دانشگاه سیستان و بلوچستان

تحصیلات تکمیلی

پایان نامهٔ کارشناسی ارشد ریاضی محض

عنوان:

نامساوی‌های ماتریسی زیرجمعی برای $f(A+B)$ و $f(A)+f(B)$

استاد راهنما:

دکتر رحمت الله لشکری پور

تحقیق و نگارش:

محمد حسین معصومی

تیر ماه ۸۹

تقدیر و تشکر:

خداوند مهربان را به شکرانهٔ الطاف بی‌کرانش و به واسطهٔ نعمت آگاهی که بر آدم بخشید، می‌ستایم. او که از روحش در کالبد بی‌جان طبیعت دمید و علم را ابزاری برای شناختش قرار داد. امیدوارم با یاری حق تعالی آنچه را فرا گرفته‌ام، در راه رضای او و پیشرفت جامعه بکارگیرم.

از پدر و مادرم، این دو نعمت الهی که در تمام مراحل زندگی قرین لطف و محبتشان بوده‌ام و نیز از آقای دکتر رحمت الله لشکری پور که با متانت و خلق و خوی نیکو در مقام استادی شایسته هدایت و راهنمائی این پایان‌نامه بر عهدهٔ ایشان بود، سپاسگزارم. همچنین از دکتر اکبر گلچین و دکتر علیرضا احمدی که زحمت مطالعه و داوری پایان‌نامه را بر عهده داشتند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

محمد حسین معصومی

چکیده

در سال ۱۹۹۹ اندو و ژان یک نامساوی زیرجمعی برای توابع مقعر عملگری بدست آوردند. ما این نامساوی را به همه توابع مقعر توسعه می‌دهیم: ماتریس‌های نیمه معین مثبت A و B و تابع مقعر غیرمنفی f روی $[0,\infty)$ را در نظر می‌گیریم برای هر نرم متقارن داریم

$$|||f(A+B)||| \leq |||f(A)+f(B)|||.$$

فهرست مندرجات

پیشگفتار

نامساوی‌ها مباحثی از آنالیز می‌باشند که از دیرباز مورد توجه ریاضیدانان بوده است. در این میان نامساوی‌هایی که فرم $f(A+B)$ یا $f(A)+f(B)$ در آنها ظاهر می‌شوند از توجه ویژه‌ای برخوردارند و ریاضیدانان بسیاری، چندین نامساوی به این فرم یا شبیه آن را برای توابع مختلف با خصوصیات متفاوت و نرم‌های گوناگون بیان نموده‌اند. در سال ۱۹۸۸ اندو[۱] نرم‌های یکانی پایای $|||f(|A-B|)|||$ و $|||f(A)-f(B)|||$ را مقایسه و در سال ۱۹۹۹ اندو و ژان[۲] برای تابع مقعر عملگری f و نرم یکانی پایای $|||.|||$ نامساوی $|||f(A+B)||| \leq |||f(A)+f(B)|||$ را اثبات و کوزم[۳] در [۱۳] این نامساوی را به حالت m متغیره توسعه داد.

در فصل اول این پایان‌نامه تعاریف و قضایای مقدماتی را از مراجع [۶] و [۱۶] بیان می‌کنیم. در فصل دوم نامساوی‌های مقایسه‌پذیر را معرفی کرده و نامساوی $\lambda(f(\alpha A+(1-\alpha)B)) \leq \lambda(\alpha f(A)+(1-\alpha)f(B))$ را برای مقادیر ویژه از مرجع [۵] توسط آج‌لا[۴] و سیلوا[۵] بیان می‌کنیم. در فصل سوم اثبات نامساوی اندو و ژان را آورده و نتایج کارهای قبلی اندو، بهاتیا[۶]، بورین[۷]، دراوسک[۸]، کیتانه[۹]، کوزم و ژان را از مراجع [۱]، [۷] و [۱۲] بررسی می‌کنیم و شکل دیگر اثبات قضیه اندو و ژان را که توسط یوچی‌آما[۱۰] در [۵] بیان شده، ارائه می‌دهیم. در فصل چهار نامساوی اندو و ژان را به تمام توابع مقعر توسعه داده و به کمک آن نامساوی‌هایی را برای ماتریس‌های بلوکی اثبات می‌کنیم.

