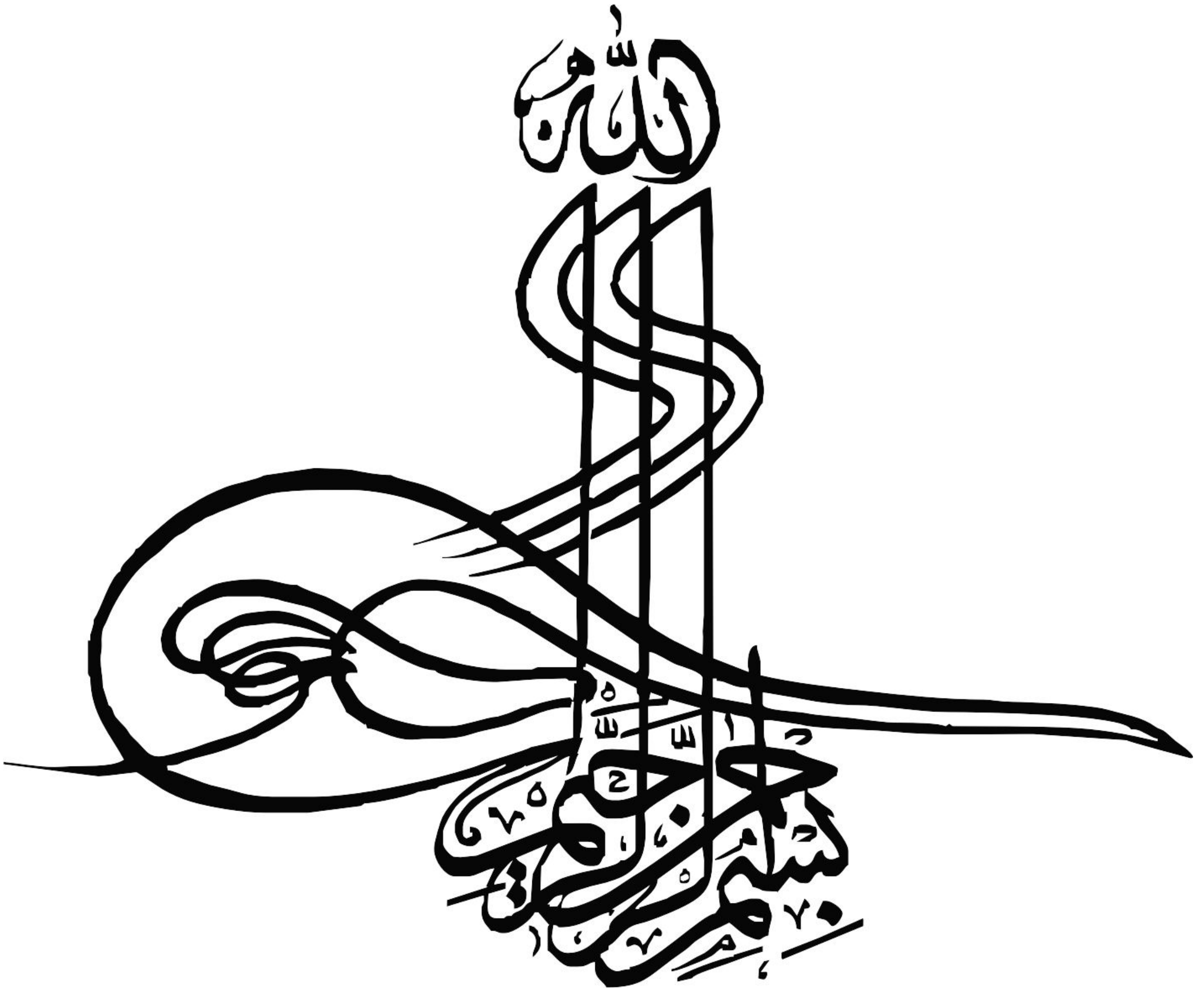
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی

