دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مهندسی عمران

بررسی پایداری الاستیک و غیرالاستیک ورق‌های سخت‌شده با تغییر ضخامت در دو راستا به روش نوار محدود اسپلاین

پایان‌نامه کارشناسی ارشد مهندسی عمران گرایش سازه

مریم مشایخی زاده

استاد راهنما

دکتر مجتبی ازهری

۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم
الحمد لله رب العالمین الرحمن الرحیم مالک یوم الدین
ایاک نعبد و ایاک نستعین اهدنا الصراط المستقیم
صراط الذین انعمت علیهم غیر المغضوب علیهم
و لا الضالین

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مهندسی عمران

بررسی پایداری الاستیک و غیرالاستیک ورق‌های سخت‌شده با تغییر ضخامت در دو راستا به روش نوار محدود اسپلاین

پایان‌نامه کارشناسی ارشد مهندسی عمران گرایش سازه

مریم مشایخی زاده

استاد راهنما

دکتر مجتبی ازهری

۱۳۹۰

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده عمران

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی مهندسی عمران گرایش سازه خانم مریم مشایخی زاده

تحت عنوان

بررسی پایداری الاستیک و غیرالاستیک ورق‌های سخت‌شده با تغییر ضخامت در دو راستا به روش نوار محدود اسپلاین

در تاریخ ۱۳۹۰/۱۲/۱۰ توسط کمیته‌ی تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر مجتبی ازهری
۲- استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر بیژن برومند
۳- استاد داور	دکتر علی محمد مومنی
۴- استاد داور	دکتر فرشید مسیبی
سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده	دکتر عبدالرضا کبیری سامانی

سپاس خدا را به اندازه همه سپاسی که نزدیکترین فرشتگان و گرامی‌ترین بندگان و پسندیده‌ترین ستایش کنندگان او را ستایش کرده اند، سپاسی که بر سپاس های دیگر برتری داشته باشد مانند برتری که پروردگار نسبت به آفریدگان دارد.

در اینجا بر خود لازم می‌دانم از خانواده‌ی مهربانم، بخصوص پدر و مادر عزیزم که در تمامی مراحل زندگی همراه من بوده‌اند، تشکر و قدر دانی نمایم.

از آقای دکتر ازهری استاد راهنمای پایان نامه، به خاطر تمامی تلاش‌هایشان ودلسوزیشان که در طی انجام این پایان نامه در حق اینجانب فرمودند، کمال تشکر را دارم. از آقای دکتر برومند، استاد مشاور پایان نامه، که با صبر و حوصله‌ی فراوان اینجانب را راهنمایی فرمودند، سپاسگذارم. همچنین از آقایان دکتر فرشید مسیبی و دکتر علی محمد مؤمنی که داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند نیز تشکر می‌نمایم.

از آقایان مهندس صرامی، مهندس عموشاهی و مهندس پورهمت نیز تشکر می‌نمایم. از آقای دکتر کبیری رئیس تحصیلات تکمیلی دانشکده عمران کمال تشکر را دارم.

مریم مشایخی زاده

اسفند ۱۳۹۰

کلیه‌ی حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه متعلق به دانشگاه صنعتی اصفهان است.

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است

به پاس قلب های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید

و به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند.

این مجموعه را اگر قابل باشد به

پدر و مادر عزیزم

تقدیم می کنم.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فهرست مطالب .....