---

[۱] Ando

[۲] Zhan

[۳] Kosem

[۴] Aujla

[۵] Silva

[۶] Bhatia

[۷] Bourin

[۸] Drnovsek

[۹] Kittaneh

[۱۰] Uchiyama

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

۱ــ۱ مقدمه

در این فصل به تعاریف و قضایایی که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند اشاره می‌کنیم. در بخش دوم به معرفی عملگرها و ماتریس‌های هرمیتی می‌پردازیم و خصوصیات و قضایای ابتدایی مربوط به آنها را بیان می‌کنیم. نوع جدیدی از نرم‌ها به‌نام نرم‌های یکانی پایا را در بخش سوم معرفی می‌کنیم. تعاریف و خصوصیات جزئی از عملگر تصویر را در بخش چهار و توابع یکنوا، مقعر و محدب را در بخش پنج مورد بررسی قرار خواهیم داد. در نهایت در بخش ششم به بیان چند نامساوی مشهور می‌پردازیم.

۱ــ۲ عملگرها و ماتریس‌های هرمیتی

در تمام فصول این پایان نامه فضای ماتریس‌های مختلط $n \times n$ را با M_n نشان خواهیم داد.

تعریف ۱.۲.۱: یک فضای ضرب داخلی یک فضای برداری مختلط به همراه یک ضرب داخلی، $\langle .,. \rangle : X \times X \to \mathbb{F}$ است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

(۱) برای هر $x \in X$، $\langle x,x \rangle \geq ۰$ و اگر $\langle x,x \rangle = ۰$، آنگاه $x = ۰$؛

(۲) برای هر $x,y \in X$، $\langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle}$؛

(۳) برای هر $x,y \in X$ و $\alpha,\beta \in F$ $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha\langle x,z \rangle + \beta\langle y,z \rangle$؛

(۴) برای هر $x,y \in X$ و $\alpha,\beta \in F$ $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\alpha}\langle x,y \rangle + \overline{\beta}\langle x,z \rangle$.

با توجه به ضرب داخلی بالا، نرم زیر را روی فضای ضرب داخلی X تعریف می‌کنیم:

$$||x|| = \langle x,x \rangle^{\frac{۱}{۲}}.$$

یک فضای هیلبرت، فضای ضرب داخلی است که تحت نرم $||x|| = \langle x,x \rangle^{\frac{۱}{۲}}$ کامل است.

تعریف ۲.۲.۱: فرض کنید $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ فضاهای هیلبرت باشند. $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ یک نگاشت خطی است هرگاه برای هر $h_۱, h_۲ \in \mathcal{H}$ و $\alpha_۱, \alpha_۲ \in \mathbb{F}$ داشته باشیم:

$$T(\alpha_۱ h_۱ + \alpha_۲ h_۲) = \alpha_۱ T(h_۱) + \alpha_۲ T(h_۲).$$

در این صورت T را یک عملگر خطی از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ به توی $\mathcal{K}$ می‌گوییم و مجموعه همه عملگرهای خطی کراندار از $\mathcal{H}$ به توی $\mathcal{K}$ را با $\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ نمایش می‌دهیم. فضای همه عملگرهای خطی کراندار روی فضای هیلبرت جدایی پذیر $\mathcal{H}$ را با $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ نمایش می‌دهیم.

حروف A،B،...،Z را برای ماتریس‌های مختلط $n\times n$ و یا عملگرهای روی فضای هیلبرت با بعد متناهی $\mathcal{H}$ بکار می‌بریم.