(گرایش محض)

عنوان :

روش ساده‌ترین معادلات برای مطالعه معادله شرودینگر غیر خطی آشفته با قانون غیر خطی کر

از:

منوّر بدری کوهی

استاد راهنما:

دکتر نصیر تقی زاده

استاد مشاور:

دکتر مژگان اکبری

بهمن ۱۳۹۳

با درود و سپاس بر خداوند بزرگ که هرچه دارم از اوست. شایسته است از استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر نصیر تقی زاده و استاد مشاور عزیزم خانم دکتر مژگان اکبری و اساتیدی که قبول زحمت کرده و داوری این اثر را به عهده گرفته اند، سپاس گزاری کنم.

تقدیم به:

مادر مهربان و خانواده بسیار عزیزم که همواره حامیم هستند.

استاد گرانقدر و عزیزم که از هیچ تلاشی برای پیشرفتم مضایقه نکرد.

دوستان بهتر از جانم که همیشه مدیون محبتشان می باشم.

فهرست مطالب

چکیده:

روش ساده‌ترین معادلات برای مطالعه معادله شرودینگر غیرخطی آشفته با قانون غیرخطی کر

منوّر بدری کوهی

روش ساده‌ترین معادلات یک روش حل قوی برای به‌دست آوردن جواب دقیق تکاملی معادلات غیرخطی است. در این پایان‌نامه روش ساده‌ترین معادلات برای پیدا کردن جواب دقیق معادله شرودینگر غیرخطی و معادله شرودینگر غیرخطی آشفته با قانون غیرخطی کر بررسی می‌شود و این نشان می‌دهد روش ارائه شده روشی موثر و عمومی می‌باشد.

کلید واژه:
روش ساده‌ترین معادلات، معادله شرودینگر غیرخطی، معادله شرودینگر غیرخطی آشفته با قانون غیرخطی کر

Abstract:

The simplest equation method to study perturbed nonlinear Schrödinger's equation with Kerr law nonlinearity

Monavvar Badrikouhi

The simplest equation method is a powerful solution method for obtaining exact solutions of nonlinear evolution equations.
In this paper, the simplest equation method is used to construct exact solutions of nonlinear Schrödinger's equation and perturbed nonlinear Schrödinger's equation with kerr law nonlinearity. It is shown that the proposed method is effective and general.

Key words:
The simplest equation method, Nonlinear Schrödinger's equation, Perturbed nonlinear Schrödinger's equation with kerr law nonlinearity.

پیشگفتار: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی از مباحث مهم در علوم ریاضی و فیزیک می‌باشند. در گذشته برای حل هر معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی روشی خاص با تغییر متغیرهای خاصی ارائه می‌شد که کاری بسیار پیچیده و وقت گیر بود اما اخیراً روش‌های مختلفی برای به‌دست آوردن جواب دقیق معادلات غیرخطی مطرح شده است. روش های متنوعی از قبیل روش ساده‌ترین معادلات [۱] [۱۳، ۱۲]، روش تانژانت هایپربولیک [۲] [۲۰، ۱۴] ، روش ضرب تابع نمایی[۳] [۱۸] ، روش انتقال بکلاند [۴] [۲۳] ، روش مستقیم هیروتا [۵] [۱۰، ۹] ، روش توابع گویای انتقال یافته [۶] [۱۹] و . . .

