بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر - بخش ریاضی

پایان‌نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی

تحت عنوان :

نظریه کنترل H^∞

مؤلف :

نگار کرباسچی

استاد راهنما :

دکتر مهدی رجبعلی‌پور

شهریور ۱۳۷۸

بسمه تعالی

این رساله

به عنوان یکی از شرایط احراز درجه کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی ـ دانشکده ریاضی و کامپیوتر
دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی‌شود.

دانشجو : نگار کرباسچی

استاد راهنما: دکتر مهدی رجبعلی‌پور

داور ۱ : دکتر عباس سالمی

داور ۲ : دکتر محمود محسنی مقدم

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه: آقای دکتر ناصح‌زاده

تقدیم به

پدر و مادرم که وجودشان

همچو شمعی روشنی‌بخش راه زندگیم می‌باشند

و تقدیم به تمامی پویندگان راه علم و تقوا

تشکر و قدردانی

حمد و سپاس ایزد تعالی که توفیق کسب علم عنایت فرمود. بر خود لازم می‌دانم از اساتید محترم و دوستان عزیز که مرا در این راه یاری نموده‌اند تشکر و قدردانی نمایم بالاخص از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر رجبعلی‌پور که در این پایان‌نامه از راهنماییهای ارزشمند ایشان استفادهٔ فراوان برده‌ام صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایم. همچنین از اساتید داور محترم، جناب آقای دکتر محسنی مقدم و جناب آقای دکتر سالمی که با قبول زحمت و حضور در جلسهٔ دفاعیه از نظرات سازندهٔ ایشان سود جستم تشکر و قدردانی نمایم. به علاوه از جناب آقای مهندس سماوات و جناب آقای مهندس مومنانی که با راهنمایی‌های ارزندهٔ خود راهگشای مشکلاتی چند از این پایان‌نامه بوده‌اند کمال تشکر را دارم.

از کلیهٔ اساتید و اعضای بخش ریاضی دانشگاه شهید باهنر کرمان که در مقطع کارشناسی ارشد از محضر آنها بهره‌مند شده‌ام، همچنین از جناب آقای دکتر ناصح زاده نمایندهٔ محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه سپاسگذارم.

از کلیهٔ دوستانی که به نحوی یاری‌ام نموده‌اند به خصوص از سرکار خانم باقری، خانم مانی و خانم پورافغان که مرا مرهون لطف و محبت خود قرار داده‌اند، سپاسگذارم و در آخر از زحمات کلیهٔ اساتید گروه ریاضی دانشگاه اصفهـــان به خصوص جناب آقای دکتر دانایی که سخنان ارزشمنـد ایشـان همواره مشوق من برای تحصیل بـوده و هسـت و همچنین از سرپرست کتابخـانـهٔ گـروه ریاضـی سرکار خانم خیام و سرکار خانم پورحسینی و سرکار خانم مـوری که زحمت تایپ این پایان‌نامه را کشیده‌اند کمال تشکر را دارم.

نگار کرباسچی

۱۳۷۸

چکیده

هدف در مسائل کنترل H^∞ این است که با توجه به شرط پایداری درونی، مقدار هزینهٔ سیستم مورد بحث را بهینه کند. در نظریهٔ خطی H^∞ ، میزان هزینهٔ $P(\varepsilon)$ برای نگاشت ورودی ـ خروجی H به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P_H(\sum) := \sup\{\|H(u)\| : u \in L_e^2[0, +\infty), \|u\| \leq 1\}$$

در مقدمه به تعاریف و قضایای اساسی مورد استفاده در سایر فصول پایان‌نامه می‌پردازیم.

در فصل اول با حالت کلی تابع انتقال در سیستم‌های بازخورد آشنا شده، به بیان خصوصیات مهم این تابع شامل خصوصیت علیت، پایانی زمانی و پایداری می‌پردازیم و از پایداری تابع انتقال نتیجه می‌گیریم که روی نیم‌صفحهٔ راست صفحهٔ مختلط تحلیلی می‌باشد.

در فصل دوم به بررسی سیستم‌هایی با یک ورودی و یک خروجی پرداخته، جبران‌کننده‌های یک چنین سیستمهایی را با استفاده از یک پارامتر آزاد Q که تابعی پایدار و سره می‌باشد پارامتری می‌کنیم.

در فصل سوم سیستمهایی را در نظر می‌گیریم که دارای چند ورودی و چند خروجی می‌باشند. با تعریف فضای حالت یک چنین سیستم‌هایی و استفاده از آن در اثبات چند لم، به پارامتری کردن جبران‌کننده‌های این سیستمها با استفاده از پارامتر آزاد Q می‌پردازیم.