تعریف ۳.۲.۱: نرم عملگر خطی T را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}||T|| &= sup\ \ \{||Th||\ \ : h\in\mathcal{H},\quad ||h||\leq ۱\}\\ &= sup\ \ \{||Th||\ \ : ||h||=۱\}\\ &= sup\ \ \{\tfrac{||Th||}{||h||}\ \ : h\neq ۰\}\\ &= inf\ \ \{c>۰\ \ : ||Th||\leq c||h||,\quad h\in\mathcal{H}\}.\end{aligned}$$

تعریف ۴.۲.۱: اگر $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$، آنگاه عملگر منحصربفرد $B\in\mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})$، که در تساوی $\langle Ah,k\rangle=\langle h,Bk\rangle$ صدق می‌کند، الحاق A نامیده می‌شود و به‌صورت $B=A^*$ نمایش می‌دهیم. در حقیقت برای هر $h\in\mathcal{H}$ و $k\in\mathcal{K}$ داریم

$$\langle Ah,k\rangle=\langle h,A^*k\rangle.$$

تعریف ۵.۲.۱: اگر $A=A^*$، عملگر $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ را خود الحاق یا هرمیتی می‌نامیم.

تعریف ۶.۲.۱: ماتریس $A\in M_n$ را هرمیتی گوییم، اگر با مزدوج ترانهاده خود برابر باشد، یعنی

$$A=A^*=\bar{A}^t.$$

بطور مثال ماتریس

$$\begin{pmatrix} ۱ & i\\ -i & ۱\end{pmatrix}$$

با مزدوج ترانهاده خود برابر است بنابراین یک ماتریس هرمیتی می‌باشد.

مجموعه ماتریس‌های هرمیتی درM_n را با H_n نشان می‌دهیم.

تجزیه دکارتی ماتریس $A\in M_{m\times n}$ به‌صورت $A=Re\,A+i\,Im\,A$ می‌باشد، که

$$Re\,A=\frac{A+A^*}{۲},\qquad Im\,A=\frac{A-A^*}{۲i},$$

که هر دو ماتریس‌های هرمیتی هستند.

تعریف ۷.۲.۱: اگر $A^*A = AA^*$، عملگر(ماتریس) A را نرمال می‌نامیم.

تعریف ۸.۲.۱: اگر $A^*A = I = AA^*$، عملگر(ماتریس) A را یکانی می‌نامیم.

تعریف ۹.۲.۱: یک ماتریس یکانی را که تمام درایه‌های آن حقیقی باشند، متعامد می‌نامیم.

قضیه ۱۰.۲.۱([۱۱])**:** اگر $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ یک عملگر هرمیتی باشد، آنگاه

$$||A|| = sup \ \{|\langle Ah, h\rangle| \quad : \ h \in \mathcal{H}, \quad ||h|| = ۱\}.$$

تعریف ۱۱.۲.۱: اگر $||A|| \leq ۱$، عملگر(ماتریس) A را انقباض می‌نامیم.

تعریف ۱۲.۲.۱: عملگر هرمیتی A را نیمه معین مثبت گوییم، اگر برای هر $h \in \mathcal{H}$، $\langle Ah, h\rangle \geq ۰$. در حقیقت A یک عملگر مثبت است و با نماد $A \geq ۰$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۳.۲.۱: ماتریس $A \in M_n$ را نیمه معین مثبت گوییم، هرگاه برای هر $x \in \mathbb{C}^n$ داشته باشیم:

$$x^*Ax \geq ۰.$$

و این معادل است با

$$\langle Ax, x\rangle \geq ۰.$$

از طرفی برای هر $A \in M_n$ و $x, y \in \mathbb{C}^n$، داریم

$$۴\langle Ax \ , \ y\rangle = \sum_{k=۰}^{۳} i^k \langle A(x + i^k y) \ , \ x + i^k y\rangle, \qquad (۱-۱)$$

$$۴\langle x \ , \ Ay\rangle = \sum_{k=۰}^{۳} i^k \langle x + i^k y \ , \ A(x + i^k y)\rangle, \qquad (۱-۲)$$

که $i = \sqrt{-۱}$.

بنابراین برای هر ماتریس نیمه معین مثبت A داریم

$$\langle Ax \ , \ x\rangle = \langle x \ , \ Ax\rangle. \qquad (۱-۳)$$

تساوی‌های $(1-1)$، $(1-2)$ و $(1-3)$ نتیجه می‌دهند که هر ماتریس نیمه معین مثبت لزوماً هرمیتی است.

