دانشکده علوم

گروه ریاضی

گزارش پایانی پایان نامه

عنوان

روش‌های تکراری فوق تخفیف شتاب داده شده‌ی پیش شرط‌سازی شده برای M- ماتریس‌ها

استادان راهنما:

دکتر داود خجسته سالکویه

دکتر بهرام فرهادی‌نیا

پژوهشگر:

یوسف عبدالعلی‌زاده

آبان ۱۳۸۹

نام خانوادگی: عبدالعلی‌زاده **نام:** یوسف

عنوان پایان‌نامه: روش‌های تکراری AOR پیش شرط‌سازی شده برای M- ماتریس‌ها.

استاد راهنما: دکتر داود خجسته سالکویه

استاد مشاور: دکتر بهرام فرهادی نیا

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی **گرایش:** کاربردی **دانشگاه:** محقق اردبیلی

دانشکده: علوم **تاریخ فارغ‌التحصیلی:** **تعداد صفحه:**

کلید واژه: دستگاه معادلات خطی؛ پیش شرط‌ساز؛ همگرایی؛ روش تکراری AOR؛ M- ماتریس.

چکیده:

دستگاه معادلات خطی

$$Ax = b,$$

که در آن ماتریس ضرایب A یک M- ماتریس است را در نظر بگیرید. این گونه ماتریس‌ها در مسائل مختلفی از علوم و مهندسی، ظاهر می‌شوند. در این پایان نامه به منظور حل دستگاه فوق، یک پیش شرط‌ساز کلی ارائه کرده و نشان می‌دهیم که این پیش شرط‌ساز، سرعت همگرائی روش‌های تکراری AOR را افزایش می‌دهد. در پایان برای بیان کارایی روش، نتایج عددی متناظر با روش GMRES پیش شرط‌سازی شده ارائه می‌شود.

تقدیم به

پدر و مادر دلسوز و فداکارم

و

همسر عزیز و مهربانم.

چکیده

دستگاه معادلات خطی

$$Ax = b,$$

که در آن ماتریس ضرایب A یک M- ماتریس است را در نظر بگیرید. این گونه ماتریس‌ها در مسائل مختلفی از علوم و مهندسی، ظاهر می‌شوند. در این پایان نامه به منظور حل دستگاه فوق، یک پیش شرط‌ساز کلی ارائه کرده و نشان می‌دهیم که این پیش شرط‌ساز، سرعت همگرائی روش‌های تکراری AOR را کاهش می‌دهد. در پایان برای بیان کارایی روش، نتایج عددی متناظر با روش GMRES پیش شرط‌سازی شده ارائه می‌شود.

تقدیر و سپاسگزاری

منّت خدای را عزّوجلّ که طاعتش موجب قربت است و به شکر اندرش مزید نعمت؛ هر نفسی که می‌رود ممدّ حیات است و چون برآید مفرّح ذات. پس در هر نفسی دو نعمت موجود است و بر هر نعمت، شکری واجب.

سپاس و تشکر قلبی خود را به استاد فرهیخته و ارجمندم جناب آقای **دکتر داود خجسته سالکویه** ابراز می‌دارم؛ به پاس اینکه تجربه‌ی سال‌ها تحقیق خود را در اختیارم گذاشتند و چگونگی تحقیق و تفحّص را به من آموختند و در همه‌ی عمر، از ایشان سپاسگزارم. همواره برای ایشان و خوانواده‌ی محترمشان آرزوی سلامتی، سعادت و توفیقات روزافزون دارم. از جناب آقای دکتر بهرام فرهادی‌نیا که زحمت مشاوره‌ی پایان نامه‌ی اینجانب را پذیرفتند نیز کمال تشکر و احترام را دارم. همچنین از اساتید محترم، آقایان دکتر عبداله برهانی‌فر و دکتر صداقت شهمراد که زحمت داوری این پایان نامه را عهده‌دار شدند، نهایت تشکر و قدردانی را دارم.

در پایان از همه‌ی اعضای خانواده‌ام مخصوصاً **پدر و مادر مهربانم** که در تمام دوران تحصیلاتم همواره مشوق من بودند، و نیز همسر عزیزم **خانم زهرا سروری** که در تمام مدت مطالعه و نگارش این پایان نامه صبورانه در کنارم بودند، بی‌نهایت ممنون و سپاسگزارم.