چکیده..... ۱

فصل اول: مقدمه و کلیات

۱-۱ مقدمه..... ۲

۱-۲ انواع ورق..... ۳

۱-۳ کمانش ورق ۴

۱-۳-۱ مفهوم کمانش ورق..... ۴

۱-۳-۲ انواع کمانش ورق..... ۴

۱-۴ تاریخچه..... ۸

۱-۴-۱ تحلیل ورق ۸

۱-۴-۲ ورق با ضخامت متغیر ۹

۱-۴-۳ کمانش غیرالاستیک ورق..... ۱۰

۱-۵ اهداف پایان‌نامه..... ۱۱

۱-۶ محتوای فصول بعدی..... ۱۳

فصل دوم: معادلات حاکم بر رفتار ورق

۲-۱ مقدمه..... ۱۴

۲-۲ فرضیات تئوری ورق‌های نازک..... ۱۴

۲-۳ معادلات دیفرانسیل حاکم بر کمانش صفحات..... ۱۵

۲-۳-۱ معادلات دیفرانسیل ورق..... ۱۸

۲-۳-۲ روابط تنش-کرنش ۲۰

۲-۳-۳ روابط نیرو-تنش ۲۰

۲-۳-۴ روابط نیرو-جابه‌جایی..... ۲۱

۲-۴ بررسی شرایط مرزی حاکم برمعادله‌ی دیفرانسیل..... ۲۲

۲-۴-۱ لبه‌ی گیردار..... ۲۲

۲-۴-۲ لبه‌ی با تکیه‌گاه ساده(مفصلی)..... ۲۲

۲-۴-۳ لبه‌ی آزاد..... ۲۳

۲-۴-۴ لبه‌ی لغزنده(هدایت شونده)..... ۲۴

فصل سوم: مروری بر روش‌های حل معادلات دیفرانسیل

۳-۱ مقدمه..... ۲۵

۳-۲ روش انرژی ۲۵

۳-۳ روش اجزاء محدود..... ۲۷

۳-۴ روش نوار محدود تحلیلی..... ۲۷

۳-۴-۱ مقدمه و مفاهیم پایه ۲۷

۳-۵ روش نوار محدود مختلط ۲۹
۳-۶ روش نوار محدود اسپلاین ۳۰
۳-۶-۱ تابع اسپلاین با فواصل مساوی ۳۰
۳-۶-۲ تابع اسپلاین با فواصل نامساوی ۳۱
۳-۶-۳ تابع اسپلاین با گره‌های چندگانه ۳۲
۳-۶-۴ ارضای شرایط مرزی انتهای نوار ۳۳
الف)تکیه‌گاه ساده ۳۳
ب)تکیه‌گاه گیردار ۳۳
۳-۶-۵ توابع جابه‌جایی و استخراج ماتریس‌های سختی و پایداری ۳۶
فصل چهارم: کمانش الاستیک ورق با تغییر ضخامت پله‌ای
۴-۱ مقدمه ۴۰
۴-۲ مدل‌سازی تغییر ضخامت صفحه ۴۱
۴-۳ تحلیل ورق مربعی با ضخامت یکنواخت ۴۴
۴-۴ بررسی کمانش ورق با یک پرش ضخامت ۴۵
۴-۵ بررسی‌کمانش ورق با دو پرش ضخامت و ارزیابی نتایج ۴۶
۴-۵-۱ لبه‌های بارگذاری SS ۴۸
۴-۵-۲ لبه‌های بارگذاری SC ۵۰
۴-۵-۳ لبه‌های بارگذاری CC ۵۱
۴-۵-۴ نتیجه‌گیری از مثال ورق با دو پرش ضخامت ۵۴
۴-۶ بررسی کمانش ورق با تغییر ضخامت دوطرفه و ارزیابی نتایج ۵۴
۴-۶-۱ لبه‌های بارگذاری SS ۵۵
۴-۶-۲ لبه‌های بارگذاری SC ۵۶
۴-۶-۳ لبه‌های بارگذاری CC ۵۷
۴-۶-۴ نتیجه‌گیری از مثال کمانش ورق با تغییر ضخامت دوطرفه ۵۸
فصل پنجم:کمانش الاستیک ورق سخت‌شده با تغییر ضخامت پله‌ای
۵-۱ مقدمه ۵۹
۵-۲ کمانش ورق‌های سخت‌شده با سخت‌کننده‌ی طولی ۶۰
۵-۳ فرضیات لازم برای تحلیل ورق سخت‌شده ۶۱
۵-۴ ورق سخت‌شده با دو سخت کننده و ضخامت یکنواخت ۶۲
۵-۵ تحلیل و مقایسه‌ی ورق سخت‌شده و ورق با افزایش ضخامت موضعی ۶۴
۵-۶ ورق سخت‌شده با پنج سخت‌کننده و ضخامت یکنواخت ۶۶
۵-۷ اثر افزایش تعداد سخت‌کننده در مقاومت کمانشی ورق سخت‌شده ۶۷
۵-۸ ورق سخت شده با افزایش موضعی ضخامت ورق ۶۷
۵-۸-۱ ورق سخت‌شده با دو سخت کننده و افزایش ضخامت موضعی ۶۸
۵-۸-۲ ورق سخت‌شده با دو سخت کننده و دو پرش ضخامت ۶۹
۵-۹ مقایسه‌ی روش‌های بررسی شده در جهت تقویت ورق ۷۰

