بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه

گراف توانی گروه‌های از مرتبه‌ی ۲pq

نگارش

جلال متقی توانا

استاد راهنما: دکتر فرزانه نوروزی لرکی

استاد مشاور: دکتر مجتبی قربانی

پایان نامه برای دریافت درجه ی کارشناسی ارشد

در رشته‌ی ریاضی محض

شهریور ۱۳۹۳

باسمه تعالی

تعهدنامه اصالت اثر

اینجانب **جلال متقی توانا** متعهد می‌شوم که مطالب مندرج در این پایان نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این پژوهش از آن‌ها استفاده شده است، مطابق مقررات ارجاع و در فهرست منابع و مأخذ ذکر گردیده است. این پایان‌نامه/رساله قبلاً برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارایه نشده است. در صورت اثبات تخلف(در هر زمان) مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از اعتبار ساقط خواهد شد.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی است.

نام و نام خانوادگی دانشجو
جلال متقی توانا

امضاء

تهران – لویزان -کدپستی – ۱۶۷۸۸ - صندوق پستی۱۶۳ – ۱۶۷۸۵تلفن ۲۲۹۷۰۰۶۰ نمابر ۲۲۹۷۰۰۰۳ پست الکترونیکی *sru@sru.ac.ir*

شماره : ۱۰۲۱/۱۴
تاریخ : ۹۳/۷/۱۰
پیوست : ....

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

بسمه تعالی

صورتجلسه دفاع پایان‌نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد آقای جلال متقی توانا رشته ریاضی محض تحت عنوان «گراف توانی گروه های از مرتبه (2pq)» در تاریخ ۱۳۹۳/۰۶/۳۰ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی برگزار گردید و نتیجه به شرح ذیل می‌باشد.

☐ قبول (با درجه بسیار خوب امتیاز ۱۸) ☐ دفاع مجدد ☐ مردود

۱. عالی (۲۰-۱۹)

۲. بسیار خوب (۱۸،۹۹-۱۸)

۳. خوب (۱۷،۹۹-۱۶)

۴. قابل قبول (۱۵،۹۹-۱۴)

۵. غیرقابل قبول (کمتر از ۱۴)

اعضاء	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
استاد راهنما	دکتر فرزانه نوروزی	استادیار	
استاد مشاور	دکتر مجتبی قربانی	استادیار	
داور داخلی	دکتر حمید رضا میمنی	استاد	
داور خارجی	دکتر زهره مستقیم	استادیار	
نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه	دکتر حمید رضا میمنی	استاد	

دکتر ایوب اسماعیل پور
رئیس دانشکده علوم پایه

تهران،لویزان،کد پستی:۱۵۸۱۱-۱۶۷۸۸
صندوق پستی: ۱۶۳-۱۶۷۸۵
تلفن: ۹-۲۲۹۷۰۰۶۰ فکس: ۲۲۹۷۰۰۲۳
Email: sru@sru.ac.ir
www.srttu.edu

تقدیم به

تقدیم به پیشگاه مقدس آقا امام زمان (عج) و همسرم به پاس قدردانی از قلبی آکنده از عشق و معرفت که محیطی سرشار از سلامت، امنیت، آرامش و آسایش برای من فراهم آورده است.

تقدیر و تشکر

برخود لازم می‌دانم که از زحمات استاد با کمالات و شایسته؛ سرکار دکتر خانم فرزانه نوروزی‌لرکی که در کمال سعه‌ی صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این پایان نامه را بر عهده گرفتند، کمال تشکر و سپاسگزاری را داشته‌باشم. همچنین قدردانی خود را نثار استاد محترم جناب آقای دکتر مجتبی قربانی می‌نمایم که تلاش‌ها، دلسوزی‌ها و همکاری‌های ایشان باعث دلگرمی و تشویق اینجانب بوده است.

چکیده

گراف توانی متناظر با گروه G، گرافی است که مجموعه رئوس آن گروه G است و دو عنصر x و y از G مجاورند اگر یکی توانی از دیگری باشد. در این پایان نامه گراف توانی گروه‌های از مرتبه‌ی ۲pq را بررسی می‌کنیم. نشان می‌دهیم چه عناصری از گراف توانی گروه‌های از مرتبه‌ی ۲pq با یک‌دیگر مجاور هستند. نمایش هندسی گراف توانی این خانواده از گروه‌ها را در صفحه رسم کرده، ماتریس مجاورت آن‌ها را به‌دست می‌آوریم. هم‌چنین نشان می‌دهیم این گراف‌ها همبند بوده، دارای قطر، شعاع و کمرهای برابر هستند، اما اویلری و مسطح نیستند. مرکز و محیط متفاوتی دارند، در خاصیت همیلتونی بودن با یک‌دیگر متمایزند، هم‌چنین دارای عدد رنگی، عدد خوشه‌ای و اندیس وینر متفاوتی هستند.

