول های کوهمولوژی موضعی خاصی مورد مطالعه قرار می گیرد. ابتدا بعد انژکتیو C با ابعاد C-انژکتیو و G_C-انژکتیو مدول کوهمولوژی موضعی R مقایسه می شوند. سپس، بعنوان کاربردی از مقایسه بالا، یک مشخص سازیی برای مدول های متعارف ارائه داده می شود. نهایتا، بعنوان جواب برای سوالی که اخیرا مطرح شده است، نشان می دهیم که اگر R یک حلقه کوهن-مکالی موضعی از بعد d باشد بطوری که $\mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(C)$ یک مدول C-انژکتیو باشد، آنگاه R گرنشتاین است. همچنین، اثبات می شود که اگر C یک مدول شبه دوگانی و M یک مدول کوهن-مکالی با بعد n روی حلقه موضعی $(R,\mathfrak{m})$ باشد، آنگاه کمیت های $\mathrm{G_C}\text{-}\mathrm{pd}_R M$ و $\mathrm{G_C}\text{-}\mathrm{fd}_R \mathrm{H}^n_{\mathfrak{m}}(M)$ بطور معادل

متناهی هستند و بعلاوه تساوی $\mathrm{G_C}\text{-}\mathrm{fd}_R\,\mathrm{H}^n_{\mathfrak{m}}(M) = \mathrm{G_C}\text{-}\mathrm{pd}_R\,M + n$ برقرار است.

واژه های کلیدی. بعد انژکتیو، بعد گرنشتاین انژکتیو، بعد یکدست، بعد گرنشتاین یکدست، حلقه گرنشتاین، مدول کوهن-مکالی نسبی، کوهمولوژی موضعی، مدول شبه دوگانی، مدول دوگانی.

رده بندی موضوعی ریاضی (۲۰۱۰). 13D05, 13D45, 18G20

مقدمه

اوسلاندر[۱] در [4] مفهوم بعد گرنشتاین را بعنوان یک ناوردای همولوژیکی برای مدول های با تولید متناهی معرفی کرد و در ادامه، این مفهوم توسط بریدگر [۲] در [5] تکمیل شد. این ناوردا تظریفی از بعد تصویری است به این معنی که هر مدول با تولید متناهی با بعد تصویری متناهی دارای بعد گرنشتاین متناهی نیز است. چندین دهه بعد، مفهوم بعد گرنشتاین تصویری برای مدول هایی که لزوما با تولید متناهی نیستند بعنوان تعمیمی از بعد گرنشتاین معرفی شد و همچنین بعد گرنشتاین انژکتیو بعنوان نسخه دوگان برای مفهوم بعد گرنشتاین تصویری معرفی شد. مفهوم این ابعاد بر اساس کارهای ایناکس [۳] و جندا [۴] [15] شکل گرفته هستند. بعد گرنشتاین انژکتیو تظریفی از بعد انژکتیو است بدین معنی که هر مدول با بعد انژکتیو متناهی دارای بعد گرنشتاین انژکتیو متناهی نیز است.

از طرف دیگر یکی از ابزارهای مهم در هندسه جبری و جبر جابجایی مدول های کوهمولوژی موضعی هستند که توسط گروتندیک [۵] معرفی شده اند. در سال ۱۹۶۷ هارتشورن [۶] کتابی را تحت عنوان کوهمولوژی موضعی منتشر کرد که بر اساس سخنرانی سال ۱۹۶۱ گروتندیک در هاروارد تدوین شده بود. از آن به بعد، کوهمولوژی موضعی به یک ابزار موثر برای مطالعه در هندسه جبری و جبر جابجایی تبدیل شد. اخیرا سزیده مفهوم بعد گرنشتاین انژکتیو را جهت مطالعه مدول های کوهمولوژی موضعی بکار گرفت. در حقیقت ایشان برخی از نتایج مربوط به کوهمولوژی موضعی را با بکار گرفتن مفهوم گرنشتاین انژکتیو بجای انژکتیو، گسترش دادند. برای مثال، نشان دادند که می توان مدول های کوهمولوژی موضعی را بوسیله یک تحلیل گرنشتاین انژکتیو محاسبه کرد و همچنین اثبات کردند که اگر حلقه مورد نظر دارای همبافت دوگانی باشد، آنگاه برای هر ایده آل $\mathfrak{a}$ و مدول گرنشتاین انژکتیو M داریم که $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ گرنشتاین انژکتیو است. بعنوان چند نمونه از کارهای تحقیقاتی در این زمینه می توان به کارهای سزیده [44] ، [45] و یوشیزاوا [۷] [54] اشاره کرد.

هدف اصلی ما در این رساله مطالعه و بررسی ابعاد همولوژیکی مدول های کوهن-مکالی نسبی و مدول های کوهمولوژی موضعی آنها است. بعلاوه، مابین چیزهای دیگری، برخی مشخص سازیهایی را برای مدول

[۱] Auslander
[۲] Bridger
[۳] Enochs
[۴] Jenda
[۵] Grothendieck
[۶] Hartshorne
[۷] Yoshizawa

ها و حلقه های گرنشتاین و کوهن-مکالی بیان می کنیم. همچنین برخی از نتایج و قضایای معروف را تعمیم یا بهبود می دهیم و برای سوال هایی که اخیرا در [41] و [1] مطرح شده اند جواب هایی ارائه خواهیم کرد.

این رساله شامل چهار فصل است. فصل اول که به چهار بخش تقسیم شده است، فصل مقدمات است. در این فصل سعی شده است که برخی از مفاهیم و نتایجی که در این پایان نامه لازم هستند را گردآوری کنیم.