تعریف ۱.۲.۱۴: اگر برای هر $0 \neq h \in \mathcal{H}$، $\langle Ah, h\rangle > 0$، A معین مثبت یا مثبت سره است و به‌صورت $A > 0$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۱۵: ماتریس $A \in M_n$ را معین مثبت گوییم، هرگاه برای هر $x \in \mathbb{C}^n$ داشته باشیم:

$$x^*Ax > 0.$$

مجموعه تمام ماتریس‌های نیمه معین مثبت و مجموعه تمام ماتریس‌های معین مثبت در M_n را بترتیب با S_n و P_n نشان می‌دهیم.

می‌گوییم $A \geq 0$، اگر A نیمه معین مثبت باشد. فرض کنید A و B ماتریس‌های هرمیتی باشند، گوییم $A \leq B$ یا $B \geq A$، اگر به ازای هر $x \in {}^n$، $x^*Bx \geq x^*Ax$ یعنی اینکه $B - A$ نیمه معین مثبت باشد.

تعریف ۱.۲.۱۶: مجموع عناصر روی قطر یک ماتریس را اثر یک ماتریس گویند، یعنی

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

قضیه ۱.۲.۱۷([۱۷]): برای ماتریس $A \in M_n$ گزاره‌های زیر معادلند.

۱) A هرمیتی است.

۲) برای هر $x \in \mathbb{C}^n$، $x^*Ax \in \mathbb{R}$.

۳) $A^2 = A^*A$.

۴) $tr\, A^2 = tr\,(A^*A)$.

تعریف ۱.۲.۱۸: عدد مختلط λ یک مقدار ویژه ماتریس مربعی A است، اگر یک بردار ناصفر u در $\mathbb{C}^n$ وجود داشته باشد بطوری‌که

$$Au = \lambda u.$$

u را یک بردار ویژه متناظر با λ می‌نامیم. مجموعه مقادیر ویژه $A \in M_n$ را طیف A می‌نامیم و با $\sigma(A)$ نمایش می‌دهیم. یک مقدار ویژه A ریشه چند جمله‌ای مشخصه است. در حقیقت λ یک مقدار ویژه A است

اگر و تنها اگر

$$det(A - \lambda I) \equiv P_A(\lambda) = ۰.$$

ماکزیمم قدر مطلق همه مقادیر ویژه A شعاع طیفی A نامیده می‌شود و با $\rho(A)$ نمایش می‌دهیم:

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

مجموعه مقادیر ویژه $\lambda_۱$،$\lambda_۲$،...،λ_n از $A \in H_n$ را که به‌صورت نزولی مرتب شده‌اند، با $\lambda(A) = (\lambda_۱(A), \lambda_۲(A), ..., \lambda_n(A))$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱.۲.۱۹([۱۷]): برای ماتریس‌های $C, B, A \in M_n$ گزاره‌های زیر برقرارند.

۱) اثر ماتریس A برابر با مجموع مقادیر ویژه A می‌باشد.

۲) اثر حاصلضرب چند ماتریس دارای خاصیت دوری است به این معنی که

$$tr(ABC) = tr(CAB) = tr(BCA).$$

می‌گوییم $\lambda(B) \leq \lambda(A)$ زمانی برقرار است که برای تمام $j = ۱, ۲, ..., n$ داشته باشیم $\lambda_j(B) \leq \lambda_j(A)$ و عکس مطلب نیز برقرار است.

لم ۱.۲.۲۰(اصل یکنوایی ویل[۱]): فرض کنید $A, B \in H_n$. اگر $A \geq B$، آنگاه برای هر $j = ۱, ۲, ..., n$

$$\lambda_j(A) \geq \lambda_j(B).$$

برهان: به [۱۶] مراجعه شود. □

گزاره ۱.۲.۲۱([۵]): فرض کنید f تابعی صعودی روی بازه I باشد و $A, B \in H_n(I)$، اگر $\lambda(B) \leq \lambda(A)$ آنگاه

$$\lambda(f(B)) \leq \lambda(f(A)).$$

قضیه ۱.۲.۲۲([۶]): (۱) فرض کنید $A, B \in H_n$ بطوری‌که برای‌هر $۱ \leq j \leq n$، $\lambda_j(A) \leq \lambda_j(B)$. آنگاه ماتریس یکانی U وجود دارد بطوری‌که $A \leq U^*BU$.