کلمات کلیدی: گروه، گراف‌های توانی، گراف‌های اویلری، گراف‌های همیلتونی.

مقدمه

گراف‌های تعریف شده بر نیم‌گروه‌ها یا گروه‌ها موضوع جدیدی نیستند. در سال ۱۹۶۴، بوساک[۱]، گراف مشخص را بر روی نیم‌گروه‌ها تعریف کرد [۱۴] و زلینکا[۲]، گراف‌های اشتراکی زیرگروه‌های غیربدیهی گروه‌های آبلی متناهی را مورد بررسی قرار داد [۱۵]. در سال ۲۰۰۲ کلارو[۳] و کویین[۴] دو خانواده از گراف‌های جهت‌دار به نام‌های گراف بخشی و گراف توانی را تعریف کردند [۱۶].

گراف توانی جهت‌دار نیم‌گروه یا گروه S، گرافی با مجموعه رئوس S است و یالی از x به y وجود دارد اگر و فقط اگر $x \neq y$ و $y = x^m$ برای عدد طبیعی m و آن را با $\overrightarrow{g(S)}$ نشان می‌دهیم. چاکربارتی[۵] گراف توانی غیرجهت‌دار را بر روی نیم‌گروه یا گروه S تعریف کرد و این گراف با مجموعه‌ی رئوس S است و دو رأس متمایز x و y مجاورند اگر و فقط اگر یکی توانی از دیگری باشد و آن را با $g(S)$ نشان می‌دهیم.

این پایان‌نامه شامل سه فصل است، در فصل اول ابتدا به تعاریف و قضایای مقدماتی گروه، گراف و گراف توانی اشاره می‌کنیم، سپس نمایش گروه‌های D_{2n} و $T_{p,q}$ را ارائه و در ادامه به برخی از تعاریف و مفاهیم نظریه ی اعداد اشاره می‌کنیم.

در فصل دوم ابتدا گروه‌های از مرتبه‌ی $2pq$ را معرفی می‌کنیم، سپس توان nام عناصر را در هر یک از گروه‌ها محاسبه می‌کنیم. همچنین عناصر را در هر یک از گروه‌ها به هفت بلوک تقسیم کرده، بررسی می‌کنیم در گراف توانی حاصل از عناصر در هر بلوک، عناصر با یک‌دیگر مجاور هستند یا خیر و در صورت مجاورت، الگویی برای آن می‌یابیم. هم‌چنین مجاورت عناصر را، در بلوک‌های مختلف نیز بررسی می‌کنیم.

در فصل سوم به کمک رابطه‌های بین عناصر نمایش هندسی هر گراف را در صفحه رسم می‌کنیم. ماتریس مجاورت هر گراف را به‌دست می‌آوریم. هم‌چنین نشان می‌دهیم هر گراف همبند است، دارای

---

[۱] - *Bosak*

[۲] - *Zelinka*

[۳] - *Kelrev*

[۴] - *Quinn*

[۵] - *Chakrabarty*

قطر، شعاع و کمرهای برابر هستند، اویلری و مسطح نیستند. مرکز و محیط متفاوتی دارند، در خاصیت همیلتونی بودن با یک‌دیگر متفاوتند، هم‌چنین دارای عدد رنگی، عدد خوشه‌ای و اندیس وینر متفاوتی هستند.

فهرست

فهرست مطالب

عنوان..صفحه

فهرست

فهرست جداول

عنوان..صفحه

فهرست

فهرست شکل‌ها

عنوان...صفحه

فهرست

فهرست علائم و اختصارات

فهرست

فصل ۱

مفاهیم پایه و قضایای مقدماتی

مقدمه

در این فصل به تعاریف و قضایایی که در فصل‌های آتی از آن‌ها استفاده می شود، اشاره می‌کنیم. تعریف و اثبات قضایا برگرفته از منابع [۱-۱۰] هستند.