یوسف عبدالعلی‌زاده

آذر ماه ۱۳۸۹

فهرست مندرجات

پیش‌گفتار

حل عددی بسیاری از مسائل علوم و مهندسی مثل حل عددی معادلات دیفرانسیل با استفاده از روش‌های تفاضلات یا عناصر متناهی، منجر به حل دستگاه معادلات خطی می‌شود. یک دستگاه معادلات خطی در حالت کلی به شکل

$$Ax = b, \tag{۱}$$

می‌باشد که در آن A یک ماتریس $n \times n$ و b یک بردار n تایی است. در سراسر این پایان‌نامه، ماتریس A را ماتریسی نامنفرد در نظر می‌گیریم. لذا منظور از حل دستگاه، یافتن برداری مانند x است که در (۱) صدق کند. به طور کلی، روش‌های حل دستگاه (۱) دو دسته‌اند: روش‌های مستقیم و روش‌های تکراری.

الف– روش‌های مستقیم: روش‌هایی هستند که در آن‌ها پس از تعداد متناهی عمل حسابی به جواب واقعی دستگاه می‌رسیم. استفاده از معکوس ماتریس ضرایب دستگاه (۱)، تجزیه‌ی LU، تجزیه‌ی QR، روش حذفی گوس[۱] و روش گوس – جردن[۲]، از جمله‌ی مهمترین روش‌های مستقیم برای حل دستگاه (۱) می‌باشند.

ب – روش‌های تکراری: در روش‌های تکراری با استفاده از یک حدس اولیه برای جواب دستگاه، دنباله‌ای از بردارها تولید می‌شود که به جواب دستگاه همگرا شود. روش‌های تکراری نیز به نوبه‌ی خود به دو نوع روش‌های تکراری ایستا[۳] و غیر ایستا[۴] تقسیم می‌شوند. در روش تکراری ایستا، ماتریس تکرار در همه‌ی گام‌های تکرار ثابت می‌باشد و تغییر نمی‌کند. به‌طور کلی در روش ایستا دستگاه (۱) را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$x = Gx + f. \tag{۲}$$

بنابراین دنباله‌ای مانند

$$x^{(k+۱)} = Gx^{(k)} + f,$$

---

[۱] Gaussian elimination

[۲] Gauss-Jordan elimination

[۳] Stationary iterative methods

[۴] Nonstationary iterative methods

ساخته می‌شود. شرایطی را فراهم می‌کنیم که این دنباله با هر نقطه شروع $x^{(0)}$، به جواب دستگاه (۱) یعنی $x^* = A^{-1}b$ همگرا باشد. به سادگی می‌توان ثابت کرد که اگر A یک ماتریس نامنفرد باشد، آنگاه شرط لازم و کافی برای اینکه روش تکراری $x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + f$ به ازای هر حدس اولیه‌ی $x^{(0)}$ به جواب دستگاه (۱) همگرا باشد این است که $\rho(G) < 1$.

در میان روش‌های تکراری ایستا، روش SOR[5] و روش‌های مربوط به آن، دارای اهمیت بیشتری می‌باشند. در فصل ۲ تعمیمی دو پارامتری از روش SOR و نتایج مربوط به آن ارائه می‌گردد که این روش را روش AOR[6] می‌نامند. همان طور که خواهیم دید روش های مشهور ژاکوبی[7]، گاوس — سایدل [8] و SOR حالت‌های خاصی از روش AOR هستند. از روش‌های تکراری غیر ایستا نیز می‌توان به روش‌های CG[9] [۱۲]، GMRES[10] [۱۹] و FOM[11] [۱۸] اشاره کرد.

سرعت همگرائی روش‌های تکراری برای حل دستگاه معادلات خطی (۱)، تحت تأثیر شعاع طیفی ماتریس A قرار دارد. یکی از راه‌های بهبود بخشیدن به سرعت همگرائی روش‌های تکراری، استفاده از ماتریس‌های پیش شرط‌ساز[12] است. پیش شرط‌سازها، دستگاه $Ax = b$ را به دستگاهی معادل (دستگاه پیش شرط‌سازی شده[13]) تبدیل می‌کنند به طوری که اولاً این دستگاه، جوابی یکسان با جواب دستگاه (۱) دارد و ثانیاً، شعاع طیفی کمتری را نسبت به آن دستگاه دارا می‌باشد. هدف اصلی این روش‌ها، تبدیل دستگاه اولیه به دستگاه پیش شرط‌سازی شده‌ی