فصل ششم: کمانش غیرالاستیک ورق با شرایط سخت‌شدگی و تغییر ضخامت

۶-۱ مقدمه ۷۳
۶-۲ روابط تنش-کرنش غیرالاستیک ۷۴
۶-۳ تئوری کمانش غیرالاستیک ورق ۷۵
۶-۳-۱ تئوری تغییرشکل ۷۵
۶-۳-۲ تئوری جریان ۷۷
۶-۴ منحنی تنش-کرنش مواد ۷۷
۶-۴-۱ روابط چاجز، فنگ و وینتر ۷۷
۶-۴-۲ روابط پلانک ۷۸
۶-۴-۳ روابط رامبرگ-اسگود ۷۹
۶-۵ روش تحلیل غیرالاستیک ورق ۸۰
۶-۶ مقایسه‌ی نتایج حاصل از تحلیل غیرالاستیک ورق با مراجع دیگر ۸۲
۶-۷ کمانش غیرالاستیک ورق با دو پرش ضخامت ۸۳
۶-۸ کمانش غیرالاستیک ورق سخت‌شده با ضخامت یکنواخت ۸۶
۶-۹ کمانش غیرالاستیک ورق سخت‌شده با افزایش ضخامت موضعی ۸۷

فصل هفتم:جمع‌بندی و پیشنهادات

۷-۱ مقدمه ۸۹
۷-۲ جمع‌بندی ۹۰
۷-۳ پیشنهادات ۹۱
مراجع ۹۳

چکیده

با توسعه‌ی کاربرد ورق‌ها در علوم مختلف به عنوان اجزای سازه‌ای اصلی، لزوم تقویت آن‌ها در برابر بارهای وارده‌ی محیطی مختلف اهمیت می‌یابد. در میان بارهای محیطی وارده به ورق می‌توان به انواع بارهای درون صفحه اشاره کرد که سبب بروز پدیده‌ی کمانش در ورق می‌شود. بنابراین تحلیل مسئله‌ی کمانش ورق و سازه‌های ساخته‌شده از آن، هم‌چنین تقویت آن‌ها در برابر خطر کمانش یکی از مسائل مورد توجه محققان و طراحان در این زمینه می‌باشد. به عنوان یکی از راه‌های افزایش مقاومت ورق می‌توان بر ضخامت آن افزود.

استفاده از ورق با ضخامت بیشتر اگرچه در نگاه اول گزینه‌ی مناسبی به نظر می‌رسد، لیکن در مواردی که مساحت ورق به‌کار رفته در عضو سازه‌ای زیاد باشد، سبب افزایش درخور توجه وزن سازه و هزینه‌ی بالای ساخت آن می‌شود. بدین منظور می‌توان افزایش ضخامت ورق را به نواحی محدودی که از حساسیت بیش‌تری در برابر کمانش برخوردار هستند، کاهش داد. افزایش موضعی ضخامت ورق هرچند در مقایسه با افزایش کل ضخامت آن تأثیر کمتری دارد، لیکن مشکلاتی نظیر وزن زیاد سازه و غیراقتصادی بودن آن‌را به همراه نخواهد داشت. به منظور بهبود مقاومت کمانشی ورق با افزایش ضخامت موضعی، می‌توان تعداد مناسبی از سخت‌کننده‌های طولی با ابعاد مناسب به ورق اضافه کرد. به این ترتیب، می‌توان به سازه‌ای با مقاومت بالا و مقرون به صرفه در عین حفظ وزن مناسب و متناسب با مقاصد طراحی دست یافت. در این صورت بخشی از مقاومت مورد نیاز سازه توسط افزایش موضعی ضخامت ورق و بخشی دیگر با استفاده از اضافه نمودن سخت‌کننده‌ها تأمین خواهد شد. در این شرایط طراح قادر خواهد بود، با انتخاب نسبت افزایش موضعی ضخامت و موقعیت آن، هم‌چنین ابعاد و تعداد مناسب سخت‌کننده به ورقی با مقاومت کمانشی موردنظر دست یابد. اضافه نمودن سخت‌کننده به ورق و وجود پرش ناگهانی ضخامت در آن تحلیل مسئله‌ی کمانش ورق مذکور را دشوار خواهد ساخت. لذا به منظور سهولت در حل مسئله‌ی مذکور، استفاده از روش‌های عددی که امروزه به دلیل دقت بالا و حجم محاسبات کمتر از جایگاه ویژه‌ای در تحلیل مسائل ورق برخوردارند، توصیه می‌شود. در میان روش‌های عددی مرسوم، روش نوار محدود اسپلاین به دلیل سهولت کاربرد دقت بالا و قابلیت در بیان تغییرات ناگهانی ورق، روش مناسبی به شمار می‌رود. در این پایان نامه به منظور تحلیل کمانش ورق‌های سخت‌شده با تغییر ضخامت موضعی از روش نوار محدود اسپلاین به دلیل توانایی این روش دربیان تغییرات ناگهانی چون پرش ضخامت در ورق و حضور سخت‌کننده‌ها استفاده می‌شود. هم‌چنین با توجه به اهمیت وقوع کمانش در ناحیه‌ی غیرالاستیک، مسئله‌ی کمانش غیرالاستیک ورق با تغییر ضخامت موضعی و دارای سخت‌کننده نیز در این پایان نامه مورد بررسی قرار خواهد گرفت. مثال‌های عددی متعددی در جهت نشان دادن.....با استفاده از روش مذکور در حالت الاستیک و غیرالاستیک مورد بررسی قرار گرفته است.