در فصل چهارم، به سراغ سیستم‌های غیرخطی و متغیر با زمان رفته، با اضافه کردن چند شرط چنین سیستم‌هایی را تجزیهٔ راست و تجزیهٔ راست نرمال می‌کنیم. همچنین به مقایسهٔ ارتباط پایداری بین چند سیستم مختلف می‌پردازیم.

در فصل پنجم، ابتدا به بیان تجزیهٔ کانونی و طیفی پرداخته، با استفاده از آنها تجزیهٔ مهم داخلی ـ خارجی را بیان می‌کنیم و از این تجزیه کمک گرفته، تحت یک قضیه نشان می‌دهیم که در سیستم‌های خطی کارایی جبران‌کننده‌های خطی و غیرخطی یکسان است.

فهرست

فصل صفر

مقدمـــه

این فصل به تعاریف و قضایای عمومی مورد نیاز در فصلهای دیگر اختصاص یافته است. تقریباً تمامی مفاهیم این فصل پیشنیازی برای مطالعهٔ هر یک از فصلهای دیگر است.

بسط نظریهٔ سیستم‌های بازخورد نخستین بار در سال ۱۹۳۲ مطرح گردید. صاحبنظران پاسخ سیستم‌های مدار باز تغییرات سینوسی را مورد مطالعه قرار داده و براساس آن، پایداری سیستم‌های مداربسته را استنتاج کردند.

مفهوم کنترل معمولاً با مهندسی برق، مکانیک و شیمی سروکار دارد. در بیشتر موارد فقط روشهای طراحی مربوط به عملکرد حالت پایدار مورد استفاده قرار می‌گیرد. سیستمی که با استفاده از این روشها طرح می‌شود فقط در وضعیت‌های ایده‌آل، یعنی فقط به لحاظ نظری دارای خصوصیات مطلوب خواهد بود. چرا که اولاً فنون طراحی دقیق نیستند و معمولاً براساس فرمول‌های تجربی ساده شده قرار دارند، دیگر اینکه از اغتشاشات مؤثر بر سیستم صرفنظر می‌شود و دلیل سوم آن، تغییر مواد خام به کار رفته در فرایند است. در عمل این عوامل موجب می‌شوند که خصوصیات محصول تولیدشده با خصوصیات مطلوب تفاوت و اصطلاحاً نسبت به آن خطا داشته باشد. در بسیاری از این موارد این امر سبب می‌شود که مصرف کننده محصول را رد کند. برای کم کردن تفاوت خصوصیات محصول با

خصوصیات مطلوب و تولید محصولی با خصوصیات مورد نظر لازم است که نوعی کنترل باز خور به کاربرده شود. کنترل باز خور خطای موجود بین عملکرد مطلوب و عملکرد واقعی را اندازه می‌گیرد و این خطا را به نحوی تقویت می‌کند و با استفاده از خطای تقویت شده، خطای سیستم را کاهش می‌دهد.
طرز کار تمام سیستمهای مدار بسته چنین است؛ با استفاده از خروجی یا خطای خروجی، ورودی به نحوی تغییر داده می‌شود که خطا به صفر برسد. یک سیستم مدار بسته در صورتی که به طور صحیح طراحی شده باشد می‌تواند علی‌رغم اغتشاشات و تغییرات پارامترهای سیستم، فشار را به طور پیوسته برابر مقدار تعیین شده در طراحی نگه دارد. این گونه سیستمها در صنعت برای برابر نگه‌داشتن متغیرهای معین با مقادیر مشخص شده در طراحی به طور وسیع مورد استفاده قرار می‌گیرند.
نقص عمدهٔ سیستمهای کنترل مدار بسته (جدا از هزینه و پیچیدگی) اینست که اگر سیستم کنترل به طور صحیح طراحی نشده باشد، ممکن است عملکرد ناپایداری داشته باشد. منشاء ناپایداری احتمالی اینست که سیستمی که کنترل میشود، لختی دارد. یعنی یک تاخیر زمانی بین علت و معلول وجود دارد که طراحی ناصحیح سیستم کنترل سبب ناپایدار شدن سیستم می‌شود.
بنابراین به طور خلاصه هدف از طراحی و ساخت سیستمهای کنترل مدار بسته، این است که علی‌رغم وجود اغتشاشات، سیگنال یا ورودی $r(t)$ به خروجی منتقل شود بدون اینکه خطا از حد مجاز تجاوز کند.