(۲) برای هر ماتریس A یک ماتریس یکانی U وجود دارد بطوری‌که $Re\, A \leq U^*|A|U$.

---
[۱] Wyle

تعریف ۲۳.۲.۱: اگر $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$، آنگاه طیف عملگر T مجموعه همه λ هایی است که $T - \lambda I$ معکوس‌پذیر نباشد:

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{F} \ \ : \ \ T - \lambda I \quad \text{معکوس پذیر نباشد}\},$$

که $\mathbb{F}$ میدان اسکالر فضای $\mathcal{H}$ می‌باشد.

قضیه ۲۴.۲.۱: اگر $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$، آنگاه

$$\sigma(T^*) = \{\bar{\lambda} \ \ : \ \ \lambda \in \sigma(T)\}.$$

برهان: T معکوس پذیر است اگر و تنها اگر T^* معکوس پذیر باشد و $T - \lambda$ معکوس پذیر است اگر و تنها اگر $(T - \lambda)^*$ معکوس پذیر باشد. لذا $T - \lambda$ معکوس ناپذیر است اگر و تنها اگر $T^* - \bar{\lambda}$ معکوس ناپذیر باشد. بنابراین

$$\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(T^*). \ \ \Box$$

لذا با توجه به قضیه بالا قضیه زیر را داریم.

قضیه ۲۵.۲.۱([۱۱])**:** اگر T هرمیتی باشد، آنگاه $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.

گزاره ۲۶.۲.۱([۱۱])**:** اگر $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ هرمیتی باشد، آنگاه

$$\sigma(T) \subseteq [-||T||, ||T||].$$

باتوجه به قضایای بالا واضح است که عملگرهای هرمیتی طیف خود را روی محور حقیقی اختیار می‌کنند.

قضیه ۲۷.۲.۱(قضیه طیفی برای ماتریس‌های هرمیتی): فرض کنید $A \in M_n$. A هرمیتی است اگر و فقط اگر ماتریس یکانی $U \in M_n$ و ماتریس قطری حقیقی $\Lambda \in M_n$ وجود داشته باشد بطوری‌که $A = U\Lambda U^*$. بعلاوه A حقیقی و هرمیتی است اگر و فقط اگر ماتریس متعامد $P \in M_n$ و ماتریس قطری $\Lambda \in M_n$ وجود داشته باشند بطوری‌که $A = P\Lambda P^t$.

برهان: به [۶] مراجعه شود. $\Box$

تعریف ۲۸.۲.۱: ماتریس $A \in M_n$ با ماتریس بالا مثلثی T یکانی مشابه است اگر $A = QTQ^*$، که Q

یکانی است.

قضیه ۲۹.۲.۱(شور[۱]): فرض کنید $A \in M_n$ و $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ مقادیر ویژه A با یک ترتیب معین باشند. ماتریس یکانی $U \in M_n$ وجود دارد بطوری‌که

$$U^*AU = T,$$

که T بالا مثلثی با قطر $t_{ii} = \lambda_i$ برای هر $i = 1, 2, ..., n$، بدین معنی که ماتریس مربعی A، یکانی مشابه با یک ماتریس بالا مثلثی است که عناصر روی قطر اصلی آن مقادیر ویژه A هستند. بعلاوه، اگر $A \in M_n(\mathbb{R})$ و همه مقادیر ویژه A حقیقی باشند، می‌توان U را حقیقی و متعامد انتخاب کرد.

برهان: به [۶] مراجعه شود. □

لم ۳۰.۲.۱([۶]): فرض کنید $A \in M_n$ نرمال باشد. آنگاه A با یک ماتریس قطری یکانی مشابه است.

لم ۳۱.۲.۱: مقادیر ویژه ماتریس A مثبت هستند اگر و فقط اگر A معین مثبت باشد. همچنین مقادیر ویژه ماتریس A نامنفی هستند اگر و فقط اگر A نیمه معین مثبت باشد.