در فصل دوم هدف اصلی ما مطالعه بعد انژکتیو (گرنشتاین انژکتیو) از R-مدول های خاص برحسب بعد انژکتیو (گرنشتاین انژکتیو) مدول های کوهمولوژی موضعی آنها است. در این فصل مفهوم مدول های کوهن-مکالی نسبی را معرفی می کنیم که برای حالت حلقه، در [23] تحت عنوان اشتراک های کامل کوهمولوژیکی، مورد بررسی قرار گرفته است. تقسیم بندی این فصل به شکل زیر است. در بخش اول، مابین چیزهای دیگر ، در قضیه ۲.۱.۷ اثبات می کنیم که اگر M یک R-مدول کوهن-مکالی نسبی وابسته به ایده آل $\mathfrak{a}$ باشد، آنگاه کمیت های $\operatorname{id}_R M$ و $\operatorname{id}_R \mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{\operatorname{ht}_M \mathfrak{a}}(M)$ بطور معادل متناهی هستند و تساوی $\operatorname{id}_R \mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{\operatorname{ht}_M \mathfrak{a}}(M) = \operatorname{id}_R M - \operatorname{ht}_M \mathfrak{a}$ برقرار است. سپس بعنوان نتیجه ای از این قضیه، یک مشخص سازیی برای حلقه های گرنشتاین فراهم می کنیم. در ادامه بعنوان یک جواب جزیی برای سوالی که اخیرا در [1] مطرح شده است، برای هر $n \geq 0$ و $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M)$، مقایسه ای مابین اعداد باس $\mathrm{H}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}^{n}(M_{\mathfrak{p}})$ و $\mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^{n+\dim(R/\mathfrak{p})}(M)$ انجام می شود که در آن $(R, \mathfrak{m})$ تصویر همریخت یک حلقه گرنشتاین است و M نیز یک R-مدول با تولید متناهی است. در بخش دوم، علاوه بر چیز های دیگر، ابتدا مفهوم مدول متعارف از یک مدول جهت بهینه کردن بعضی از نتایج بیان شده در برخی مقالات مورد استفاده قرار می گیرد و سپس به کمک نتایج بدست آمده، برخی مشخص سازیهایی را برای حلقه های گرنشتاین بیان می کنیم. برای مثال در نتیجه ۲.۲.۳، مشخص سازیی برای حلقه های گرنشتاین ارائه می شود که تعمیمی از قضیه [54, 2.6] است. در ادامه، برخی از ویژگی های اساسی بعد گرنشتاین انژکتیو یک مدول بیان می شود. بویژه نشان داده می شود که بعد گرنشتاین انژکتیو تظریفی از بعد انژکتیو است. بعنوان یک نتیجه اصلی، نسخه گرنشتاین انژکتیو قضیه ۲.۱.۷ بیان می شود. در حقیقت نشان می دهیم که اگر علاوه بر فرایض قضیه ۲.۱.۷، حلقه R دارای همبافت دوگانی نیز باشد، آنگاه متناهی بودن $\operatorname{Gid}_R M$ نتیجه می دهد که $\operatorname{Gid}_R \mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{n}(M) < \infty$ و هرگاه M کوهن-مکالی باشد، عکس این مطلب نیز برقرار است. این قضیه نتایجی دارد که بوسیله آنها برخی نتایج جالبی که اخیرا در مقاله ها بیان شده اند، بهینه می شود. بعنوان اولین نتیجه از قضیه مذکور در بالا، تساوی $\operatorname{Gid}_R \mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^{n}(M) = \operatorname{Gid}_R M - n$ برقرار است که در آن M یک مدول کوهن-مکالی با بعد n روی حلقه موضعی $(R, \mathfrak{m})$ است. این نتیجه یک بهینه از قضیه [45, 3.10] است.

در فصل سوم با شیوه مشابه به فصل اول، هدف اصلی ما مطالعه و بررسی بعد تصویری (گرنشتاین تصویری) از R-مدول های خاص بر حسب بعد یکدست (گرنشتاین یکدست) مدول های کوهمولوژی موضعی آنها است. تقسیم بندی این فصل بدین گونه است که در بخش اول در قضیه ۳.۱.۱ نشان می دهیم که اگر M یک R-مدول کوهن-مکالی نسبی وابسته به ایده ال $\mathfrak{a}$ با $\operatorname{ht}_M \mathfrak{a} = n$ باشد، آنگاه کمیت های

$\mathrm{fd}_R(M)$ و $\mathrm{fd}_R(\mathrm{H}^n_{\mathfrak{a}}(M))$ بطور معادل متناهی هستند و بعلاوه تساوی $\mathrm{fd}_R(\mathrm{H}^n_{\mathfrak{a}}(M)) = \mathrm{fd}_R(M) + n$ برقرار است. در ادامه، تحت عنوان گزاره ۶.۱.۳ اثبات می کنیم که R-مدول با تولید متناهی M از بعد d و با بعد تصویری متناهی، کوهن-مکالی است اگر و تنها اگر داشته باشیم $\mathrm{fd}_R(\mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(M)) = \mathrm{pd}_R(M)+d$. توجه شود که این گزاره، تعمیمی از گزاره [15, 9.5.22] است. همچنین در این بخش مدول های کوهن-مکالی بزرگ متعادل، روی حلقه های موضعی منظم و گرنشتاین مشخص می شوند.

در بخش دوم بعنوان یک نتیجه اصلی، نسخه گرنشتاین تصویری قضیه ۱.۱.۳ در حالت خاصی اثبات می شود. در حقیقت نشان می دهیم که اگر $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی و M یک R-مدول کوهن-مکالی با بعد n باشد، آنگاه داریم $\mathrm{Gpd}_R(M) < \infty$ اگر و تنها اگر $\mathrm{Gfd}_R(\mathrm{H}^n_{\mathfrak{m}}(M)) < \infty$ و بعلاوه تساوی $\mathrm{Gfd}_R(\mathrm{H}^n_{\mathfrak{m}}(M)) = \mathrm{Gpd}_R(M) + n$ نیز برقرار است. همچنین یک نسخه گرنشتاین تصویری از گزاره ۶.۱.۳ نیز فراهم می شود.