در واقع مطلوب‌ترین پاسخ آن است که در تمام مدت نتیجه سیستم همانند ورودی باشد امّا به علت ماهیت سیستمهای دینامیکی این کار ممکن نیست. معیارهای اصلی کارکرد صحیح سیستم کنترل چنین‌اند.

الف) سیستم باید مطلقاً پایدار باشد، یعنی پس از تحریک پاسخ آن پس از مدت زمان معقول به مقدار پایدار برسد و نوسانهای پیوسته و با دامنهٔ در حال افزایش از خروجی مشاهده نشود.

ب) سیستم در حالت دائمی باید دقیق باشد، یعنی به ازای $t = \infty$ خروجی $x(t)$ باید برابر ورودی $r(t)$ باشد.

پ) پاسخ حالت گذاری سیستم باید مناسب باشد به گونه‌ای که خروجی در تمام مدت عملکرد حتی وقتی که اغتشاش وجود دارد از ورودی متابعت کند، به عبارت دیگر سیستم باید دقت و دینامیک

مناسبی داشته و نسبتاً پایدار باشد. بحث‌های اصلی سیستم کنترل را می‌توان چنین بر شمرد:

۱) اهداف کنترل.

۲) اجزای سیستم کنترل.

۳)نتایج.

اهداف را ورودیها یا سیگنال‌های کارانداز و نتایج را خروجیها یا متغیرهای کنترل شونده می‌نامند.

انواع سیستمهای کنترل بازخوردی

سیستمهای کنترل بازخوردی را می‌توان بسته به اهداف مورد نظر به شیوه‌های مختلف طبقه بندی کرد. مثلاً بسته به روش تحلیلی و طراحی، طبقه بندی سیستمهای کنترل چنین‌اند: خطی یا غیر خطی، متغیر بازمان یا نامتغیر بازمان.

سیستمهای کنترل خطی و غیرخطی

این نوع طبقه‌بندی براساس روشهای تحلیلی و طراحی صورت می‌گیرد. بیان دقیق سیستمهای خطی در عمل وجود ندارند زیرا همهٔ سیستمهای واقعی تا حدودی غیرخطی‌اند. سیستمهای کنترل بازخورد خطی، مدلهای ایده‌آلی هستند که تحلیل‌گر آنها را صرفاً به خاطر سهولت تحلیل و طراحی می‌کند. چنانچه مقدار سیگنال ها در یک سیستم محدود به مقادیری شود که در گسترهٔ این مقادیر اجرای سیستم رفتاری خطی داشته باشند، سیستم اساساً خطی است. اما چنانچه مقدار سیگنال‌ها فراتر ازگسترهٔ عمل خطی برود، بسته به شدت غیرخطی بودن، دیگر نباید سیستم را خطی در نظر گرفت. غالباً مشخصه‌های غیرخطی عمداً وارد سیستم کنترل می‌شوند تا عملکرد آن را بهبود ببخشند یا کنترل مؤثرتر صورت بگیرد.

حال به بیان یک سری تعاریف مقدماتی که در طول پایان‌نامه به آنها نیاز پیدا می‌کنیم، می‌پردازیم.

۱-۰ تبدیل لاپـــلاس

چنانچه تابع حقیقی $f(t)$ ، شرط

$$\int_{\circ}^{\infty} | f(t)e^{-\sigma_\circ t} | dt < \infty$$

را به ازای $\sigma_\circ$ ای حقیقی و متناهی برآورد آنگاه، تبدیل لاپلاس $f(t)$ چنین تعریف می‌شود:

$$F(s) = \int_{\circ}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

و یا

$$F(s) = (f(t)\text{تبدیل لاپلاس}) = \mathcal{L}(f(t)).$$

متغیـــر s مختلط اســـت، و $s = \sigma + j\omega$ که در آن $\sigma \geq \sigma_\circ$ و $j = \sqrt{-1}$. معـادلـهٔ تعریـف کننـــدهٔ فوق را تبدیل لاپلاس یک طـرفـه نیـز می‌نامنـد، زیـرا انتگرالگیـری از $t = \circ$ تا $t = \infty$ محاسبـه می‌شـود. معنی سـادهٔ این مطلب این است که همـهٔ اطلاعـات موجـود در $f(t)$ قبل از $t = \circ$ نادیـده یا صفـر در نظر گرفته می‌شود. این فرض محدودیتی بـرای کاربـرد تبـدیل لاپلاس در مـورد مسائل سیستمهای خطی ایجاد نمی‌کند، زیرا در بررسیهـای حـوزه ـ زمـانی معمـول، مبنای زمان لحظهٔ $t = \circ$ انتخاب می‌شود. وانگهی وقتی در یک سیستم فیزیکی ورودی در $t = \circ$ اعمال شود، پاسخ زودتر از $t = \circ$ آغاز نمی‌شود. یعنی پاسخ بر تحریک تقدم ندارد. این نوع سیستم را سیستم عِلّی گویند. در مورد یک چنین سیستمهایی در آینده مفصل‌تر بحث خواهیم نمود.