برهان: فرض کنید مقادیر ویژه A نامنفی باشند. برای هر $x \in \mathbb{C}^n$ از لم ۳۰.۲.۱، نتیجه می‌گیریم

$$x^*Ax = x^*U^*DUx = y^*Dy = \sum_{i=1}^{n} d_i\overline{y_i}y_i = \sum_{i=1}^{n} d_i|y_i|^2 \geq 0,$$

که $D = diag(d_1, ..., d_n)$ ماتریس قطری از مقادیر ویژه A است و $y = Ux$، که U یکانی است.

برعکس، فرض کنید A نیمه معین مثبت باشد و $\lambda \in \sigma(A)$. همچنین فرض کنید x بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ باشد. در این صورت

$$x^*Ax = x^*\lambda x \Rightarrow \lambda = \frac{x^*Ax}{x^*x}.$$

چون $x^*Ax \geq 0$ و $x^*x > 0$، لذا $\lambda \geq 0$.

برهان برای ماتریس‌های معین مثبت، شبیه ماتریس‌های نیمه معین مثبت است. □

لم ۳۲.۲.۱: اگر $A \in M_n$ نیمه معین مثبت باشد، آنگاه برای $k = 1, 2, ...$، A^k نیمه معین مثبت است. همچنین اگر $A \in M_n$ معین مثبت باشد، آنگاه A^k برای $k = 1, 2, ...$ معین مثبت است.

[۱] Schur

برهان: اگر λ مقدار ویژه A باشد، آنگاه λ^k مقدار ویژه A^k است. حال اگر A نیمه معین مثبت باشد، مقادیر ویژه آن، λها نامنفی هستند. در نتیجه λ^k نامنفی است. لذا A^k نیمه معین مثبت است.

برای حالتی که A مثبت است برهان مشابه می‌باشد. □

لم ۳۳.۲.۱: به ازای هر $A \in M_n$، داریم $A^*A \geq 0$.

برهان: طبق لم ۳۱.۲.۱، نشان می‌دهیم مقادیر ویژه A^*A برای هر A نامنفی است. فرض کنید A دلخواه و λ یک مقدار ویژه برای A و x بردار ویژه متناظر با λ باشد. در این صورت $\bar{\lambda}$ مقدار ویژه A^* است. داریم

$$A^*Ax = A^*\lambda x = \lambda A^*x = \lambda\bar{\lambda}x = |\lambda|^2 x.$$

بنابراین $|\lambda|^2$ مقدار ویژه A^*A است و چون $|\lambda|^2$ نامنفی است، لذا A^*A نیمه معین مثبت است.

به همین روش می‌توان نشان داد AA^* نیمه معین مثبت است. □

برای هر عملگر یا ماتریس A، A^*A همیشه مثبت است و $|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$. مقادیر تکین A همان مقادیر ویژه $|A|$ می‌باشند و برای $j = 1, 2, ..., n$ با $s_j(A)$ نشان می‌دهیم، که در یک ترتیب غیرصعودی به تعداد تکرارشان (لزوما متناهی) مرتب شده‌اند:

$$s_1(A) \geq s_2(A) \geq ... \geq s_n(A)$$

و مجموعه این مقادیر تکین A را با $s(A)$ نشان می‌دهند به این معنی که

$$s(A) = (s_1, s_2, ..., s_n).$$

در زیر برخی از خواص مقادیر تکین را از مرجع [۶] بیان می‌کنیم.

- برای ماتریس $A \in M_n$ و یکانی‌های $U, V \in M_n$ داریم

۱) $s_j(UAV) = s_j(A)$

۲) $s_j(A) = s_j(A^*)$

۳) $s_j^2(A) = \lambda_j(A^*A)$

قضیه ۳۴.۲.۱([۱۶]): برای هر $A, B \in M_n$

$$|tr\ A| \leq \sum_{i=1}^{n} s_i(A).$$

قضیه ۱.۲.۳۵: $\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} \geq ۰$ اگر و تنها اگر $A \geq ۰$، $C \geq ۰$ و یک انقباض W وجود داشته باشد، بطوری‌که

$$B = A^{۱/۲} W C^{۱/۲}.$$

برهان: به [۱۶] مراجعه شود. □

۱—۳ نرم‌های یکانی پایا

در این بخش ابتدا دو نرم ماتریسی را معرفی کرده و سپس با نوع جدیدی از نرم‌ها به نام نرم یکانی پایا آشنا می‌شویم که در این پایان‌نامه اکثراً با این نوع نرم سر و کار داریم.