روش ساده‌ترین معادلات یک تکنیک بسیار قدرتمند برای به دست آوردن جواب دقیق معادلات دیفرانسیل غیرخطی [۷] است. ایده اصلی این روش توسط کودریاشف [۸] [۱۳، ۱۲] در سال ۲۰۰۵ میلادی برای پیدا کردن جواب دقیق معادله‌ی فیشر و بررسی جواب‌های دقیق برخی از معادلات غیرخطی بیان شد. در سال ۲۰۱۰ میلادی توسط ویتانوو [۹] و دمیتروا [۱۰] [۲۹، ۲۸] برای به‌دست آوردن جواب دقیق موج سیار دو نوع از نمونه‌های معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی [۱۱] اکولوژی و دینامیک جمعیت به‌کار برده شد و در سال ۲۰۱۲ دکتر تقی‌زاده و دکتر میرزازاده طی پژوهشی ارزنده از این روش برای مطالعه و بررسی معادله‌ی شرودینگر غیرخطی آشفته با قانون غیر خطی کر [۱۲] استفاده کردند. این پایان‌نامه براساس مقاله‌ی[۲۵] تنظیم گشته و از پنج فصل تشکیل شده است.

در فصل اول تعریف‌های مقدماتی مورد نیاز پایان‌نامه مطرح می‌شود. در فصل دوم به شرح روش ساده‌ترین معادلات می‌پردازیم، سپس برای درک بهتر این روش، جواب دقیق معادله‌ی شرودینگر غیرخطی [۱۳] و معادله‌ی شرودینگر غیرخطی آشفته با قانون غیرخطی کر را با استفاده از آن محاسبه می کنیم و در ادامه مثال‌های بیشتری را ارائه می‌دهیم.

در فصل سوم به شرح روش اصلاح شده‌ی بسط $\frac{G'}{G}$ گسترش یافته می‌پردازیم و جواب معادله‌ی شرودینگر غیرخطی آشفته با قانون غیرخطی کر را با این روش محاسبه می کنیم.

[۱] The simplest equation method [۲] The tanh method [۳] The multiple exp-function method [۴] The Backlund transformation method [۵] The Hirota direct method [۶] The transformed rational method [۷] The Nonlinear differential equation [۸] Kudryashov [۹] Vitanov [۱۰] Dimitrova [۱۱] partial differential equation [۱۲] The perturbed nonlinear Schrödinger's equation with kerr law nonlinearity [۱۳] nonlinear Schrödinger's equation $(NLSE)$

در فصل چهارم به شرح روش انتگرال اول می‌پردازیم و جواب معادله‌ی شرودینگر غیرخطی آشفته با قانون غیرخطی کر را با این روش محاسبه می‌کنیم.

در فصل پنجم با توجه به جواب‌های به‌دست آمده برای معادله‌ی شرودینگر غیرخطی آشفته با قانون غیرخطی کر به کمک روش‌های بیان شده به مقایسه‌ی جواب‌های به‌دست آمده از این روش‌ها می‌پردازیم.

فصل ۱

تعاریف و مطالب پیش نیاز

۱ - ۱ تعاریف اولیه

تعریف ۱ - ۱ - ۱ . معادله دیفرانسیل معمولی و معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی: در هر پدیده و فرآیندی در طبیعت، پارامترها و متغیرهای مختلفی وجود دارد که مطابق قوانین حاکم بر پدیده با یکدیگر در ارتباط هستند. بیان این ارتباط به زبان ریاضی یک معادله‌ی تابعی است و معادله‌ی تابعی حاصل از پدیده‌ای که در آن آهنگ تغییرات یک تابع نسبت به یک یا چند متغیر مستقل مطالعه شود، معادله‌ی دیفرانسیل[۱]نامیده می‌شود. لذا حل این دسته از معادلات از اهمیت بسیاری برخوردار می‌باشد. معادله‌ای را که شامل یک متغیر مستقل با یک متغیر وابسته و مشتقات جزئی آن باشد، معادله دیفرانسیل معمولی [۲] و معادله‌ای را که متشکل از یک تابع مجهول، با بیش از یک متغیر مستقل و مشتقات جزئی آن باشد، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی [۳] می‌نامند .