$$PAx = Pb, \tag{۳}$$

می‌باشد که در آن P را ماتریس پیش شرط‌ساز می‌گویند. در مقاله‌ی [۱۱]، وانگ و سانگ پیش شرط‌ساز کلی P را معرفی می‌کنند که در آن، درایه‌های قطری P برابر با یک و درایه‌های غیر قطری آن نامنفی هستند و سپس در خصوص خواص P بحث می‌کنند. در این پایان‌نامه، این پیش شرط‌ساز را با جزئیات کامل بررسی می‌کنیم. پیش شرط‌سازهائی که

---

[5] Succeseive overrelaxation
[6] Accelerated overrelaxation
[7] Jacobi
[8] Gauss-Seidel
[9] Conjugate Gradient
[10] Generalized Minimal Residual
[11] Full Ortogonalization Method
[12] Preconditioners
[13] Preconditioning

توسط وانگ[۱۴] و هوآنگ[۱۵] در [۲۰]، ایوانز[۱۶] و همکاران در [۶]، کوهنو[۱۷] و همکاران در [۱۰]، گاناواردنا[۱۸] و همکاران در [۱]، کوتاکموری[۱۹] و همکاران در [۷]، حاجیدیموس[۲۰] و همکاران در[۴]، میلاشویچ[۲۱] و همکاران در [۹] و نیکی[۲۲] و همکاران در [۸] پیشنهاد شده‌اند، حالت‌های خاصی از ماتریس پیش شرط‌سازی می‌باشند که در این پایان‌نامه بررسی می‌شود.

این پایان نامه از فصل های زیر تشکیل شده است. در فصل اول، برخی از تعاریف و مفاهیم اولیه را بیان می‌کنیم. در فصل دوم، ضمن معرفی روش تکراری ایستای AOR، روش تکراری غیر ایستای GMRES که بر مبنای زیر فضاهای کرایلف می‌باشد را نیز مطالعه نموده و با روش GMRES پیش شرط‌سازی شده نیز آشنا خواهیم شد. در فصل سوم ماتریس‌های نامنفی را تعریف کرده و قضایای مهمی را در رابطه با این ماتریس‌ها بیان و ثابت می‌کنیم. در فصل چهارم، با ارائه‌ی یک پیش شرط‌ساز کلی برای دستگاه (۱)، قضایای مهمی را در رابطه با این ماتریس پیش شرط‌ساز و در نتیجه دستگاه پیش شرط‌سازی شده‌ی (۳)، بیان و ثابت می‌کنیم و سرانجام در فصل آخر، یک پیش شرط‌ساز دوطرفه را برای M- ماتریس‌ها پیشنهاد خواهیم کرد و با ارائه‌ی مثال‌هایی، کارائی این پیش شرط‌ساز دوطرفه و نیز کارائی پیش شرط‌ساز کلی بحث شده در فصل چهارم نسبت به پیش شرط‌سازهائی که تا به امروز توسط ریاضی‌دانان مختلف معرفی شده‌اند را نشان خواهیم داد.

---

[۱۴] Wang
[۱۵] Huang
[۱۶] Evans
[۱۷] Kohno
[۱۸] Gunawardena
[۱۹] Kotakemori
[۲۰] Hadjidimos
[۲۱] Milaszewicz
[۲۲] Niki

فصل ۱

مقدمات و مفاهیم اولیه

۱.۱ تعاریف

تعریف ۱. یک نرم برداری روی فضای برداری X، تابع‌ای است حقیقی مقدار مثل $\|.\|$ که در سه شرط زیر صدق می‌کند:

$$\text{a) } \|x\| \geq 0,\ \forall x \in X, \quad \text{و} \quad \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0,$$
$$\text{b) } \|\alpha x\| = |\alpha|.\|x\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad \forall x \in X,$$
$$\text{c) } \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in X.$$

مثال ۱: گیریم $X = \mathbb{C}$. در این صورت به ازای هر $p \geq 1$، p- نرم بردار $x = (x_1, \cdots, x_n)^T \in X$ به صورت

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p},$$

تعریف می‌شود. می‌توان دید که $\|.\|_p$ در خواص نرم صدق می‌کند. به ازای $p = 2$ نرم فوق را نرم اقلیدسی و به ازای $p = 1$، آن را نرم —۱ می‌نامند. به ازای $p = \infty$ داریم

$$\|x\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|x\|_p = \lim_{p \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} = \max_i |x_i|,$$

که این نرم را نرم بی‌نهایت یا نرم ماکزیمم گویند.