تعریف ۱.۳.۱: نرم $l_۱$ را برای $A \in M_n$ با

$$||A||_۱ = \sum_{i,j=۱}^{n} |a_{ij}|,$$

تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۲: نرم اقلیدسی یا نرم $l_۲$ تعریف شده برای $A \in M_n$ را با $||A||_۲ = \left(\sum_{i,j=۱}^{n} |a_{ij}|^۲\right)^{\frac{۱}{۲}}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۳.۳: نرم $|||.|||$ روی M_n، نرم یکانی پایا یا متقارن نامیده می‌شود، اگر برای هر $A \in M_n$ و برای هر ماتریس یکانی $U, V \in M_n$ داشته باشیم:

$$|||UAV||| = |||A|||.$$

مثال‌هایی از نرم‌های یکانی پایا:

(۱) شاتن[1] p—نرم‌ها که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\|A\|_p = \{\sum_{j=1}^{n} s_j(A)^p\}^{\frac{1}{p}} = \{tr(|A|^p)\}^{\frac{1}{p}} \qquad 1 \leq p < \infty.$$

دو نرم تعریف شده زیر در رده نرم‌های شاتن هستند.

(a) نرم طیفی یا نرم عملگری $||.||$ به‌صورت $||A|| = s_1(A) = ||A||_\infty$ تعریف می‌شود.

نرم طیفی به‌صورت $||.||_\infty$ مطرح می‌شود و به این معنی است که

$$||A||_\infty = \lim_{p\to\infty} ||A||_p.$$

(b) نرم فروبنیوس[2](یا نرم هیلبرت—اشمیت[3]) $||.||_F$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$||A||_F = \{\sum_{j=1}^{n} s_j(A)^2\}^{\frac{1}{2}} = \{tr(|A|^2)\}^{\frac{1}{2}},$$

که تساوی دوم با تعریف ضرب داخلی فروبنیوس برای $A, B \in M_n$ به‌صورت $\langle A, B\rangle = tr\ A^*B$ بدست می‌آید.

برای ماتریس $l \times m$، X نرم فروبنیوس به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$||X||_F = \{tr(X^*X)\}^{\frac{1}{2}} = \{tr(XX^*)\}^{\frac{1}{2}} = \{\sum_{i,j} |x_{i,j}|^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

(۲) برای $k = 1, 2, ..., n$ کی فن[4] k—نرم‌ها به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$||A||_{(k)} = \sum_{j=1}^{k} s_j(A).$$

با توجه به تعریف نرم طیفی $||.||_{(1)} = ||.||_\infty$ می‌باشد. همچنین نرم $||A||_1$ به‌صورت $||A||_{(n)}$ تعریف می‌شود و چون معادل است با $tr(|A|)$ نرم اثر نامیده می‌شود.

[1] Schatten

[2] Frobenius

[3] Hilbert-schmidt

[4] Ky fan

در زیر چند خاصیت نرم یکانی پایا را از مرجع [٦] می‌آوریم:

(۱) برای $A \in M_n$، $\|A\| \le |||A||| \le \|A\|_{(n)} = \|A\|_1$.

(۲) نرم‌های یکانی پایا زیرضربی هستند، به این معنی که برای هر $B, A \in M_n$،

$$|||AB||| \le |||A|||\,|||B|||.$$

(۳) $|||A||| = |||A^*||| = |||(A^*A)^{\frac{1}{2}}||| = |||(AA^*)^{\frac{1}{2}}|||$.

(۴) برای هر یکانی U، $|||UA||| = |||AU||| = |||A|||$.