مثال ۰-۱-۱: فرض کنید $f(t)$ یک تابع پله‌ای واحد باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{cases} f(t) = U_s(t) = 1 & t > \circ \\ = \circ & t < \circ \end{cases}$$

تبدیل لاپلاس $f(t)$ چنین به دست می‌آید:

$$F(s) = \mathcal{L}[U_s(t)] = \int_{\circ}^{\infty} U_s(t)e^{-st}dt = \frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{\circ}^{\infty} = \frac{1}{s}.$$

معادلهٔ فوق در صورتی معتبر است که

$$\int_{0}^{\infty} | U_s(t)e^{-\sigma t} | \, dt < \infty.$$

این شرط به این معنی است که قسمت حقیقی s، یعنی σ باید بزرگتر از صفر باشد. عملاً ما تبدیل لاپلاس تابع پله‌ایِ واحد را همان $\frac{1}{s}$ در نظر می‌گیریم.

تعریف ۰ـ۱ـ۲: تبدیل معکوس لاپلاس. عمل به دست آوردن $f(t)$ از تبدیل لاپلاس $F(s)$ را تبدیل معکوس لاپلاس می‌نامند و چنین نشان می‌دهند:

$$F(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)].$$

تبدیل معکوس لاپلاس عبارت است از

$$F(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}ds$$

که در این معادله c ثابتی حقیقی و بزرگتر از قسمتهای حقیقی همهٔ تکینه‌های $F(s)$ است.

قضیه ۰ـ۱ـ۳: اگـــر $F_1(s)$ و $F_2(s)$ به ترتیـب تبـدیل‌هـای لاپـــلاس $f_1(t)$ و $f_2(t)$ باشنـــد و بـــه‌ازای $t < 0$، $f_1(t) = f_2(t) = 0$ ، آنگاه

$$F_1(s).F_2(s) = \mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \mathcal{L}[\int_{0}^{t} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau]$$
$$\mathcal{L}[\int_{0}^{t} f_2(\tau)f_1(t-\tau)d\tau]$$

که در آن نماد $*$ ، کانولوشن در حوزهٔ زمان را نشان می‌دهد.

اثبات:

$$F_1(s).F_2(s) = [\int_{0}^{\infty} e^{-st}f_1(t)dt].[\int_{0}^{\infty} e^{-s\tau}f_2(\tau)d\tau] = \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-s(t+\tau)}f_1(t)f_2(\tau)dtd\tau$$

$$= \int_{0}^{\infty}[\int_{0}^{\infty} e^{-s(t+\tau)}f_1(t)dt]f_2(\tau)d\tau.$$

در اینجا انتگرالگیری روی ربع اول $(\tau \geq 0, t \geq 0)$ صفحهٔ $t\tau$ انجام می‌شود. حال در انتگرال درونیِ آخرین فرمول، متغیر جدید x را توسط رابطهٔ $t = x - \tau$ وارد می‌کنیم که در آن τ ثابت بوده و لذا $dt = dx$. در نتیجه

$$F_1(s).F_2(s) = \int_0^\infty [\int_t^\infty e^{-sx} f_1(x-\tau)dx] f_2(\tau)d\tau$$

$$= \int_0^\infty \int_t^\infty e^{-sx} f_1(x-\tau) f_2(\tau) dx d\tau.$$

در این انتگرالگیری، میدان انتگرالگیری نیمهٔ اول ربع‌اول $(x - \tau \geq 0)$ از صفحهٔ $x\tau$ است و هرگاه ترتیب انتگرالگیری را عوض کنیم، می‌بینیم که

$$F_1(s).F_2(s) = \int_0^\infty [\int_0^x e^{-sx} f_1(x-\tau) f_2(\tau)d\tau]dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-sx}[\int_0^x f_1(x-\tau)f_2(\tau)d\tau]dx = \mathcal{L}[\int_0^x f_1(x-\tau)f_2(\tau)d\tau].\square$$

مثال ۰-۱-۴: فرض کنید:

$$L[x] = \frac{1}{s^2} \quad , \quad L[\sin x] = \frac{1}{s^2+1}$$

در این صورت.