کلمات کلیدی: ۱-افزایش ضخامت موضعی ۲-ورق سخت شده ۳-نوار محدود اسپلاین ۴-ورق با پرش ضخامت

فصل اول
مقدمه و کلیات

۱-۱ مقدمه

اجزای سه بعدی که نسبت ضخامت به دیگر ابعاد آن‌ها به میزان قابل توجهی کوچک باشد، اجزای دو بعدیِ ورق نامیده می‌شوند. شکل دو بعدی ورق‌ها موجب ساخت سازه‌های سبک به همراه برخورداری از مزایای اقتصادی می‌شود. به علاوه امکان شکل‌دهی آسان و ایجاد سازه‌هایی با شرایط هندسی و تکیه‌گاهی متناسب با کاربرد مورد لزوم، از دیگر مزایای آن به شمار می‌رود. ویژگی‌های مذکور، سبب حضور چشم‌گیر ورق‌ها در صنایع امروزی شده است و توجه طراحان را در علوم مختلف مهندسی به خود معطوف نموده است، به‌طوری‌که امروزه استفاده‌ی گسترده از ورق‌ها در صنایعی چون کشتی سازی (در ساخت بدنه‌ی کشتی‌های عظیم الجثه و زیردریایی‌ها) و در علوم هوا فضا به منظور ساخت هواپیماها و شاتل‌های فضایی مشاهده می‌شود. هم‌چنین در زمینه‌ی مهندسی عمران، می‌توان به استفاده از ورق‌ها در عرشه‌ی پل‌ها، دیوارهای حائل، دال‌های پی و سقف و... اشاره کرد .

به دلیل کاربرد ورق‌ها به عنوان اجزای سازه‌ای با اهمیت زیاد که به برخی از آن‌ها اشاره شد، ورق‌ها ممکن است در معرض شرایط بارگذاری محیطی مختلفی قرار بگیرند. یکی از انواع مختلف بارگذاری، شرایط بارگذاری درون صفحه می‌باشد. بارگذاری‌های درون صفحه‌ای سبب بروز پدیده‌ای به نام کمانش در ورق خواهد شد که یکی از انواع انهدام در ورق به شمارمی‌رود. به همین دلیل، معیار کمانش به عنوان یکی از معیارهای مهم در طراحی سازه-های ساخته شده از ورق مورد توجه قرار می‌گیرد. در این فصل مفهوم پدیده‌ی کمانش در ورق‌ها بررسی می‌شود.

۱-۲ انواع ورق‌ها

دسته بندی ورق‌ها می تواند براساس معیارهای مختلفی صورت گیرد، از جمله می‌توان به ماده‌ی تشکیل دهنده، نسبت ابعاد ورق، خاصیت مکانیکی و روابط تنش-کرنش اشاره کرد. چنان‌چه دسته بندی بر اساس ماده‌ی تشکیل دهنده‌ی ورق باشد، ورق‌ها به دو دسته‌ی عمده همگن و ناهمگن تقسیم می‌شوند. در این حالت، طیف گوناگونی از مواد ناهمگن بسته به شرایط ترکیب مواد با یکدیگرمی‌تواند به وجود آید، از جمله می‌توان به ورق‌های لایه‌ای اشاره کرد که در آن لایه‌هایی از مواد روی هم قرار می‌گیرند. با توجه به خاصیت مکانیکی، ورق‌ها به سه دسته‌ی همسان‌گرد[1]، اورتوتروپ[2]، و ناهمسان گرد[3] تقسیم می‌شوند.

دسته بندی ورق‌ها در بسیاری از موارد می‌تواند تعیین کننده‌ی معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر ورق باشد. هنگامی که رابطه‌ی تنش-کرنش معیار دسته بندی قرار گیرد، در این شرایط با فرض وجود یک رابطه خطی بین تنش وکرنش تئوری ورق به صورت الاستیک خطی می‌باشد، در حالی که در تئوری الاستیک غیرخطی، پلاستیک و یا ویسکوالاستیک روابط غیرخطی بین تنش و کرنش حاکم است.