به همین ترتیب اگر X را فضای ماتریس‌های حقیقی $\Re^{n \times n}$ بگیریم، آنگاه برای هر ماتریس $A \in \Re^{n \times n}$، نرم –۱ و نرم بی‌نهایت ماتریسی را به شکل زیر تعریف می‌کنند:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |\ a_{ij}\ |,$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |\ a_{ij}\ |.$$

تعریف ۲. ترانهاده‌[1]ی ماتریس $A = (a_{ij}) \in \Re^{m \times n}$ را با A^T نشان می‌دهیم که (i,j) امین درایه‌ی آن برابر با درایه‌ی (j,i) ام ماتریس A است، یعنی $(A^T)_{ij} = a_{ji}$. ماتریس A را متقارن[2] گویند، هرگاه

$$A^T = A.$$

[1] Transpose
[2] symmmetric

حال فرض کنید $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$. در این صورت مزدوج[۳] ماتریس A عبارت است از $\overline{A} = (\overline{a}_{ij})$ و ترانهاده‌ی مزدوج[۴] A برابر است با $\overline{A}^T = \overline{A^T}$ که آن را با A^H یا A^* نشان می‌دهند. در حقیقت (i,j) امین درایه‌ی ماتریس A^H برابر است با مزدوج (j,i) امین درایه‌ی ماتریس A، یعنی $(A^H)_{ij} = \overline{a}_{ji}$. ماتریس A را هرمیتی[۵] گویند، هرگاه

$$A^H = A.$$

تعریف ۳. برای هر دو بردار $u, v \in \mathbb{C}^n$، ضرب داخلی این دو بردار را با (u,v) نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنند

$$(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \bar{v}_i u_i = v^H u.$$

تعریف ۴. بردارهای $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{C}^n$ را دو به دو متعامد گویند، هرگاه

$$(v_i, v_j) = v_j^H v_i = 0, \quad i \neq j,$$

در این صورت اگر قرار دهیم $V = (v_1, \ldots, v_k)$، آنگاه

$$V^H V = D,$$

که در آن D یک ماتریس قطری $k \times k$ است و بر عکس. در صورتی که $V^H V = I$، آنگاه V را یکانی می‌گویند و اگر ستون‌های V حقیقی بوده و داشته باشیم $V^T V = I$، آنگاه V را متعامد می‌گویند. در صورتی که V یک ماتریس یکانی باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$\|Vx\|_2 = \|x\|_2, \quad \forall x \in \mathbb{C}.$$

تعریف ۵. ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ را معین مثبت هرمیتی (HPD[۶]) گویند، هرگاه اولاً ماتریس A هرمیتی باشد و ثانیاً به ازای هر بردار غیر صفر $x \in \mathbb{C}^n$، داشته باشیم

$$x^H A x > 0.$$

[۳] conjugate
[۴] conjugate transpose
[۵] Hermitian
[۶] Hermitian Positive Definite

در صورتی که ماتریس مربعی A یک ماتریس حقیقی بوده و برداری مانند $x \in \Re^n$ موجود باشد به طوری که داشته باشیم

$$x^T A x > 0,$$

آنگاه A را یک ماتریس معین مثبت متقارن (SPD[۷]) می‌گویند.

تعریف ٦. فرض کنید که X یک مجموعه‌ی ناتهی از m بردار در فضای برداری V باشد. در این صورت گوییم X یک مجموعه‌ی وابسته‌ی خطی از بردارها است، اگر $k(\leq m)$ عضو متمایز v_1، v_2، ...، v_k در X و k اسکالر مانند α_1، α_2، ...، α_k که همگی صفر نیستند، وجود داشته باشند به طوری که

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = 0.$$

همچنین X یک مجموعه‌ی مستقل خطی از بردارها است، اگر برای هر دسته‌ی $k(\leq m)$ تایی از بردارهای متمایز v_1، v_2، ...، v_k در X و اسکالرهای α_1، α_2، ...، α_k، از عبارت