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2(s^2+1)}] = \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2}(\frac{1}{s^2+1})] = \int_0^x (x-t)\sin t dt = x - \sin x.$$

۰-۲ قطب‌های تابـــع

اگر تابع $G(s)$ در همسایگی S_i تحلیلی و تک مقدار باشد، گوئیم قطبی از مرتبهٔ r در $s = s_i$ وجود دارد، چنانچه

$$0 < \lim[(s-s_i)^r G(s)] < \infty$$

باشـــد.

۰-۳ فضای هیلبرت

فرض کنید H یک فضای برداری با ضرب داخلی باشد. هرگاه این فضا با ضرب داخلی نسبت به نرم متناظر تام باشد، یعنی هر دنبالهٔ کشی در H یک دنبالهٔ همگرا باشد، آنگاه H یک فضای هیلبرت [۱] نام دارد.

تعریف ۰-۳-۱: فرض کنید f یک تابع اندازه‌پذیر مختلط بر $[0, +\infty)$ باشد. تعریف می‌کنیم

$$\|f\|_2 = \left\{\int_0^\infty |f|^2\, dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

و $L^2[0, +\infty)$ متشکل از تمام f هایی‌که $\|f\|_2 < \infty$. مجموعهٔ کلیهٔ تابع‌های $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ که برای هر $a > 0$ شرط

$$\int_0^a |f|^2\, dx < \infty$$

برقرار باشد، با نماد $L_e^2[0 + \infty)$ نمایش داده می‌شود.

قضیه ۰-۳-۲: فضای $L^2[0, +\infty)$ یک فضای هیلبرت است.

برای اثبات قضیه فوق به [۱۳ ص ۸۸] مراجعه کنید.

۰-۴ ماتریس‌های بلوکی

تعریف ۰-۴-۱: اگر A یک عملگر خطی از V به V باشد، آنگاه زیرفضای M از V را یک زیرفضای پایا برای A گویند اگر $AM \subset M$.

تعریف ۰-۴-۲: اگر A یک عملگر خطی روی فضای هیلبرت V و M و $M^\perp$ تحت A پایا باشند، آنگاه M را یک زیرفضای پایای تحویلی برای A نامند که درآن $M^\perp = \{y : (y,x) = 0 \quad \forall x \in M\}$.

1) Hilbert

تعریف ۰ـ۴ـ۳: ماتریس بلوکی زیر را در نظر بگیرید

$$A = \begin{bmatrix} M & N \\ P & Q \end{bmatrix}$$

که در آن هر بلوک یک تبدیل است، یعنی M یک تبدیل از فضای V_1 به W_1 و N یک تبدیل از V_2 به W_1 است و P یک تبدیل از V_1 به W_2 و Q یک تبدیل از V_2 به W_2 است. در این صورت A را تبدیلی از $V_1 \oplus V_2$ به $W_1 \oplus W_2$ می‌گیریم که اثر آن بر هر بردار x_1 در V_1 برابر $Mx_1 + Px_1$ و بر هر بردار x_2 در V_2 برابر $Nx_2 + Qx_2$ می‌باشد؛ در حقیقت اگر $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ نمودار ستونی بردار $x = x_1 \oplus x_2$ باشد آنگاه می‌توان همانند آنچه در جبر خطی معمول است Ax را به صورت زیر به دست آورد:

$$Ax = \begin{bmatrix} M & N \\ P & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Mx_1 & +Nx_2 \\ Px_1 & +Qx_2 \end{bmatrix}.$$

حال تبدیل‌های

$$P_{W_1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} W_1 & W_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} W_1 \\ W_2 \end{array} \qquad P_{W_2} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} W_1 & W_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} W_1 \\ W_2 \end{array}$$

تصاویر H بر فضاهای W_1 و W_2 را تعریف می‌کنند.

قضیه ۰ـ۴ـ۴: فرض کنید A ماتریس بلوکی در تعریف قبلی باشد. ماتریس الحاقی A به صورت زیر است:

$$A^* = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} W_1 & W_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} M^* & P^* \\ N^* & Q^* \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \end{array}$$

مشروط بر آن که W_1 بر W_2 و همچنین V_1 بر V_2 عمود باشد.

اثبات: بنابر تعریف بایستی ثابت کنیم که اگر $y \in W = W_1 \oplus W_2$ و $x \in V = V_1 \oplus V_2$ ، آنگاه $(Ax, y) = (x, A^*y)$. فرض کنید $y = y_1 \oplus y_2$ و $x = x_1 \oplus x_2$. آنگاه

$$Ax = \begin{bmatrix} M & N \\ P & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Mx_1 & +Nx_2 \\ Px_1 & +Qx_2 \end{bmatrix} = (Mx_1 + Nx_2) \oplus (Px_1 + Qx_2).$$