۱-۱- تعاریف و قضایای مقدماتی گروه

۱-۱-۱- تعریف. اگر A مجموعه‌ای ناتهی باشد، هر تابع از $A\times A$ به توی A را یک عمل دوتایی در A می‌نامیم، مقدار این تابع را در زوج مرتب (x,y) از $A\times A$ با xy نشان می‌دهیم و آن را حاصل‌ضرب اعضای x و y می‌گوییم. یک **نیم‌گروه** متشکل از مجموعه‌ای ناتهی مانند G با عملی دوتایی و شرکت پذیر در آن است به عبارت دیگر؛ به ازای هر x، y و z از G داریم $(xy)z=x(yz)$. نیم‌گروه G را که دارای عضو همانی (عضو خنثی) و هر عنصرش دارای وارون باشد، **گروه** می‌نامیم.

۱-۱-۲- تعریف. مرتبه‌ی یک گروه متناهی G عبارت است از تعداد اعضای مجموعه G، که آن را با $|G|$ نمایش می‌دهند. اگر گروه G متناهی نباشد، آن را یک **گروه نامتناهی** می‌نامیم.

۱-۱-۳- تعریف. زیرمجموعه ناتهی H از گروه G را یک **زیرگروه** می‌نامیم، اگر H نسبت به عمل دوتایی G خود یک گروه باشد و در این‌صورت می‌نویسیم؛ $H\leq G$.

۱-۱-۴- تعریف. اگر عمل گروه G جابه‌جایی باشد، یعنی به ازای هر x و y از G، $xy = yx$ آن‌گاه گروه G را **آبلی** می‌نامیم.

۱-۱-۵- تعریف. هر گروه حداقل دو زیر گروه دارد، خود G و زیر گروهی که شامل فقط عنصر همانی است. اگر H زیرگروهی از G باشد ولی $H \neq G$، گوییم که H یک **زیرگروه سره** از G است. زیرگروه شامل فقط عضو همانی را **زیرگروه بدیهی** می‌نامند.

۱-۱-۶- تعریف. گروه G **دوری** است هرگاه عنصری مانند a در G وجود داشته‌باشد به طوری که هر x در G توانی از a باشد، یعنی عدد صحیحی مانند n موجود باشد که $x = a^n$. در این‌صورت a را مولد گروه دوری می‌نامیم و می‌نویسیم؛ $G = < a >$. به عبارت دیگر G دوری است اگر عضوی در Gمانند a موجود باشد به طوری‌که $G = < a > = \{a^n | a \in G , n \in Z\}$.

۱-۱-۷- قضیه. فرض کنید G گروهی دوری و متناهی از مرتبه‌ی n و d یک مقسوم علیه مثبت n باشد در این‌صورت، G دقیقاً یک زیر گروه از مرتبه‌ی d دارد.

برهان. ر.ک [۴] ص ۱۵۰.

۱-۱-۸- قضیه. فرض کنید $G = < a >$ یک گروه تولید شده توسط a، و e عنصر همانی آن باشد. اگر $|G| = d$، آن‌گاه d کوچکترین جواب مثبت معادله $a^x = e$ است و

$$G = \{a , a^۲ , \dots , a^{d-۱}, a^d = e\}.$$

برعکس، اگر d کوچکترین جواب مثبت معادله $a^x = e$ باشد، آن‌گاه G متناهی است و $|G| = d$.

برهان. ر .ک [۵] ص ۱۱۲.

۱-۱-۹- تعریف. به ازای $n \geq ۱$ ، $\varphi(n)$ نشان دهنده‌ی تعداد اعداد صحیح متباین با n و نابیشتر از n است و آن را تابع φ -اویلر می‌نامیم.

$$\varphi(n) = |\{k \in \mathbb{N} | \, gcd(k,n) = ۱ , k \leq n\}| \qquad (۱ - ۱۰)$$

۱-۱-۱۰- قضیه. فرض کنیم $G = < a >$ یک گروه تولید شده توسط a باشد.

الف) اگر G متناهی و از مرتبه‌ی d باشد، آن‌گاه a^k مولد است اگر و تنها اگر $(k , d) = ۱$.

ب) اگر G نامتناهی باشد، آن‌گاه $a^{-۱}$ و a تنها مولدهای G هستند.

برهان. ر .ک [۵] ص ۱۱۴.

۱-۱-۱۱- نتیجه. فرض کنید G یک گروه دوری متناهی از مرتبه‌ی d باشد. در این‌صورت G دارای $\varphi(d)$ مولد متمایز است که در آن φ تابع- فی اویلر است.

برهان. ر .ک [۵] ص ۱۱۴.

۱-۱-۱۲- قضیه. اگر Gیک گروه دوری و H زیرگروهی از G باشد، آن‌گاه H دوری است.

برهان . ر .ک [۵] ص ۱۱۵.