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = 0$$

نتیجه بگیریم که

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

تعریف ۷. فرض کنید (V, F) یک فضای برداری و $X = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ یک مجموعه‌ی k تایی از بردارهای V باشد. در این صورت مجموعه‌ی گسترنده‌ی X را با $\mathrm{span}(X)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$\mathrm{span}(X) = \mathrm{span}\{v_1, v_2, \cdots, v_k\} = \{v : v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k; \alpha_i \in F, v_i \in X\}.$$

تعریف ۸. فرض کنید (V, F) یک فضای برداری و $X \subseteq V$ باشد. در این صورت گوییم X یک پایه برای فضای برداری V است، هرگاه هر دو شرط زیر در مورد مجموعه‌ی X برقرار باشند:

الف) X یک مجموعه از بردارهای مستقل خطی باشد؛

[۷] Symmetric Positive Definite

ب) $\mathrm{span}(X) = V$.

تعریف ۹. فرض کنید $A = (a_{ij}) \in \Re^{n\times n}$. در این‌صورت
• ماتریس A را بالا (پایین) مثلثی[۸] گویند، هرگاه برای هر $i \geq j$ ($i \leq j$) داشته باشیم، $a_{ij} = ۰$.
به طریق مشابه ماتریس A را بالا (پایین) مثلثی اکید[۹] گویند، هرگاه برای هر $i > j$ ($i < j$) داشته باشیم، $a_{ij} = ۰$.
• A را یک ماتریس قطری[۱۰] گویند، هرگاه برای هر $i \neq j$ داشته باشیم، $a_{ij} = ۰$. ماتریس قطری A را به صورت زیر نشان می‌دهند

$$A = \mathrm{diag}(a_{۱۱}, a_{۲۲}, \ldots, a_{nn}).$$

• ماتریس A را همانی[۱۱] گویند، هرگاه $A = I = \{\delta_{ij}\}_{i,j=۱,\ldots,n}$ که δ_{ij} را دلتای کرونکر[۱۲] می‌گویند.
• ماتریس A را یک ماتریس جایگشت[۱۳] گویند، هرگاه ستون‌های آن، جایگشتی از ستون‌های ماتریس همانی باشند.
• ماتریس A را بطور بلوکی قطری[۱۴] گویند، هرگاه هر یک از درایه‌های قطری آن توسط یک ماتریس قطری جایگزین شده باشند. این ماتریس تعمیمی از ماتریس قطری بوده و به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$A = \mathrm{diag}(A_{۱۱}, A_{۲۲}, \ldots, A_{nn}).$$

• ماتریس A را نامنفرد[۱۵] گویند، هرگاه $\det(A) \neq ۰$ و آن را منفرد[۱۶] گویند، هرگاه داشته باشیم

$$\det(A) = ۰.$$

[۸] Upper (Lower) triangular
[۹] Strictly upper (Lower) triangular
[۱۰] Diagonal
[۱۱] Identity
[۱۲] Kronecker delta
[۱۳] Permutation
[۱۴] Block diagonal
[۱۵] Nonsingular
[۱۶] Singular

تعریف ۱۰. فرض کنید A یک ماتریس مربعی از مرتبه‌ی n باشد. در این صورت چندجمله‌ای مشخصه‌ی A را به صورت

$$p\ (\lambda) = \det(\lambda I - A),$$

تعریف می‌کنند. می‌توان دید که p یک چند جمله‌ای از درجه n است. ریشه‌های این چند جمله‌ای مقادیر ویژه‌ی A نامیده می‌شوند. مجموعه‌ی تمام مقادیر ویژه‌ی A را طیف A نامیده و با $\sigma(A)$ نشان می‌دهند. بزرگترین مقدار ویژه‌ی ماتریس A از حیث قدر مطلق را شعاع طیفی ماتریس A نامیده و با $\rho(A)$ نشان می‌دهند. به عبارت دیگر

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

همچنین برای هر نرم ماتریسی، داریم

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

قضیه ۱. فرض کنید ماتریس $A \in \Re^{n\times n}$ یک ماتریس متقارن باشد. در این صورت A یک ماتریس معین مثبت است، اگر و تنها اگر همه‌ی مقادیر ویژه‌ی A مثبت باشند.