در فصل چهارم مفهوم مدول شبه دوگانی C را برای مطالعه ابعاد C-انژکتیو و C-یکدست (G_C-انژکتیو و G_C-یکدست) از مدول های کوهن-مکالی نسبی برحسب ابعاد C-انژکتیو و C-یکدست (G_C-انژکتیو و G_C-یکدست) از مدول های کوهمولوژی موضعی آنها، بکار می گیریم. بعلاوه برای حلقه های گرنشتاین و مدول های دوگانی (متعارف)، مشخص سازیهایی را فراهم می کنیم. همچنین برخی از نتایج را تعمیم می دهیم و برای سوالی که اخیرا در [41] مطرح شده است، پاسخی ارائه می کنیم. این فصل به دو بخش تقسیم می شود که در بخش اول ابتدا قضیه زیر بیان می شود:

قضیه. فرض کنیم $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی و C یک R-مدول شبه دوگانی است. فرض کنیم n یک عدد صحیح نامنفی باشد بطوری که برای هر $i \neq n$، $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(M) = 0$. در این صورت گزاره های زیر برقرار هستند.

(۱) $\text{C-id}_R\, \mathrm{H}^n_{\mathfrak{a}}(M) \leq \text{C-id}_R\, M - n$.

(۲) در حالتی که $M = R$ داریم که C یک R-مدول دوگانی است اگر و تنها اگر $\text{C-id}_R\, \mathrm{H}^n_{\mathfrak{a}}(R)$ متناهی است. بعلاوه، تساویهای $\text{C-id}_R\, \mathrm{H}^n_{\mathfrak{a}}(R) = \mathrm{id}_R\, C - n = \mathrm{id}_R\, \mathrm{H}^n_{\mathfrak{a}}(C)$ برقرار هستند.

در ادامه با استفاده از قضیه بالا، مشخص سازیهایی برای حلقه های گرنشتاین و مدول های دوگانی برحسب ابعاد G_C-انژکتیو مدول های کوهمولوژی موضعی خاص بیان می شوند. همچنین نتایج [54, 2.10] و ۵.۲.۲ تعمیم داده می شوند.

در آخر این بخش، هنگامی که R یک حلقه کوهن-مکالی موضعی باشد، در قضیه ۹.۱.۴، به این سوال که "اگر آخرین مدول کوهمولوژی موضعی R-مدول شبه دوگانی C، یک R-مدول C-انژکتیو باشد، آنگاه چه اتفاقی خواهد افتاد؟" پاسخی فراهم می شود. در بخش دوم، ابتدا این نتیجه معروف که اگر حلقه موضعی R دارای یک R-مدول کوهن-مکالی ناصفر با بعد تصویری متناهی باشد، آنگاه R کوهن-مکالی است، تعمیم داده می شود. در حقیقت نشان می دهیم که اگر حلقه موضعی R دارای یک R-مدول کوهن-مکالی ناصفر با $\text{C-pd}_R(M)$ متناهی باشد که C یک R-مدول شبه دوگانی است، آنگاه R کوهن-مکالی

است. در ادامه نشان می دهیم که اگر C یک R-مدول شبه دوگانی و M یک R-مدول کوهن-مکالی با بعد n باشد، آنگاه کمییت های $\mathrm{G_C}\text{-}\mathrm{pd}_R\, M$ و $\mathrm{G_C}\text{-}\mathrm{fd}_R\, \mathrm{H}^n_{\mathfrak{m}}(M)$ بطور معادل متناهی هستند و تساوی $\mathrm{G_C}\text{-}\mathrm{fd}_R\, \mathrm{H}^n_{\mathfrak{m}}(M) = \mathrm{G_C}\text{-}\mathrm{pd}_R\, M + n$ نیز برقرار است. همچنین اثبات می کنیم که R-مدول با تولید متناهی M با بعد G_C-تصویری متناهی، کوهن-مکالی است اگر و تنها اگر $\mathrm{G_C}\text{-}\mathrm{fd}_R\, \mathrm{H}^n_{\mathfrak{m}}(M) = \mathrm{G_C}\text{-}\mathrm{pd}_R\, M + n$.

فهرست مطالب

فصل ۱

پیش نیازها

در سراسر این پایان نامه، R یک حلقه نوتری جابجایی با عنصر همانی ناصفر، $\mathfrak{a}$ یک ایده آل سره و M یک R-مدول است. برای یک ایده آل اول $\mathfrak{p}$ از R، $k(\mathfrak{p})$ نشان دهنده میدان خارج قسمتی $R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ می باشد. در حالتی که $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی باشد $\hat{M}$ نشان دهنده کمال M نسبت به $\mathfrak{m}$-ادیک است. مجموعه تمام ایده آل های اول حلقه R را با نماد $\operatorname{Spec}(R)$ نشان می دهیم و برای یک ایده آل $\mathfrak{a}$ از R، $\mathrm{V}(\mathfrak{a})$ نشان دهنده مجمو عه ایده آل های اول شامل $\mathfrak{a}$ است. مجموعه $\{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(R)\mid M_{\mathfrak{p}}\neq 0\}$ را **محمل** M می نامیم و با نماد $\operatorname{Supp}M$ نشان می دهیم. **مجموعه ایده آل های اول وابسته** به M، $\operatorname{Ass}(M)$، برابر است با

$$\{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(R)\mid \mathfrak{p}=(0:_R x)\ \text{به طوری که}\ \text{موجود است}\ x\in M \text{عضو ناصفر}\}.$$