اگرچه ورق‌ها در مقایسه با دیگر اجزای سازه‌ای اجزایی نازک به شمار می‌روند، لیکن بسته به نسبت ضخامت به عرض ورق(h/L)، رفتارهای سازه‌ای متفاوتی از خود بروز می‌دهند. ورق‌ها با توجه به نسبت عرض به ضخامتشان به چهار دسته تقسیم می‌شوند که، معادله‌ی دیفرانسیل حاکم آن‌ها در هر حالت متفاوت خواهد بود. در نتیجه به منظور تحلیل مسئله‌ی ورق لازم است ابتدا نوع ورق و تئوری و فرضیات حاکم برآن تعیین شود. انواع ورق به قرار زیر است:

۱-پوسته‌ها($h/L < \frac{۱}{۵۰}$): این دسته از ورق‌ها نازک‌ترین آن‌ها به شمار می‌روند، در این حالت شرایط دوبعدی کاملاً بر ورق حاکم است. هم‌چنین، نحوه‌ی بارگذاری نیز به صورت دو بعدی خواهد بود. در پوسته ها به دلیل ضخامت کم، انتقال بار وارده توسط نیروهای برشی و محوری درون صفحه صورت می‌گیرد(شکل ۱-۱ الف).

۲- ورق‌های نازک($\frac{۱}{۱۰} < h/L < \frac{۱}{۵۰}$): اگرچه این دسته از ورق‌ها در مقایسه با پوسته‌ها از ضخامت بیشتری برخوردارند و دارای سختی خمشی می‌باشند، لیکن رفتار دو بعدی بر ورق حاکم می‌باشد. در ورق‌های نازک انتقال بار وارده به واسطه‌ی لنگر خمشی، لنگر پیچشی و نیروی برشی عرضی

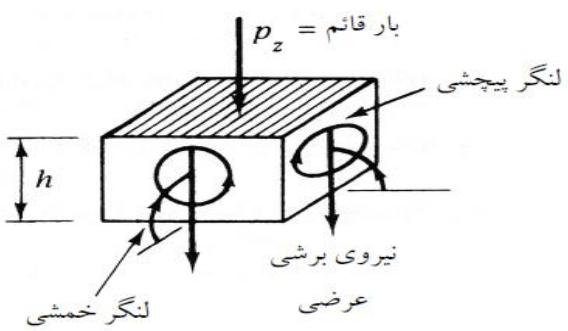
---

[1] Isotrop
[2] Orthotrop
[3] Unistrop

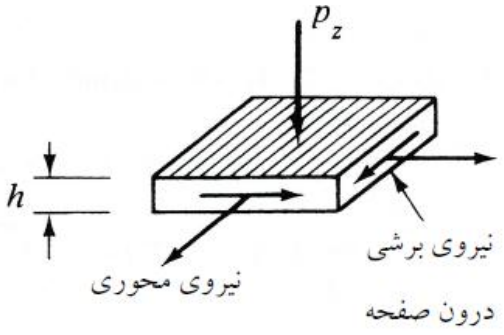
انتقال می‌یابد. هم‌چنین از اثرات تغییرشکل‌های برشی در ورق نازک صرف نظر می‌شود (شکل ۱-۱ ب).

۳-ورق‌های نسبتاً ضخیم($\frac{1}{5} > h/L > \frac{1}{100}$): در این نوع از ورق‌ها نسبت ضخامت به عرض ورق در مقایسه با ورق‌های نازک به گونه‌ای است که نمی توان اثرات تغییرشکل‌های برشی را نادیده گرفت، اما ورق هم‌چنان رفتاری دو بعدی دارد(شکل ۱-۱ ج).

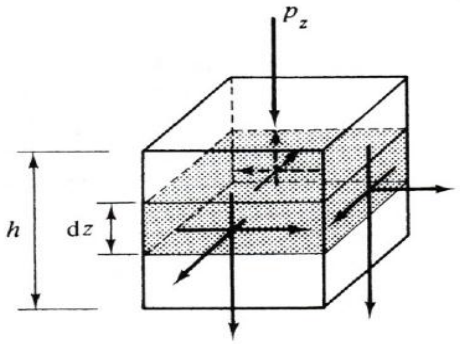
۴-ورق‌های ضخیم($h/L > \frac{1}{5}$): در ورق‌های ضخیم شرایط حاکم بر تنش به‌صورت محیط پیوسته سه بعدی خواهد بود(شکل ۱-۱ د).