۱-۱-۱۳- قضیه. فرض کنید G یک گروه باشد و $a, b \in G$ به طوری که

الف) $ab = ba$،

ب) $(o(a) , o(b)) = ۱$.

در این‌صورت $o(ab) = o(a)o(b)$.

برهان. ر .ک[۵] ص ۱۱۷ .

۱-۱-۱۴- تعریف. فرض می‌کنیم $\mathbb{Z}_n = \{\overline{۰}, \overline{۱}, \overline{۲}, \dots, \overline{n-۱}\}$ باشد، که در آن $\bar{a}$ نمایش مانده‌ی a به پیمانه‌ی n است. مجموعه‌ی $\mathbb{Z}_n$ همراه عمل دوتایی+ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$\forall a, b \in \mathbb{Z}_n : \bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}.$

در این‌صورت $(\mathbb{Z}_n , +)$ یک گروه متناهی، آبلی و از مرتبه‌ی n می‌نامیم، این گروه را گروه اعداد صحیح به پیمانه n تحت جمع می‌نامیم.

اگر بر مجموعه‌ی $\mathbb{Z}_n{}^* = \{\overline{۱}, \overline{۲}, \dots, \overline{n-۱}\}$ عمل دوتایی ضربی را به صورت زیر تعریف کنیم:

$\forall a, b \in Z_n : \bar{a} . \bar{b} = \overline{ab}.$

در این‌صورت $(\mathbb{Z}_n , .)$ که دارای عنصر همانی است را مجموعه اعداد صحیح به پیمانه‌ی n تحت ضرب می‌نامیم.

۱-۱-۱۵- تعریف. قرار می‌دهیم $U_n = \{\bar{a}\epsilon\, \mathbb{Z}_n : gcd(\bar{a}, n) = ۱\}$ در این‌صورت U_n تحت ضرب $\bar{a}.\bar{b} = \overline{ab}$ یک گروه آبلی از مرتبه‌ی $\varphi(n)$ است.

نکته. $p\mathbb{Z}_{p^n}$ زیرنیم گروه دوری $\mathbb{Z}_{p^n}$ و تولید شده توسط $\bar{p} \in \mathbb{Z}_{p^n}$ است، یعنی؛

$$p\mathbb{Z}_{p^n} =< \bar{p} > = \left\{\overline{pk} \in \mathbb{Z}_{p^n} \,\middle|\, k = ۰,۱, \dots , p^{n-۱} - ۱\right\}.$$

نکته. نیم گروه $(\mathbb{Z}_n^{\ *} \ , \ .)$ گروه است اگر و فقط اگر n عددی اول باشد.

نکته. هر گروه دوری متناهی با $(\mathbb{Z}_n \, , +)$ و هر گروه دوری نامتناهی با $(\mathbb{Z} \, , +)$ یکریخت است.

۱-۱-۱۶- تعریف. فرض کنید G یک گروه باشد و $H \leq G$. اگر $a \in G$، آن‌گاه مجموعه‌ی $aH = \{ah|h \in H\}$ را یک **هم مجموعه چپ** H در G و مجموعه ی $Ha = \{ha|h \in H\}$ را یک **هم مجموعه راست** H در G، و در هر مورد، a را **نماینده‌ی** آن هم مجموعه می‌نامند.

۱-۱-۱۷- قضیه. فرض کنید H زیرگروهی از G باشد و $g_۱, g_۲ \in G$. در این‌صورت بین هر جفت از مجموعه‌های H، $g_۱H$، $g_۲H$ و $Hg_۲$ یک تناظر یک به یک برقرار است.

برهان. ر .ک [۳] ص ۱۲۵.

۱-۱-۱۸- نتیجه. فرض کنید G یک گروه متناهی باشد و $H \leq G$. اگر $g \in G$، آن‌گاه $|H| = |gH| = |Hg|$

برهان. ر .ک [۵] ص ۱۲۵.

۱-۱-۱۹- قضیه. فرض کنید Hزیرگروهی از G و aHو bHدو هم مجموعه چپ H در G باشند. در این‌صورت یا $aH = bH$یا $aH \cap bH = \emptyset$.

برهان. ر .ک [۵] ص ۱۲۶.

۱-۱-۲۰- قضیه. اگر G یک گروه متناهی باشد و $H \leq G$ ، آن‌گاه $|H| \,\Big|\, |G|$.

برهان. ر .ک [۵] ص ۱۲۶.

۱-۱-۲۱- نتیجه. مرتبه‌ی هر عنصر از گروه متناهی G مرتبه‌ی G را می‌شمارد.