مجموعه ایده آل های اول مینیمال M، مجموعه عناصر مینیمال $\operatorname{Supp}M$ نسبت به رابطه شمول است و با $\operatorname{Min}(M)$ نشان داده می شود. بعد کرول M، برابر بزرگترین عدد طبیعی n است که زنجیری از ایده آل های اول در $\operatorname{Supp}M$ به طول n موجود باشد. اگر چنین عددی موجود نباشد، $\dim M=\infty$ و بنابر قرارداد $\dim 0=-1$. لذا $\dim M=\max\{\dim R/\mathfrak{p}\mid \mathfrak{p}\in\operatorname{Supp}M\}$. مجموعه ایده آل های اول $\mathfrak{p}\in\operatorname{Supp}M$ که $\dim R/\mathfrak{p}=\dim M$، با نماد $\operatorname{Assh}(M)$ نشان داده می شود. R-مدول با بعد کرول متناهی M، **یکسان بعد** نامیده می شود در صورتی که $\operatorname{Min}(M)=\operatorname{Assh}(M)$.

عضو $x\in R$ را M-**منظم** می نامیم، هرگاه برای هر عضو ناصفر m از M داشته باشیم $xm\neq 0$. دنباله $x_1,\dots,x_n$ از عناصر R، یک دنباله M-منظم نامیده می شود در صورتی که x_1 یک عضو M-منظم باشد، برای هر i در فاصله $2\leq i\leq n$، x_i یک عضو $M/(x_1,\dots,x_{i-1})M$ -منظم باشد و $M\neq(x_1,\dots,x_n)M$. اگر برای ایده آل $\mathfrak{a}$ از R و R-مدول با تولید متناهی M داشته باشیم $\mathfrak{a}M\neq M$، آنگاه طول همه M-رشته های منظم ماکسیمال در $\mathfrak{a}$ با هم برابر هستند و **درجه** $\mathfrak{a}$ روی M نامیده شده و با نماد $\operatorname{grade}(\mathfrak{a},M)$ نشان داده می شود. اگر $M=\mathfrak{a}M$، آنگاه قرار می دهیم $\operatorname{grade}(\mathfrak{a},M)=\infty$. در حالتی که $(R,\mathfrak{m})$ حلقه موضعی باشد، درجه $\mathfrak{m}$ روی M **عمق** M نامیده شده و با نماد $\operatorname{depth}M$ نشان

داده می شود. در حالت کلی، اگر M با تولید متناهی نباشد، آنگاه مفهوم عمق M بصورت $\operatorname{depth} M = \inf\{i \mid \operatorname{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}, M) \neq 0\}$ تعریف می شود.

۱.۱ کوهمولوژی موضعی

در این بخش برخی تعاریف اساسی، نتایج و قضیه های معروف درباره مدول های کوهمولوژی موضعی را که در طول این پایان نامه مورد استفاده قرار می گیرند را مرور می کنیم. مرجع اصلی ما در این زمینه، کتاب برادمن و شارپ [7] و سخنرانی شنزل [46] است. کوهمولوژی موضعی یکی از ابزارهای مهم در هندسه جبری و جبر جابجایی بشمار می آید. اولین بار این مفهوم توسط گروتندیک معرفی و مورد مطالعه قرار گرفت و هارتشورن در سال ۱۹۶۷ کتابی را در این زمینه تحت عنوان کوهمولوژی موضعی [1] منتشر کرد که اساسش سخنرانی گروتندیک در دانشگاه هاروارد در سال ۱۹۶۱ بود. بنابراین از آن به بعد، کوهمولوژی موضعی تبدیل به یک ابزار موثر در زمینه هندسه جبری و جبرجابجایی شد. فرض کنیم M یک R-مدول و $\mathfrak{a}$ یک ایده آل از R باشد. در این صورت i-امین مدول کوهمولوژی موضعی از M نسبت به $\mathfrak{a}$ بصورت $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(M) = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Ext}^i_R(R/\mathfrak{a}^n, M)$ تعریف می شود. همچنین مدول های کوهمولوژی موضعی نسبت به ایده آل $\mathfrak{a}$ را می توان بوسیله تابعگون $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ که در تعریف و یادداشت زیر معرفی می شود، محاسبه کرد.

تعریف و یادداشت ۱.۱.۱. *برای هر R-مدول M، $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ نشان دهنده مجموعه عناصری از M است که توسط توانی از ایده آل $\mathfrak{a}$ صفر می شود. توجه کنیم که $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ یک زیر مدولی از M است. برای هر R-همریختی مدولی $f : M \longrightarrow N$ داریم $f(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) \subset \Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$. بنابراین نگاشت $\Gamma_{\mathfrak{a}}(f) : \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$ با ضابطه $\Gamma_{\mathfrak{a}}(f)(m) = f(m)$ یک R-همریختی است.*

لم ۲.۱.۱. *تابگون $\mathfrak{a}$-تابی $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-) : \mathcal{E}(R) \longrightarrow \mathcal{E}(R)$ دقیق چپ است. $\mathcal{E}(R)$ نشان دهنده رسته R-مدول ها است.*

تعریف ۳.۱.۱. *برای $i \in \mathbb{N}_0$، i-امین تابعگون مشتق شده راست از تابعگون $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ که با نماد $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(-)$ نشان داده می شود را i-امین تابگون کوهمولوژی موضعی نسبت به ایده آل $\mathfrak{a}$ می نامیم. مدول M را $\mathfrak{a}$-آزاد از تاب می نامیم، هرگاه $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = 0$ و همچنین M را $\mathfrak{a}$-تابی می نامیم، هرگاه $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = M$.*

ویژگی های اساسی زیر از مدول های کوهمولوژی موضعی، در طول این پایان نامه اغلب بدون هیچ اشاره و ارجاعی استفاده خواهند شد.