نظریه‌ی معادلات دیفرانسیل شاخه‌ای از آنالیز ریاضی است که اساس فیزیک نظری را تشکیل می‌دهد و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی جالب‌ترین بخش این نظریه است. اوایل قرن هجدهم دالامبر [۴] مسئله‌ی تار مرتعش رامطرح کرد و اولین معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را به‌دست آورد. در واقع می‌توان وی را پدیدآورنده نظریه‌ی معادلات دیفرانسیل دانست. برای مثال معادله‌ی (۱ - ۱) یک معادله دیفرانسیل معمولی و معادله‌ی (۱ - ۲) یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی است .

$$x^{۲}u' - ۲xu'' + ۱ = ۰, \tag{۱-۱}$$

$$yu_{xx} + xu_{yy} + ۳u_t = ۴x + ۱. \tag{۱-۲}$$

تعریف ۱ - ۱ - ۲. معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی و غیرخطی: در حالت کلی یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی با متغیرهای مستقل x_k $(k = ۱, ۲, \ldots, n)$ و متغیر وابسته‌ی u به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(x_۱, x_۲, \ldots, x_n, u, u_{x_۱}, u_{x_۲}, \ldots, u_{x_n}, u_{x_۱x_۱}, u_{x_۱x_۲}, \ldots, u_{x_۱x_n}, \ldots) = ۰,$$

که $u = u(x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$ و

$$u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \qquad u_{x_ix_j} = \frac{\partial^{۲} u}{\partial x_i \partial x_j}, \qquad ۱ \leqslant i, j \leqslant n$$

- اگر F برحسب u و مشتقات آن به‌صورت خطی در معادله ظاهر شود، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را خطی می‌نامند.

- اگر F برحسب u و مشتقات آن به‌صورت غیرخطی در معادله ظاهر شود، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را غیرخطی می‌نامند.

[۱] Differential Equation [۲] Ordinary Differential Equation (ODE) [۳] Partial Differential Equation (PDE)
[۴] Dalembert

برای مثال معادله‌ی (۱-۳) یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی و معادله‌ی (۱-۴) یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی است.

$$x^{3}u_x + (x+y)u_y = 1, \tag{۱-۳}$$

$$x^{2}u_{xx} + yu_{yy} + (u_t)^{2} = t. \tag{۱-۴}$$

تعریف ۱-۱-۳. معادله دیفرانسیل ریکاتی: صورت کلی معادله دیفرانسیل ریکاتی[1] به‌صورت زیر است:

$$y' = P(x)y^{2} + Q(x)y + R(x), \tag{۱-۵}$$

که $P(x)$، $Q(x)$ و $R(x)$ توابعی بر حسب x و پیوسته در بازه‌ای مانند (α, β) و $P(x) \neq 0$ است. در صورتی که یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل ریکاتی مانند $y_1 = y_1(x)$ معلوم باشد، برای تعیین جواب عمومی آن از تغییر متغیر

$$y = y_1 + \frac{1}{z}, \tag{۱-۶}$$

استفاده و معادله‌ی ریکاتی به معادله دیفرانسیل خطی زیر تبدیل می‌شود:

$$z' + (2P(x)y_1 + Q(x)z) = -P(x),$$

با حل معادله دیفرانسیل فوق داریم:

$$z = e^{-\int(2P(x)y_1+Q(x))dx}\left(-\int P(x)e^{\int(2P(x)y_1+Q(x))dx}dx + c\right), \tag{۱-۷}$$

اگر از عبارت (۱-۷) مقدار z را در رابطه‌ی (۱-۶) قرار دهیم، جواب عمومی معادله دیفرانسیل به صورت زیر خواهد بود:

$$y = y_1 + e^{\int(2P(x)y_1+Q(x))dx}\left(-\int P(x)e^{\int(2P(x)y_1+Q(x))dx}dx + c\right)^{-1}.$$

اگر در معادله دیفرانسیل (۱-۵) $P(x)$، $Q(x)$ و $R(x)$ را به ترتیب برابر a، b و c در نظر بگیریم، داریم:

$$y' = ay^{2} + by + c, \qquad a \neq 0$$

که جواب‌های عمومی آن را می‌توان به‌صورت زیر به‌دست آورد:

اگر $\triangle = b^{2} - 4ac > 0$،

$$\begin{aligned} y_1 &= -\frac{\sqrt{\triangle}}{2a}\tanh\left(\frac{\sqrt{\triangle}}{2}(\xi+\xi_0)\right) - \frac{b}{2a}, \\ y_2 &= -\frac{\sqrt{\triangle}}{2a}\coth\left(\frac{\sqrt{\triangle}}{2}(\xi+\xi_0)\right) - \frac{b}{2a}, \end{aligned}$$

[1] Riccati

اگر $\triangle = b^۲ - ۴ac < ۰$،

$$y_۳ = \frac{\sqrt{-\triangle}}{۲a}\tan(\frac{\sqrt{-\triangle}}{۲}(\xi + \xi_۰)) - \frac{b}{۲a},$$
$$y_۴ = \frac{\sqrt{-\triangle}}{۲a}\cot(\frac{\sqrt{-\triangle}}{۲}(\xi + \xi_۰)) - \frac{b}{۲a},$$

اگر $\triangle = b^۲ - ۴ac = ۰$،

$$y_۵ = -\frac{۱}{a(\xi + \xi_۰)} - \frac{b}{۲a}.$$

که $\xi_۰$ ثابت انتگرال‌گیری است.

تعریف ۱-۱-۴. معادله دیفرانسیل برنولی[۱]**:** صورت کلی معادله دیفرانسیل برنولی به‌صورت زیر است:

$$y' + p(x)y = Q(x)y^n, \qquad n \neq ۰,۱ \tag{۱-۸}$$

به وضوح $y \neq ۰$ جواب بدیهی معادله دیفرانسیل برنولی است. $P(x)$، $Q(x)$ توابعی بر حسب x و در بازه‌ای مانند (α, β) پیوسته‌اند. برای تعیین جواب عمومی آن با فرض $y \neq ۰$ طرفین تساوی معادله دیفرانسیل (۱-۸) را بر y^n تقسیم می‌کنیم:

$$y^{-n}y' + P(x)y^{۱-n} = Q(x),$$

اکنون با تغییر متغیر $z = y^{۱-n}$ معادله دیفرانسیل فوق به معادله دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی اول

$$z' + (۱-n)P(x)z = (۱-n)Q(x),$$

تبدیل می‌شود که جواب عمومی آن به‌صورت زیر می‌باشد:

$$z = e^{-(۱-n)\int P(x)dx}[(۱-n)\int Q(x)e^{(۱-n)\int P(x)dx}dx + c],$$

اگر به‌جای z، مقدار $y^{۱-n}$ را قرار دهیم، جواب عمومی معادله دیفرانسل برنولی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$y = e^{-\int P(x)dx}[(۱-n)\int Q(x)e^{(۱-n)\int P(x)dx}dx + c]^{\frac{۱}{۱-n}}.$$

برای مثال جواب عمومی معادله دیفرانسیل برنولی $y^۲dx = (x^۳ - xy)dy$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$x = y^{-۱}\,[\frac{۲}{۳}y^{-۳} + c]^{-\frac{۱}{۲}}.$$

تعریف ۱-۱-۵. **سیگنال**[۲]**:** هر کمیت قابل اندازه‌گیری با خصوصیتی از محیط که مکان یا سرعت آشوب و برهم‌ریختگی در محیط را نشان می‌دهد، سیگنال نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۱-۶. **موج**[۳]**:** هر سیگنال قابل تشخیصی که از مکانی به مکان دیگر با سرعت تکثیر قابل شناختی حرکت کند، موج نامیده می‌شود.

[۱]Bernoulli [۲]Signal [۳]wave

تعریف ۱-۱-۷. **امواج سیار** [۱]**:** امواجی که به‌صورت $u(x,t) = f(x - vt)$ نمایش داده می‌شوند، را امواج سیار یا تراولینگ می‌نامیم. چنین تابعی یک آشفتگی را نشان می‌دهد که با سرعت v حرکت می کند.