اثبات: به [۵] مراجعه کنید. $\square$

قضیه ۲. (شکل کانونی جردن[۱۷]) برای هر ماتریس $A \in \Re^{n\times n}$ با مقادیر ویژه متمایز λ_1، λ_2، ...، λ_s، ماتریس نامنفردی چون P موجود است چنان که

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J(\lambda_s) \end{pmatrix},$$

و

$$J(\lambda_j) = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_j) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_j) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{t_j}(\lambda_j) \end{pmatrix}, \quad J_i(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \lambda_j & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j \end{pmatrix}.$$

---

[۱۷] Jordan canonical form

ماتریس J را شکل جردن[۱۸] ماتریس A می‌گویند.

اثبات: به [۱۶] مراجعه کنید. $\square$

تعریف ۱۱. ماتریس A را همگرا گوئیم، هرگاه $\lim\limits_{m\to\infty} A^m$ موجود و برابر صفر باشد.

قضیه ۳. فرض کنید $A \in \Re^{n\times n}$. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

(الف) $\lim\limits_{m\to\infty} A^m = 0$؛

(ب) $\rho(A) < 1$؛

(ج) سری $\sum\limits_{m=0}^{\infty} A^m$ همگراست (توجه داریم که $A^0 = I$).

در هر کدام از حالت های فوق، ماتریس $(I - A)$ معکوس‌پذیر است و

$$\sum_{m=0}^{\infty} A^m = (I - A)^{-1}.$$

اثبات (الف) $\Leftarrow$ **(ب):** فرض کنید

$$\lim_{m\to\infty} A^m = 0,$$

با توجه به فرم جردن ماتریس A، داریم

$$T^{-1}A^mT = \begin{pmatrix} J_1^m & & & & & \\ & J_2^m & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & J_i^m & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & J_r^m \end{pmatrix}.$$

یعنی $T^{-1}A^mT = J^m$. با حدگیری از طرفین این تساوی وقتی که $m \to \infty$ خواهیم داشت $\lim\limits_{m\to\infty} J^m = 0$. پس برای هر $1 \le i \le r$، $\lim\limits_{m\to\infty} J_i^m = 0$ و این ایجاب می‌کند که $\lim\limits_{m\to\infty} \lambda_i^m = 0$. لذا $|\lambda_i| < 1$ و در نتیجه $\rho(A) < 1$.

[۱۸] Jordan form

(ب) $\Leftarrow$ (ج): فرض کنید $\rho(A) < ۱$. در این صورت $|\lambda_i| < ۱$، که λ_i ها مقادیر ویژه‌ی A هستند. از طرفی با توجه به این که مقادیر ویژه $I - A$ به صورت $۱ - \lambda_i$ هستند، لذا ماتریس $I - A$ نامنفرد است. قرار می‌دهیم

$$S_m = I + A + A^{۲} + \cdots + A^m.$$

با ضرب طرفین رابطه‌ی فوق در $I - A$، خواهیم داشت

$$(I - A)S_m = I - A^{m+۱}.$$

با توجه به نامنفرد بودن $I - A$ می‌توان نوشت

$$S_m = (I - A)^{-۱}(I - A^{m+۱}).$$

حال از طرفین رابطه‌ی اخیر وقتی که $m \to \infty$ حد می‌گیریم، یعنی

$$\lim_{m\to\infty} S_m = \lim_{k\to\infty} (I - A)^{-۱}(I - A^{m+۱}).$$

اکنون با توجه به گزاره‌ی (الف)، خواهیم داشت

$$\lim_{m\to\infty} S_m = (I - A)^{-۱},$$

که اثبات را کامل می‌کند.

(ج) $\Leftarrow$ (الف): قبل از اثبات این قسمت، توجه کنید که بنا به شکل کانونی جردن ماتریس A، داریم

$$A^m = TJ^mT^{-۱} = \begin{pmatrix} J_۱^m & & & & & \\ & J_۲^m & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & J_i^m & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & J_r^m \end{pmatrix}.$$

بنابراین

$$\lim_{m\to\infty} A^m = ۰ \Leftrightarrow \lim_{m\to\infty} J_i^m = ۰, \quad i = ۱, ۲, \cdots, r.$$

فرض کنید $\dim(J_i) = n_i$ و قرار می‌دهیم $E_i = J_i - \lambda_i I_{n_i}$ که در آن I_{n_i} ماتریس همانی با بعد n_i است. با توجه به ساختار ماتریس E_i، داریم

$$E_i^j = \circ, \quad j \geq n_i.$$

برای هر $m \leq n_i$ داریم

$$\begin{aligned} J_i^m = (\lambda_i I_{n_i} + E_i)^m &= \sum_{j=\circ}^{m} \binom{m}{j} \lambda_i^{m-j} E_i^j \\ &= \sum_{j=\circ}^{n_i - ۱} \binom{m}{j} \lambda_i^{m-j} E_i^j. \end{aligned}$$