- [7, 1.2.3] فرض کنیم M یک R-مدول باشد. برای محاسبه $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(M)$ می توان بصورت زیر عمل کرد که ابتدا تحلیل انژکتیو زیر را برای مدول M در نظر گرفت

$$\mathcal{I}^* : 0 \xrightarrow{d^{-1}} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow I^i \xrightarrow{d^i} I^{i+1} \longrightarrow \ldots$$

[1] Local Cohomology

بنابراین R-همریختی مانند $\alpha : M \longrightarrow I^{\circ}$ موجود است بطوری که رشته زیر دقیق است.

$$\circ \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} I^{\circ} \xrightarrow{d^{\circ}} I^{1} \longrightarrow \dots \longrightarrow I^{i} \xrightarrow{d^{i}} I^{i+1} \longrightarrow \dots$$

با اثر دادن تابعگون $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ روی همبافت $\mathcal{I}^{*}$، همبافت زیر حاصل می شود

$$\Gamma_{\mathfrak{a}}(\mathcal{I}^{*}) : \circ \xrightarrow{\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^{-1})} \Gamma_{\mathfrak{a}}(I^{\circ}) \xrightarrow{\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^{\circ})} \Gamma_{\mathfrak{a}}(I^{1}) \longrightarrow \dots \longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}}(I^{i}) \xrightarrow{\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^{i})} \Gamma_{\mathfrak{a}}(I^{i+1}) \longrightarrow \dots .$$

حال i-امین همولوژی مدول، $\ker(\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^{i}))/\operatorname{Im}(\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^{i-1}))$، از این همبافت، مدول $\mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{a}}(M)$ است که تحت یکریختی مستقل از نحوه انتخاب تحلیل انژکتیو $\mathcal{I}^{*}$ برای M است.

- [7, 1.2.3] برای هر i داریم که $\mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{a}}(M) = \mathrm{H}^{i}_{\sqrt{\mathfrak{a}}}(M)$.
- [7, 2.1.7] اگر M یک R-مدول $\mathfrak{a}$-تابی باشد، آنگاه برای هر $i > \circ$ داریم $\mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{a}}(M) = \circ$.
- [7, 2.1.7(3)] برای هر $i > \circ$ داریم $\mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{a}}(M) \cong \mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{a}}(M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M))$.
- [7, 2.1.9] اگر M یک R-مدول $\mathfrak{b}$-تابی باشد، آنگاه برای هر i داریم $\mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}(M) \cong \mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{a}}(M)$.
- **رشته دقیق طولانی از مدول های کوهمولوژی موضعی.**

فرض کنیم $\circ \longrightarrow M_{1} \longrightarrow M_{2} \longrightarrow M_{3} \longrightarrow \circ$ یک رشته دقیق کوتاه از R-مدول ها و R-همریختی ها باشد. در این صورت رشته دقیق طولانی زیر موجود است.

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{a}}(M_{1}) \longrightarrow \mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{a}}(M_{2}) \longrightarrow \mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{a}}(M_{3}) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+1}_{\mathfrak{a}}(M_{1}) \longrightarrow \cdots$$

صفر شدن مدول های کوهمولوژی موضعی یکی از مسایل مهمی است که در این رابطه نتایج زیادی حاصل شده است. قضیه زیر یکی از معرف ترین این نتایج است.

قضیه ۴.۱.۱. [7, 6.1.2] (***قضیه صفر شدن گروتندیک***) *فرض کنیم M یک R-مدول و $\mathfrak{a}$ یک ایده آل از R باشد. در این صورت برای هر $i > \dim M$، $\mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{a}}(M) = \circ$* .

قضیه ۵.۱.۱. [7, 3.4.10] *برای هر $i \in \mathbb{N}_{\circ}$ و هر ایده آل $\mathfrak{a}$، تابعگون $\mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{a}}(-)$ با حد مستقیم جابجا می شود.*

قضیه ۶.۱.۱. [7, 4.2.1] (***قضیه استقلال***) *فرض کنیم $R \longrightarrow S$ یک همریختی حلقه ای، $\mathfrak{a}$ یک ایده آل از R و M یک S-مدول باشد. در این صورت برای هر i، $\mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{a}S}(M) \cong \mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{a}}(M)$* .

قضیه ۷.۱.۱. [7, 4.3.2] (***قضیه تغییر پایه یکدست***) *فرض کنیم $R \longrightarrow S$ یک همریختی حلقه ای یکدست، $\mathfrak{a}$ ایده آلی از R و M یک R-مدول باشد. در این صورت برای هر i داریم $\mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{a}S}(M \otimes_{R} S) \cong \mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{a}}(M) \otimes_{R} S$* .

در قضیه بعدی مفهوم درجه یک ایده آل بوسیله مدول های کوهمولوژی بیان می شود.

قضیه ۸.۱.۱. [7, 6.2.7] *فرض کنیم M یک R-مدول با تولید متناهی و $\mathfrak{a}$ ایده آلی از R چنان باشد که $\mathfrak{a}M \neq M$. در این صورت $\operatorname{grade}(\mathfrak{a}, M)$، دقیقا کوچکترین عدد صحیح iای است که $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(M) \neq 0$.*

قضیه ۹.۱.۱. [7, 8.2.1] (**قضیه صفر شدن لیختنبام-هارتشورن**) *فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی از بعد n و $\mathfrak{a}$ یک ایده آل سره از R باشد. در این صورت گزاره های زیر معادل هستند.*

(۱) $\mathrm{H}^n_{\mathfrak{a}}(R) = 0$.