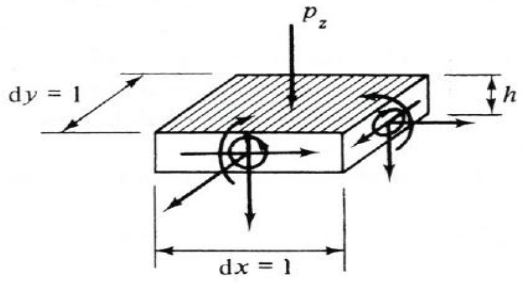
ب- ورق نازک



الف- پوسته



د- ورق ضخیم



ج- ورق نسبتاً ضخیم

شکل ۱-۱ انواع ورق بر اساس نسبت h/L [۱]

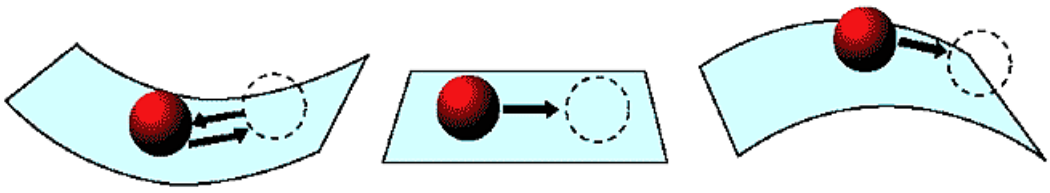
در قسمت بعد به بررسی مفهوم کمانش در ورق که موضوع اصلی این فصل می باشد، خواهیم پرداخت.

۱-۳ کمانش ورق

۱-۳-۱ مفهوم کمانش ورق

هنگامی که به اجزای سازه‌ای چون ستون‌ها، ورق‌ها و یا پوسته‌ها نیروی فشاری اعمال می‌شود، در ابتدای اعمال نیرو و زمانی‌که شدت بار اعمالی کم باشد، عضو سازه‌ای فقط تغییرشکل محوری خواهد داد. با افزایش تنش فشاری و در اثر خروج از مرکزیت نیروی فشاری از محور عضو، خمش نیز در آن ایجاد می‌شود. فشار و خمش وارد شده، توسط تغییرشکل خمشی عضو تحمل می‌گردد. چنان‌چه بدون افزایش قابل ملاحظه‌ای در اندازه‌ی بارگذاری، جابه‌جایی به میزان زیادی رخ دهد، سازه پایداری خود را از دست خواهد داد. به این پدیده اصطلاحاً کمانش می‌گویند و باری که منجر به بروز این پدیده می‌شود، بار بحرانی کمانش نامیده می‌شود.

برای روشن‌تر شدن مسئله به بررسی مثال ساده‌ای خواهیم پرداخت. توپی را در نظر بگیرید که مطابق شکل ۱-۲ روی سطوح مختلف می‌غلتد. چنان چه سطح، تقعری به سمت بالا داشته باشد تعادل پایدار بوده و توپ به هر طرف که غلتانده شود به گودترین نقطه باز خواهد گشت. هنگامی که سطح محدب باشد توپ از نظر تئوری در بالاترین نقطه‌ی سطح می‌تواند در حال تعادل باشد، اما تعادل ناپایدار بوده و توپ ممکن است به هر سمتی بغلتد. هنگامی که توپ بر سطح صاف قرار می‌گیرد، توپ در حالت تعادل خنثی بوده و در هر مکانی می‌تواند باقی بماند [۱].



تعادل پایدار　　تعادل خنثی　　تعادل ناپایدار

شکل ۱- ۲ حالات مختلف تعادل

۱-۳-۲ انواع کمانش ورق

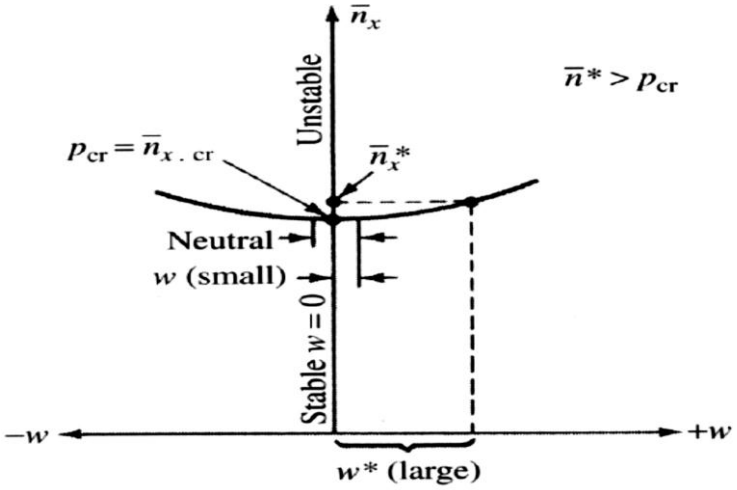
کمانش یا ناپایداری سازه‌ها را می‌توان به دو قسمت عمده تقسیم کرد:

۱. کمانش همراه با نقطه دوگانگی[1]

۲. کمانش با بار محدود[2]

[1] Bifurcation Buckling
[2] Limit Load Buckling

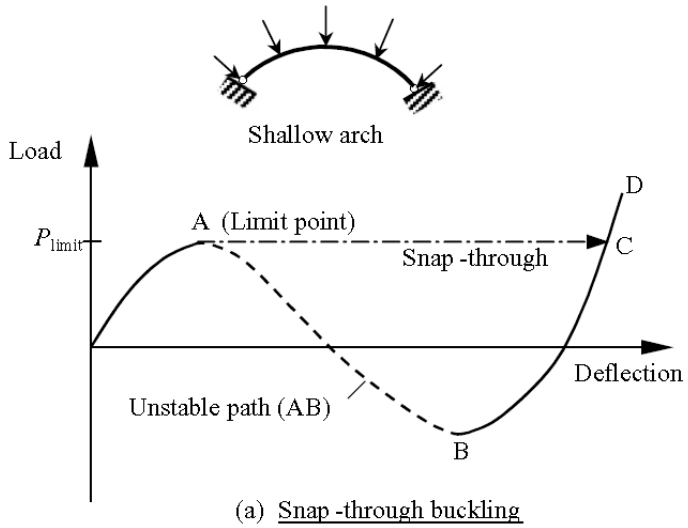
در کمانش همراه با نقطه‌ی دوگانگی، تغییرشکل عضو تحت کمانش می‌تواند از جهتی به جهت دیگر تغییر کند. به بیان ساده‌تر، سازه می‌تواند حین افزایش نیروی فشاری، از تغییرشکل محوری به تغییرشکل جانبی تغییر مسیر دهد. این تغییر مسیر باعث ایجاد نقطه‌ای به نام نقطه‌ی دو شاخه‌ای می‌شود، و مقدار باری که در آن نقطه دو شاخه‌ای رخ می‌دهد، بار کمانش بحرانی نامیده می‌شود. هم‌چنین به مسیر قبل از نقطه‌ی دوشاخه‌ای، مسیر اولیه و مسیر بعد از نقطه‌ی بحرانی، مسیر ثانویه یا مقاومت پس از کمانش[1] گفته می‌شود [۱]. بر اساس شکل سازه و بارگذاری آن مسیر ثانویه می‌تواند متقارن یا نامتقارن باشد. علاوه بر این، مقدار نیروی کمانش پس از نیروی بحرانی می‌تواند صعودی یا نزولی باشد. هنگامی که ورق بار بحرانی را تجربه می‌کند، از میان دو مسیر ممکن برای ادامه‌ی تغییرشکل، ورق همواره مسیر منتهی به شکل کمانش یافته را انتخاب می‌کند (شکل ۱-۳).



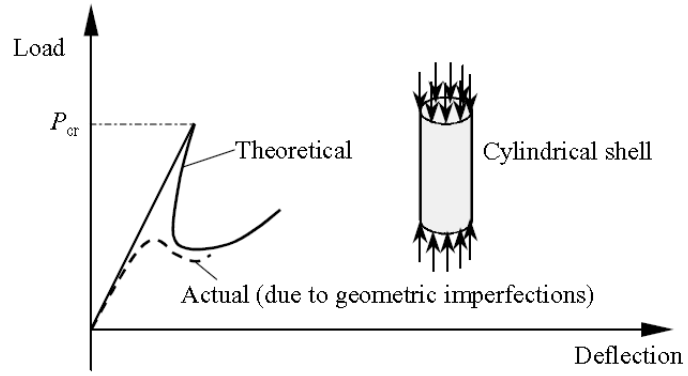
شکل ۱-۳ نقطه‌ی دو شاخه‌ای [۱]

نمونه‌ای دیگر از کمانش، کمانش با بارمحدوداست. در این شرایط، سازه به مقدار حداکثر بار قابل تحمل می‌رسد بدون آن‌که نقطه‌ی دوشاخه ای در نمودار بار ایجاد شود. کمانش موجود در قوطی‌های باریک، سرپوش‌های کروی و بعضی از انواع پوسته‌ها از این نوع می‌باشد (شکل ۱-۴).