(۵) نرم‌های یکانی پایا یکنوا می‌باشند به این معنی که اگر برای $B, A \in M_n$، $0 \le A \le B$ آنگاه داریم

$$|||A||| \le |||B|||.$$

لم ۴.۳.۱ (اصل مینیمم)([۱٦]): فرض کنید $A \in H_n$ باشد. آنگاه برای هر $1 \le k \le n$ داریم

$$\sum_{j=n-k+1}^{n} \lambda_j(A) = \min\{trU^*AU \;\;:\;\; U^*U = I \text{ و } U \in M_{n,k}\}.$$

قضیه ۵.۳.۱(اصل ماکزیمم کی فن)([۱٦]): برای عملگر T و برای $k = 1, 2, ...$ اصل ماکزیمم کی فن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sum_{j=1}^{k} s_j(T) = \max \sum_{j=1}^{k} |\langle x_j, Ty_j \rangle|,$$

که ماکزیمم روی بردارهای یکامتعامد x_1،...،x_k و y_1،...،y_k گرفته شده است.

در این قضیه اگر T هرمیتی باشد $x_j = y_j$ را در نظر می‌گیریم.

قضیه ٦.۳.۱(اصل تسلطی کی فن)([٦]): برای ماتریس‌های $B, A \in M_n$ اگر

$$\|A\|_{(k)} \le \|B\|_{(k)} \qquad k = 1, 2, ..., n,$$

آنگاه برای تمام نرم‌های یکانی پایا

$$|||A||| \le |||B|||.$$

قضیه ۷.۳.۱: فرض کنید $A, B \in M_n$. آنگاه برای هر نرم یکانی پایا روی M_{2n}،

$$\frac{1}{2}\left|\left|\left|\begin{pmatrix} A+B & 0 \\ 0 & A+B \end{pmatrix}\right|\right|\right| \le \left|\left|\left|\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\right|\right|\right| \le \left|\left|\left|\begin{pmatrix} |A|+|B| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right|\right|\right|. \quad (۴-۱)$$

برهان: با توجه به قضیه ۲۹.۲.۱، با انتخاب

$$Q=\begin{pmatrix} \circ & I \\ I & \circ \end{pmatrix},$$

ماتریس‌های

$$\begin{pmatrix} A & \circ \\ \circ & B \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} B & \circ \\ \circ & A \end{pmatrix}$$

بطور یکانی مشابه هستند، یعنی

$$\begin{pmatrix} A & \circ \\ \circ & B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \circ & I \\ I & \circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & \circ \\ \circ & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \circ & I \\ I & \circ \end{pmatrix}.$$

در نتیجه

$$\left|\left|\left|\begin{pmatrix} A & \circ \\ \circ & B \end{pmatrix}\right|\right|\right|=\left|\left|\left|\begin{pmatrix} B & \circ \\ \circ & A \end{pmatrix}\right|\right|\right|. \tag{۱ − ۵}$$

همچنین

$$\begin{pmatrix} A+B & \circ \\ \circ & B+A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & \circ \\ \circ & B \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} B & \circ \\ \circ & A \end{pmatrix},$$

لذا از نامساوی مثلثی برای نرم‌ها و رابطه (۱—۵) داریم

$$\begin{aligned}\left|\left|\left|\begin{pmatrix} A+B & \circ \\ \circ & B+A \end{pmatrix}\right|\right|\right| &\leq \left|\left|\left|\begin{pmatrix} A & \circ \\ \circ & B \end{pmatrix}\right|\right|\right|+\left|\left|\left|\begin{pmatrix} B & \circ \\ \circ & A \end{pmatrix}\right|\right|\right| \\ &= ۲\left|\left|\left|\begin{pmatrix} A & \circ \\ \circ & B \end{pmatrix}\right|\right|\right|. \end{aligned} \tag{۱ − ٦}$$

بنابراین نامساوی سمت چپ (۱ − ۴) از تقسیم کردن طرفین (۱ − ٦) بر ۲ بدست می‌آید.

برای نامساوی سمت راست (۱ − ۴)، حالت خاصی که A و B مثبت هستند را ثابت می‌کنیم. حالت کلی به‌آسانی نتیجه می‌شود.