(۲) *برای هر ایده آل اول $\mathfrak{P} \in \operatorname{Assh}\widehat{R}$ داریم که $\mathfrak{a}\widehat{R} + \mathfrak{P}$، $\widehat{\mathfrak{m}}$-اولیه نیست.*

قضیه ۱۰.۱.۱. [7, 6.1.4] (**قضیه صفر نشدنی گروتندیک**) *فرض کنیم که $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی و M مدولی ناصفر با تولید متناهی روی R باشد. در این صورت $\mathrm{H}^{\dim M}_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0$.*

قضیه ۱۱.۱.۱. [7, 7.1.2] (**قضیه ملکرسون**) *فرض کنیم M یک R-مدول $\mathfrak{a}$-تابی باشد بطوری که R-مدول $(0 :_M \mathfrak{a})$ آرتینی است. در این صورت M آرتینی است.*

ملاحظه ۱۲.۱.۱. [7, 6.1.8] *فرض کنیم $T : \mathcal{E}(R) \longrightarrow \mathcal{E}(R)$ یک تابعگون همورد و R-خطی باشد. در این صورت یک تبدیل طبیعی*

$$\theta : (-) \otimes_R T(R) \longrightarrow T(-)$$

چنان موجود است که اگر T دقیق راست باشد، آنگاه برای هر R-مدول با تولید متناهی M، θ_M یک یکریختی است.

قضیه ۱۳.۱.۱. [7, 7.1.6] *فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی و M یک R-مدول ناصفر با تولید متناهی از بعد n باشد. در این صورت $\mathrm{H}^n_{\mathfrak{a}}(M)$ یک R-مدول آرتینی است.*

قضیه ۱۴.۱.۱. [7, 7.1.3] *فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی و M یک R-مدول با تولید متناهی باشد. آنگاه برای هر $i \in \mathbb{N}_0$، $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M)$ آرتینی است.*

در زیر به برخی از نماد ها اشاره می کنیم که در طول این بحث بطور مکرر استفاده خواهد شد.

نمادگذاری و تذکر ۱۵.۱.۱. *فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی باشد. نماد $\mathrm{D}(-)$ برای نشان دادن تابعگون دقیق، پادورد و R-خطی $\operatorname{Hom}_R(-, \mathrm{E})$ از رسته $\mathcal{E}(R)$ به خودش استفاده می شود که اینجا $\mathrm{E} := \mathrm{E}_R(R/\mathfrak{m})$. برای هر R-مدول G، $\mathrm{D}(G)$ را دوگان ماتلیس G می نامیم. توجه کنیم که $\mathrm{D}(R)$ بطوری طبیعی با E یکریخت است و $\mathrm{D}(E) = \operatorname{Hom}_R(\mathrm{E}, \mathrm{E})$ همان حلقه درون ریختی های E است که اینجا ساختار R-مدولی اش را در نظر می گیریم. برای هر R-مدول G، R-همریختی طبیعی*

$$\mu_G : G \longrightarrow \mathrm{D}(\mathrm{D}(G)) = \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Hom}_R(G, \mathrm{E}), \mathrm{E})$$

را با ضابطه $(\mu_G(x))(f) = f(x)$ برای هر $x \in G$ و $f \in \mathrm{Hom}_R(G, \mathrm{E})$، در نظر می گیریم.

قضیه ۱.۱.۱۶. [7, 10.2.11] *فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی و $\mathrm{E} := \mathrm{E}(R/\mathfrak{m})$. R-همریختی طبیعی $\theta : \hat{R} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathrm{E}, \mathrm{E})$ که برای هر $\hat{r} \in R$، $\theta(r) = \hat{r} Id_{\mathrm{E}}$ یک یکریختی است. به عبارت دیگر، برای هر $f \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{E}, \mathrm{E})$، عنصر منحصر بفرد $\hat{r}_f \in \hat{R}$ موجود است بطوری که برای هر $x \in \mathrm{E}$ داریم $f(x) = \hat{r}_f x$. اکنون می توانیم قضیه دوگانی ماتلیس را بیان کنیم.*

قضیه ۱.۱.۱۷. [7, 10.2.12] (***قضیه دوگانی ماتلیس***[۲])

فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی و کامل باشد. در این صورت گزارهای زیر برقرارند.

(۱) *برای هر $f \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{E}, \mathrm{E})$، عنصر منحصر بفرد $r_f \in R$ چنان موجود است که برای هر $x \in \mathrm{E}$ داریم $f(x) = r_f x$.*

(۲) *برای هر R-مدول با تولید متناهی N، همریختی طبیعی $\mu_N : N \longrightarrow \mathrm{D}(\mathrm{D}(N))$ یک یکریختی است و $\mathrm{D}(N)$ آرتینی است.*

(۳) *برای هر R-مدول آرتینی A، همریختی طبیعی $\mu_A : A \longrightarrow \mathrm{D}(\mathrm{D}(A))$ یک یکریختی است و $\mathrm{D}(A)$ نوتری است.*

گزاره ۱.۱.۱۸. [7, 8.2.4] *فرض کنیم R یک حلقه موضعی و A یک R-مدول آرتینی باشد. در این صورت $A \otimes_R \hat{R} \cong A$ و همچنین A بعنوان $\hat{R}$-مدول، آرتینی است.*

گزاره ۱.۱.۱۹. [7, 10.2.8] *فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی باشد و قرار دهیم $\mathrm{E} = \mathrm{E}(R/\mathfrak{m})$. در این صورت R-مدول M آرتینی است اگر و تنها اگر M یکریخت با یک زیر مدول از E^t برای برخی $t \in \mathbb{N}$ باشد.*

فرض کنیم M یک R-مدول ناصفر و با تولید متناهی باشد. یادآوری می کنیم که اگر R موضعی باشد، آنگاه M **کوهن-مکالی** نامیده می شود، هرگاه $\dim M = \mathrm{depth}\, M$. در حالت کلی، هنگامی که R موضعی نباشد، M کوهن-مکالی نامیده می شود هرگاه برای هر $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}\, M$، $M_{\mathfrak{p}}$ کوهن-مکالی باشد. بعلاوه این دسته از مدول ها بوسیله مدول های کوهمولوژی موضعی مشخص سازی می شوند.