[1] Post Buckling Path



(a) Snap -through buckling



(b) Finite-disturbance shell buckling

شکل ۱- ٤ کمانش با بار محدود [۱]

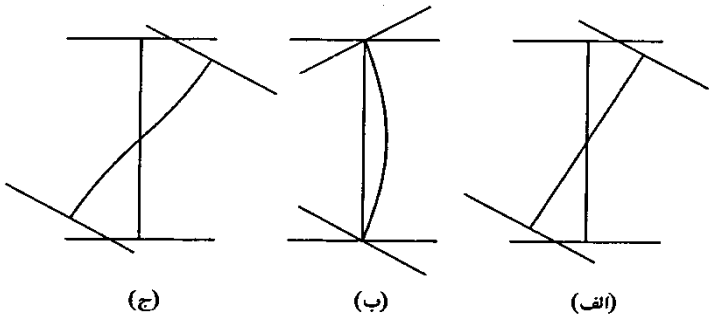
با توجه به شکل ۱-۵ کمانش اعضای فشاری براساس این‌که کمانش در داخل یا خارج صفحه صورت گرفته است به سه قسمت عمده تقسیم می‌شود:

۱. کمانش جانبی[1] (که خود شامل کمانش خمشی و کمانش پیچشی است): مشخصه‌ی این نوع از کمانش این است که مقطع عضو هیچ تغییرشکلی نمی‌دهد و کل سطح مقطع همانند یک جسم صلب حرکت جانبی دارد هم‌چنین حول مرکز خود دوران می‌کند(شکل ۱-۵الف).

۲. کمانش موضعی[2]: در این نوع کمانش فرض بر این است که در محل تقاطع ورق‌ها خط حاصل ازتقاطع، بعد از کمانش نیز بدون جابجایی باقی می‌ماند. این امر نشان دهنده‌ی اثر ناچیز جابه‌جایی‌های درون صفحه‌ای می‌باشد. در این حالت مقطع بعد از کمانش شکل خود را از دست می‌دهد(شکل ۱-۵ب).

[1] Lateral Buckling
[2] Local Buckling

۳. کمانش اعوجاجی[1]: در واقع می‌توان این نوع کمانش را ترکیبی از کمانش موضعی و کلی دانست که در آن اعضاء دارای حرکت جانبی هستند، هم‌چنین، مقطع بعد از کمانش شکل خود را از دست می‌دهد و مانند یک جسم صلب تغییر شکل نمی‌دهد(شکل ۱-۵ ج) [۲].



شکل ۱-۵: (الف) کمانش جانبی (ب) کمانش موضعی (ج)کمانش اعوجاجی

علاوه بر موارد بالا، از نظر مصالح تشکیل‌دهنده‌ی ورق، می‌توان کمانش را به دو دسته‌ی کمانش ارتجاعی و غیرارتجاعی تقسیم کرد. در کمانش ارتجاعی فرض بر این است که رابطه‌ی بین تنش و کرنش از قانون هوک پیروی می‌کند. در این شرایط، اندازه‌ی تنش بحرانی همواره کمتر از تنش تسلیم مصالح باقی می‌ماند. در کمانش غیر ارتجاعی به واسطه‌ی این که رابطه‌ی بین تنش وکرنش بالاتر از حد تناسب می‌باشد، مدول الاستیسیته با توجه به مقدار تنش موجود در ورق هر لحظه تغییر می‌کند. در مسائل کمانش غیرارتجاعی لازم است معادلات حاکم بر رفتار ماده مورد نظر مورد توجه قرار گیرد. این موضوع در فصل مربوطه به طور مفصل مورد بحث قرار خواهد گرفت.

برای بدست آوردن بار کمانشی سازه‌ها روش‌های مختلفی وجود دارد. از جمله می‌توان به روش تعادل، روش انرژی و روش‌های دینامیکی اشاره کرد. معمولاً، در رابطه‌ی پایداری سازه از دو روش عمده‌ی انرژی و قانون دوم نیوتن استفاده می‌شود. در روش برداری که مبتنی بر قانون دوم نیوتن می‌باشد، به منظور بدست آوردن معادلات کمانش از معادلات تعادل استفاده می‌شود. در حالی که در روش انرژی با استفاده از مجموع انرژی درونی و انرژی پتانسیل سازه که به مقدار انرژی کل معروف است معادلات کمانش پی‌ریزی می‌شود.

[1] - Distortional Buckling