تعریف ۱-۱-۸. جواب موج سیار و انواع گوناگون آن: جواب موج سیار یک معادله دیفرانسیل بامشتقات جزئی، جوابی است که به‌صورت $u(x,t) = f(x - vt)$ نوشته می‌شود.مطالعه‌ی معادلاتی که از پدیده‌های موج، مدل سازی شده نیاز به مطالعه‌ی جواب‌های موج سیار دارند. جواب موج سیار یا تراولینگ یک جواب از شکل دائم در حال حرکت با یک سرعت ثابت است. جواب‌های موج سیار معمولاً از تبدیل معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی به معادله دیفرانسیل معمولی مرتبط با آنها به‌دست می‌آیند. جواب‌های موج سیار $u(x,t) = f(\xi)$ که در آن $\xi = x - vt$ می‌باشد، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را به معادله دیفرانسیل معمولی بر حسب ξ تبدیل می کنند. تعدادی از جواب‌های موج سیار در نظریه‌ی موج منفرد که در بسیاری از زمینه‌های علمی از امواج آب در آب کم عمق در فیزیک پلاسما وجود دارند، عبارتند از:

الف) جواب سولیتونی و امواج منفرد

ب) جواب‌های متناوب.

تعریف ۱-۱-۹. **جواب سولیتونی و امواج منفرد:** اولین کسی که امواج منفرد را روی سطح آب به صورت علمی مورد بررسی قرار داد جان اسکات راسل [۲] اسکاتلندی در سال ۱۸۳۴ میلادی بود. امواج منفرد امواج بسیار موضعی با سرعت ثابت هستند و سولیتون‌ها [۳]نوع خاصی از امواج انفرادی می‌باشند. در ریاضیات و فیزیک، سولیتون یک موج منزوی خود تقویت کننده (یک بسته موج یا پالس) است که وقتی با سرعت ثابت حرکت می کند، شکلش را حفظ کند. سولیتون به دسته‌ی خاصی از جواب‌های موضعی یک معادله غیرخطی موج گفته می‌شود که با شکل، ارتفاع و سرعت ثابت به پیشروی و انتشار در محیط ادامه می‌دهند. البته توافق عام بر سر تعریف سولیتون وجود ندارد و در منابع مختلف سولیتون را به صورت متفاوتی تعریف می کنند. درازین [۴] و جانسون [۵] سه خاصیت به سولیتون‌ها نسبت دادند به موجی که هر سه خاصیت زیر را داشته باشد، سولیتون گفته می‌شود.

۱. شکل آن تغییر نکند.

۲. در منطقه‌ای از فضا محدود باشد.

۳. بعد از برخورد با سولیتون‌های دیگر شکل خود را با یک انتقال فاز حفظ کند.

[۱]Travelling wave [۲]John Scatt Russell [۳]Solitons [۴]Drazin [۵]Johnson

البته تعریف‌های رسمی بیشتری وجود دارند اما آن تعریف‌ها نیازمند ریاضیات پیشرفته‌ای هستند. با این حال بعضی از دانشمندان اصطلاح سولیتون را برای پدیده‌هایی که دقیقاً این سه خاصیت را ندارند، استفاده می کنند.

به‌عنوان مثال گلوله‌ی نور در اپتیک غیرخطی علی رغم اینکه حین حرکت انرژی از دست می‌دهد. تئوری جواب‌های موج سیار [۱] یکی از زمینه‌های رو به گسترش در ریاضیات مدرن است که نوع خاصی از جواب ها هستند و از دید فیزیکی فرآیند انتقال را توصیف می کنند.