ملاحظه ۱.۱.۲۰. *فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی و M یک R-مدول با تولید متناهی ناصفر باشد. در این صورت قضیه ۱.۱.۸ ایجاب می کند که M کوهن-مکالی است اگر و تنها اگر برای هر $i < \dim M$، $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M) = 0$.*

---

[۲] Matlis Duality Theorem

مدول های کوهن-مکالی ویژگی های بسیار خوبی دارند و برای مطالعه جالب هستند. بعنوان تعمیمی از این کلاس از مدول ها، مدول هایی را در نظر می گیریم که مدول کوهمولوژی موضعی آنها برای اندیس های کمتر از بعد، متناهی مولد هستند.

تعریف ۲۱.۱.۱. *یک مدول با تولید متناهی روی یک حلقه موضعی $(R,\mathfrak{m})$، **کوهن-مکالی تعمیم یافته** نامیده می شود، هرگاه برای برخی $n\in\mathbb{N}$ و برای هر $i<\dim M$، $\mathfrak{m}^n \operatorname{H}^i_{\mathfrak{m}}(M)=0$.*

قضیه ۲۲.۱.۱. [7, 9.5.7] *فرض کنیم $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی و M یک R-مدول با تولید متناهی باشد. در این صورت گزاره های زیر برقرارند.*

(۱) *اگر M کوهن-مکالی تعمیمی یافته باشد، آنگاه برای هر $\mathfrak{p}\in \operatorname{Ass}(M)\setminus\{\mathfrak{m}\}$ داریم که $\dim R/\mathfrak{p}=\dim M$ و برای هر $\mathfrak{q}\in \operatorname{Supp}M\setminus\{\mathfrak{m}\}$، $M_{\mathfrak{q}}$ یک $R_{\mathfrak{q}}$-مدول کوهن-مکالی است.*

(۲) *بعنوان عکس (۱)، اگر*

(الف) *R تصویر همریخت یک حلقه منظم باشد،*

(ب) *برای هر $\mathfrak{p}\in \operatorname{Min}(M)$، $\dim R/\mathfrak{p}=\dim M$ و*

(ج) *برای هر $\mathfrak{q}\in \operatorname{Supp}M\setminus\{\mathfrak{m}\}$، $M_{\mathfrak{q}}$ یک $R_{\mathfrak{q}}$-مدول کوهن-مکالی باشد.*

آنگاه M یک R-مدول کوهن-مکالی تعمیم یافته است.

قضیه ۲۳.۱.۱. [7, 11.2.6] **(قضیه دوگانی موضعی[۳])** *فرض کنیم $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی که تصویر همریخت یک حلقه گرنشتاین موضعی $(S,\mathfrak{n})$ با بعد n باشد. قرار دهید $\operatorname{E}:=\operatorname{E}(R/\mathfrak{m})$ و $\operatorname{D}(-):=\operatorname{Hom}(-,\operatorname{E})$. در این صورت همریختی*

$$\phi:=(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}_0}:(\operatorname{H}^i_{\mathfrak{m}}(-))_{i\in\mathbb{N}_0}\longrightarrow(\operatorname{D}(\operatorname{Ext}^{n-i}_S(-,S)))_{i\in\mathbb{N}_0}$$

از دنباله های متصل قویا منفی از تابعگون های همورد از رسته $\mathcal{E}(R)$ به رسته $\mathcal{E}(R)$ موجود است. بعلاوه، ϕ_{iM} برای هر $i\in\mathbb{N}_0$ و هر R-مدول با تولید متناهی M یک یکریختی است. بویژه، برای هر R-مدول با تولید متناهی M و هر $i\in\mathbb{Z}$،

$$\operatorname{H}^i_{\mathfrak{m}}(M)\cong \operatorname{D}(\operatorname{Ext}^{n-i}_S(M,S)).$$

روی یک حلقه موضعی، کلاس مدول های کوهن-مکالی مشمول در کلاس مدول های است که در شرط سر صدق می کنند. برای برخی عدد صحیح نامنفی n، R-مدول با تولید متناهی M در شرط (S_n) **سر صدق** می کند، هرگاه برای هر $\mathfrak{p}\in\operatorname{Supp}M$ داشته باشیم $\operatorname{depth}M_{\mathfrak{p}}\geq\min\{n,\dim M_{\mathfrak{p}}\}$. مدول کوهن-مکالی،

[۳] Local Duality Theorem

مدولی است که در شرط (S_n) برای هر $n \geq 0$ صدق می کند. در ادامه، تعریف و برخی از ویژگی های مدول متعارف برای یک مدول را یادآوری می کنیم.

تعریف ۲۴.۱.۱. [46] *فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی و تصویر همریخت حلقه گرنشتاین موضعی $(S, \mathfrak{n})$ باشد. در این صورت برای R- مدول با تولید متناهی M قرار می دهیم*

$$K_M = \operatorname{Ext}_S^{\dim S - \dim M}(M, S)$$

و آن را مدول متعارف M می نامیم. توجه کنیم که اگر D_R همبافت دوگانی R باشد، آنگاه می توان دید که $K_M \cong \mathrm{H}^{\dim S - \dim M}(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{D}_R))$. برای اطاعات بیشتر در زمینه رسته مشتق شده به فصل ۱۰ از [53] مراجعه کنید.