بنابراین برای هر نرم ماتریسی $\|.\|$ داریم

$$\|J_i^m\| \leq \sum_{j=\circ}^{n_i-۱} \binom{m}{j} |\lambda_i|^{m-j} \|E_i\|^j. \tag{۱}$$

با تعریف $M = \max\limits_{\circ \leq j \leq n_i - ۱} \|E_i\|^j$، داریم

$$\|J_i^m\| \leq M \sum_{j=\circ}^{n_i-۱} \binom{m}{j} |\lambda_i|^{m-j}.$$

حال فرض کنید که گزینه‌ی (ج) درست باشد. بنا به فرم کانونی جردن ماتریس A، داریم

$$T^{-۱} (\sum_{m=\circ}^{\infty} A^m) T = \sum_{m=\circ}^{\infty} J^m.$$

بنابراین $\sum\limits_{m=\circ}^{\infty} J^m$ و در نتیجه سری $\sum\limits_{m=\circ}^{\infty} J_i^m$ ، $i = ۱, ۲, \cdots, r$، همگراست. اما درایه‌های قطری $\sum\limits_{m=\circ}^{\infty} J_i^m$ به صورت $\sum\limits_{m=\circ}^{\infty} \lambda_i^m$ می‌باشند و در نتیجه هر کدام از سری‌های $\sum\limits_{m=\circ}^{\infty} \lambda_i^m$ ، $i = ۱, ۲, \cdots, r$ همگرا می‌باشند. لذا $|\lambda_i| < ۱$، $i = ۱, ۲, \cdots, r$ که نتیجه می‌دهد $\rho(A) < ۱$. اما از اینکه $|\lambda_i| < ۱$، $i = ۱, ۲, \cdots, r$، داریم:

$$\lim_{m \to \infty} \binom{m}{j} |\lambda_i|^{m-j} = \circ, \quad i = ۱, ۲, \cdots, r. \tag{۲}$$

بنابراین با توجه به روابط (۱) و (۲) داریم $\lim\limits_{m \to \infty} \|J_i^m\| = \circ$ ، $i = ۱, ۲, \cdots, r$. پس $\lim\limits_{m \to \infty} J_i^m = \circ$ ، $i = ۱, ۲, \cdots, r$ و در نتیجه $\lim\limits_{m \to \infty} A^m = \circ$. □

قضیه ۴. فرض کنید $A \in \Re^{n\times n}$. در این صورت برای هر نرم دلخواه $\|.\|$، داریم

$$\lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A).$$

اثبات: ابتدا توجه می‌کنیم که

$$\rho(A)^k = \rho(A^k) \leq \|A^k\|,$$

در نتیجه

$$\rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k}.$$

از طرفی از این که به ازای هر $\epsilon \geq 0$، $\rho(\frac{A}{\rho(A)+\epsilon}) < 1$، لذا بنا به قضیه‌ی ۲ داریم

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{A}{\rho(A)+\epsilon}\right)^k = 0,$$

یا

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|A^k\|}{(\rho(A)+\epsilon)^k} = 0.$$

در نتیجه یک عدد صحیح مثبت مانند K_ϵ وجود دارد به طوری که به ازای هر $k \geq K_\epsilon$، $\frac{\|A^k\|}{(\rho(A)+\epsilon)^k} < 1$. پس برای هر $k > K_\epsilon$ داریم:

$$\|A^k\|^{1/k} < \rho(A) + \epsilon,$$

و بنابراین

$$\begin{aligned}\rho(A) &\leq \|A^k\|^{1/k} \\ &< \rho(A) + \epsilon.\end{aligned}$$

با توجه به این که رابطه‌ی فوق به ازای هر $\epsilon \geq 0$ برقرار است نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A). \qquad \square$$

نتیجه۱. فرض کنید $A, B \in \Re^{n\times n}$ و $|A|$ نمایش ماتریسی با درایه های $|a_{ij}|$ باشد. در این‌صورت

الف) $\rho(A) \leq \rho(|A|)$؛