تعریف ۱-۱-۱۰. جواب متناوب[۲] : جواب‌های موج سیاری که به‌طور متناوب تکرار می‌شوند را جواب‌های متناوب می‌نامند، مانند معادله‌ی موج استاندارد $(u_{tt} = u_{xx})$ که دارای جواب متناوب $\cos(x-t)$ می‌باشد.

تعریف ۱-۱-۱۱. دستگاه‌های خودگردان و غیر خودگردان : اگر $x_k = x_k(t)$ $(k = ۱, ۲, \ldots, n)$ در این صورت دستگاه

$$\begin{cases} \dfrac{dx_۱}{dt} = f_۱(x_۱, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(x_۱, \ldots, x_n) \end{cases}$$

را که در آن f_k ها $(k = ۱, ۲, \ldots, n)$، توابع مستقل ازt می‌باشند، یک دستگاه خودگردان یا غیر وابسته نامیده می‌شود. از طرف دیگر دستگاه

$$\begin{cases} \dfrac{dx_۱}{dt} = F_۱(t, x_۱, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = F_n(t, x_۱, \ldots, x_n) \end{cases}$$

را که در آن F_k ها $(k = ۱, ۲, \ldots, n)$، توابع وابسته به t می‌باشند، یک دستگاه غیرخودگردان یا وابسته نامیده می‌شود. برای تبدیل یک دستگاه غیرخودگردان به یک دستگاه خودگردان، تغییر متغیر

$$t = \tau \quad \Rightarrow \quad \frac{d\tau}{dt} = ۱,$$

را در نظر می گیریم. در این صورت:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_۱}{d\tau} \cdot \dfrac{d\tau}{dt} = F_۱(t, x_۱, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{d\tau} \cdot \dfrac{d\tau}{dt} = F_n(t, x_۱, \ldots, x_n) \end{cases}$$

[۱] The theory of traveling wave solution [۲] periodic solution

بنابراین:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{d\tau} = F_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{d\tau} = F_n(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \\ \dfrac{dt}{d\tau} = 1 = F_{n+1}(t, x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

که دستگاه حاصل، یک دستگاه خودگردان می‌باشد.

تعریف ۱-۱-۱۲. انتگرال اول: انتگرال اول [1] یک تابع غیر ثابت و به‌طور پیوسته دیفرانسیل‌پذیر است که حاصل مشتق آن بر جواب‌های به‌دست آمده از معادله، صفر می‌باشد. برای معادله‌ی

$$y' = f(x, y), \tag{۱-۹}$$

یک انتگرال اول، تابع $F(x, y)$ است که $F(x, y) = c$ جواب عمومی معادله فوق می‌باشد همچنین c ثابت اختیاری است، بنابراین $F(x, y)$ در معادله خطی زیر که شامل مشتقات جزئی مرتبه اول است، صدق می‌کند.

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\, f(x, y) = 0.$$

نکته‌ی ۱: لازم نیست که در همه نقاط تعریف شده از دامنه معادله‌ی (۱-۹)، انتگرال اول موجود باشد. اما همیشه در یک همسایگی کوچک نقاطی که در آن تابع $f(x, y)$ به‌طور پیوسته انتگرال پذیر است، انتگرال اول موجود است.

نکته‌ی ۲: انتگرال اول منحصر به‌فرد نیست. به‌طور مثال، برای معادله $y' = -\dfrac{x}{y}$ انتگرال اول فقط $x^2 + y^2$ نیست بلکه برای مثال، $e^{x^2+y^2}$ نیز انتگرال اول است.