لم ۲۵.۱.۱. [46, 1.9] *فرض کنیم R حلقه مفروض در ۲۴.۱.۱ و M یک R- مدول با تولید متناهی باشد. آنگاه احکام زیر برقرارند.*

(۱) *اگر برای هر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$ داشته باشیم $\dim M_{\mathfrak{p}} + \dim R/\mathfrak{p} = \dim M$، آنگاه $(K_M)_{\mathfrak{p}} \cong K_{M_{\mathfrak{p}}}$.*

(۲) *$\operatorname{Ass} K_M = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M \mid \dim R/\mathfrak{p} = \dim M\}$؛ بنابراین $\dim M = \dim K_M$.*

(۳) *K_M در شرط (S_2) صدق می کند.*

قضیه ۲۶.۱.۱. [46, 1.14] *فرض کنیم M یک R- مدول با تولید متناهی، یکسان بعد با بعد d باشد و حلقه موضعی $(R, \mathfrak{m})$ تصویر همریخت یک حلقه گرنشتاین باشد. در این صورت احکام زیر برای عدد صحیح $k \geq 1$ معادل هستند.*

(۱) *M در شرط S_k صدق می کند.*

(۲) *نگاشت طبیعی $\tau_M : M \longrightarrow K_{K_M}$ یکریختی است (برای $k = 1$ تکریختی است) و برای هر $d - k + 2 \leq n < d$ داریم $\mathrm{H}^n_{\mathfrak{m}}(K_M) = 0$.*

نمادگذاری ۲۷.۱.۱. [50, 1.5] *فرض کنیم $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b}$ ایده آل هایی از حلقه R باشند. قرار می دهیم*

$$W(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \{\, \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \mid \mathfrak{a}^n \subseteq \mathfrak{p} + \mathfrak{b} \text{ ،}n\text{ برای برخی عدد صحیح مثبت} \}.$$

برای R- مدول M، $\Gamma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(M)$ نشان دهنده زیر مدولی از M است که متشکل از عناصر ی از M با محمل در $W(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ است یعنی $\Gamma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(M) = \{\, x \in M \mid \operatorname{Supp}(Rx) \subseteq W(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})\}$.

گزاره ۱.۱.۲۸. [54, 3.1] *فرض کنیم $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b}$ ایده آل هایی از R باشند بطوری که $0 \subset \Gamma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(R) \subset R$ و $\bigcap_{i=1}^{m} \mathfrak{q}_i = (0)$ یک تجزیه غیر زائد برای ایده آل صفر از حلقه R باشد. آنگاه داریم*

$$\Gamma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(R) = \bigcap_{\sqrt{\mathfrak{q}_i} \notin W(\mathfrak{a},\mathfrak{b})} \mathfrak{q}_i.$$

قضیه ۱.۱.۲۹. [50, 5.11] *فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی، کامل و M یک R-مدول با تولید متناهی از بعد n باشد. در این صورت*

$$\mathrm{Hom}_R(\mathrm{H}^n_{\mathfrak{a}}(M), \mathrm{E}(R/\mathfrak{m})) \cong \Gamma_{\mathfrak{m},\mathfrak{a}}(K_M).$$

گزاره ۱.۱.۳۰. [33, 4.2] *فرض کنیم M و N مدول هایی روی حلقه R باشند بطوری که M یک R-مدول $\mathfrak{m}$-تابی است. آنگاه برای هر $i > 0$، یکریختی های R-مدولی زیر موجود هستند.*

$$\mathrm{Ext}^i_R(M, N) \cong \mathrm{Ext}^i_R(M, N \otimes_R \hat{R}) \cong \mathrm{Ext}^i_{\hat{R}}(M, N \otimes_R \hat{R}).$$

قضیه ۱.۱.۳۱. [33, 4.3] *فرض کنیم A و M، R-مدول هایی باشند که A آرتینی و M مینی-ماکس است، یعنی M دارای زیر مدولی نوتری است بطوری که M/N آرتینی است. آنگاه، برای هر $i > 0$ داریم*

$$\mathrm{Ext}^i_R(A, M) \cong \mathrm{Ext}^i_{\hat{R}}(\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{E}(R/\mathfrak{m})), \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{E}(R/\mathfrak{m}))).$$

مطالعه بعد کوهمولوژیکی و ارتباطش با ورایته های جبری منجر به بوجود آمدن نتایج و مسائل جالبی در جبر موضعی شده است.

تعریف ۱.۱.۳۲. *برای R-مدول M، بعد کوهمولوژیکی M نسبت به یک ایده آل $\mathfrak{a}$ از حلقه R بصورت زیر تعریف می شود.*

$$\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M) = \sup\{i \in \mathbb{Z} \mid \mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(M) \neq 0\}.$$

قضیه ۱.۱.۳۳. [11, 2.2] *فرض کنیم $\mathfrak{a}$ یک ایده آل از حلقه R باشد و فرض کنیم M و N مدول هایی با تولید متناهی روی R باشند بطوری که $\mathrm{Supp}(N) \subseteq \mathrm{Supp}(M)$. در این صورت $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, N) \leq \mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M)$.*

در ادامه، برخی از ویژگی های معروف مفهوم بعد کوهمولوژیکی را گردآوری می کنیم. یادآوری می کنیم که ارتفاع یک ایده آل $\mathfrak{a}$ نسبت به یک مدول با تولید متناهی M که در شرط $M \neq \mathfrak{a}M$ صدق می کند، بصورت $\mathrm{ht}_M\, \mathfrak{a} = \min\{\dim M_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{V}(\mathfrak{a})\}$ تعریف می شود.

گزاره ۱.۱.۳۴. [11, 2.1] *فرض کنیم $\mathfrak{a}$ یک ایده آل از حلقه R باشد. در این صورت گزاره های زیر برقرار هستند.*

(۱) *برای هر R-مدول با تولید متناهی M، $\mathrm{ht}_M\, \mathfrak{a} \leq \mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M) \leq \dim M$.*