با دانستن چگونگی پیدا کردن انتگرال اول برای یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول، انتگرال اول را برای یک دستگاه n معادله دیفرانسیل مرتبه اول می‌توان به صورت تعریف کرد:

$$X' = f(t, X), \qquad\qquad X \in \mathbb{R}^n$$

به‌عبارت دیگر، پیدا کردن n انتگرال اول مستقل از هم، به طور ضمنی برابر با پیدا کردن جواب‌های عمومی معادله دیفرانسیل است. اگر $F_1(t, X)$، ...، $F_n(t, X)$ انتگرال‌های اول مستقل از هم باشند، آنگاه هر انتگرال اول دیگر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت، که ϕ تابع مشتق‌پذیر است :

$$F(t, X) = \phi(F_1(t, X), \ldots, F_n(t, X)). \tag{۱-۱۰}$$

[1] First Integral

قضیه ۱-۱-۱۳. **(الگوریتم) تقسیم**[1]**:** فرض کنید $P(\omega, z)$، $Q(\omega, z)$ دو چند جمله‌ای در $C[\omega, z]$ باشند به طوری که $P(\omega, z)$ در $C[\omega, z]$ ساده نشود، اگر $Q(\omega, z)$ در تمام نقاط صفر $P(\omega, z)$، صفر شود در این صورت یک چند جمله‌ای مانند $G(\omega, z)$ در $C[\omega, z]$ وجود دارد به‌طوری که:

$$Q(\omega, z) = P(\omega, z)G(\omega, z).$$

[1] Division theorem(Algorithm)

فصل ۲

شرح روش ساده ترین معادلات

۲ - ۱ شرح روش ساده‌ترین معادلات

با استفاده از روش ساده‌ترین معادلات می‌توان برای بسیاری از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی که به روش کلاسیک قابل حل نیستند یا به دشواری حل می‌شوند و در روش‌های عددی نیز جواب آن ها به صورت تقریبی به دست می‌آیند و در رشته‌های فیزیک ، هندسی و ... کاربرد بیشتری دارند جواب دقیق به دست آورد . در ادامه به شرح روش ساده‌ترین معادلات می‌پردازیم:

گام اول: یک صورت کلی از معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی به صورت زیر را در نظر می گیریم :

$$P(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, \ldots) = ۰, \qquad (۲-۱)$$

گام دوم: برای بدست آوردن جواب های موج تراولینگ از معادله‌ی (۲-۱) تبدیل موج

$$u(x,t) = y(\xi), \qquad \xi = x - ct \qquad (۲-۲)$$

(که در اینجا c سرعت موج می‌باشد) را معرفی می کنیم. بنابراین به وسیله‌ی این تبدیل موج معادله‌ی (۲-۱) به معادله دیفرانسیل معمولی زیر تبدیل می‌شود:

$$Q(y, \frac{dy}{d\xi}, \frac{d^۲y}{d\xi^۲}, \ldots) = ۰, \qquad (۲-۳)$$

چون بر پایه این تبدیل موج مشتقات زیر را داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\circ) = \frac{d}{d\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t}(\circ) = (-c) \cdot \frac{d}{d\xi}(\circ) = -c\frac{d}{d\xi}(\circ),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\circ) = \frac{d}{d\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}(\circ) = (۱) \cdot \frac{d}{d\xi}(\circ) = \frac{d}{d\xi}(\circ),$$

$$\frac{\partial^۲}{\partial x^۲}(\circ) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial x})(\circ) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{d}{d\xi})(\circ) = \frac{d}{d\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}(\frac{d}{d\xi})(\circ) = \frac{d^۲}{d\xi^۲}(\circ),$$

و سایر مشتقات نیز به همین ترتیب محاسبه می‌شوند.

گام سوم: فرض کنیم معادله‌ی (۲-۳) دارای جوابی به‌صورت زیر باشد:

$$y(\xi) = \sum_{i=۰}^{l} a_i z^i, \qquad a_l \neq ۰ \qquad (۲-۴)$$

در اینجا l یک عدد صحیح مثبت است و a_i ها $(i = ۰, ۱, \ldots, l)$، ضرایب مستقل از ξ و $z = z(\xi)$ تابعی است که در برخی از معادلات دیفرانسیل معمولی صدق می کند ،این معادلات دیفرانسیل معمولی ساده‌ترین معادلات نامیده می‌شوند. ساده ترین معادلات به این دلیل که جواب عمومی این معادلات