بِسْمِ اللهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(پلی‌تکنیک تهران)

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

رشته آمار ریاضی

عنوان

استنباط بیزی برای توزیع‌های پایدار

نگارش

هادی زارع

استاد راهنما

دکتر عادل محمّدپور

استاد مشاور

دکتر سعید رضاخواه

شهریور ۱۳۸۶

بسمه تعالي

دانشگاه صنعتی امیر کبیر

معاونت پژوهشی

فرم اطلاعات پایان نامه

کارشناسی ارشد و دکترا

(پلی تکنیک تهران)

تاریخ :

پیوست :

نام و نام خانوادگی : هادی زارع

دانشجوی آزاد ☒ **بورسیه** ☐ **معادل** ☐

شمارهٔ دانشجوئی 84113003 **دانشکده :** ریاضی و علوم کامپیوتر **رشتهٔ تحصیلی : آمار ریاضی**

نام و نام خانوادگی استاد راهنما : دکتر عادل محمّدپور

عنوان پایان نامه به فارسی: استنباط بیزی برای توزیع‌های پایدار

عنوان پایان نامه به انگلیسی: Bayesian Inference for Stable Distributions

نوع پروژه : کارشناسی ارشد : ☒ **دکتـــــری** ☐ **کاربردی** ☒ **بنیادی** ☐ **توسعه ای** ☐ **نظری** ☐

تاریخ شروع : 1385/7/1 **تاریخ خاتمه :** 1386/6/18 **تعداد واحد :** 6

سازمان تأمین کننده اعتبار :

واژه های کلیدی به فارسی : استنباط بیزی، توزیع پایدار، روشهای MCMC، ماکسیمم درستنمایی

واژه های کلیدی به انگلیسی : Bayesian inference, Stable distribution, MCMC methods, Maximum likelihood

نظرها و پیشنهادها به منظور بهبود فعالیتهای پژوهشی دانشگاه :

استاد راهنما : دکتر عادل محمّدپور

دانشجو : هادی زارع

امضاء استاد راهنما : **تاریخ :**

نسخهٔ 1 : معاونت پژوهشی

نسخهٔ 2: کتابخانه و به انضمام دوجلد پایان نامه به منظور تسویه حساب با کتابخانه و مرکز اسناد و مدارک علمی

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

که همواره مورد لطف و محبت‌های بی دریغ آنها بوده‌ام.

قدردانی

ابتدا از پدر و مادر عزیزم که در طول دوران تحصیلی همیشه من را مورد لطف و محبّت‌های بی‌پایان خود قرار داده و همواره پشتیبانم بوده‌اند، صمیمانه تشکّر و سپاسگزاری می‌کنم.

جا دارد که از برادر عزیزم سجّاد که در برنامه‌نویسی پایان نامه کمک‌های شایانی کردند، صمیمانه تشکّر کنم.

از استاد راهنمای گرانقدرم آقای دکتر عادل محمّدپور که در این مدّت، هر چه در توان داشتند برای کمک و راهنمایی به من انجام دادند، بسیار سپاسگزارم.

همچنین جا دارد از آقای دکتر سعید رضاخواه که در امر مشاوره پایان نامه همکاری داشتند، تشکّر کنم.

همچنین از آقای دکتر افشین پرورده که با مطالعه پایان نامه نکات خوبی را متذکّر شدند، تشکّر می‌کنم.

در پایان از کلیه دوستان خوبم که همواره از راهنمایی و کمک آن‌ها برخوردار بودم، تشکّر و سپاسگزاری می‌کنم.

چکیده

در بسیاری از زمینه‌ها مانند مهندسی، فیزیک و اقتصاد، مدل گوسی عملکرد خوبی نداشته و برای برازش داده‌های چوله و دم‌سنگین مناسب نمی‌باشد. با استفاده از توزیع پایدار می‌توان داده‌های دم‌سنگین و چوله را به خوبی برازش کرد، ولی مشکلات استنباطی برای براورد پارامترهای آن به وجود می‌آید، که این مساله به عدم وجود تابع چگالی به فرم تحلیلی و نامتناهی بودن گشتاورهای بزرگ‌تر از α هنگامی که $\alpha \neq ۲$، مربوط می‌شود.

در این پایان نامه ابتدا توزیع‌های پایدار و روش‌های شبیه‌سازی مونت کارلوی زنجیر مارکفی معرفی می‌شوند. سپس روش‌های بیزی برای براورد پارامترهای توزیع‌های پایدار ارائه می‌شوند. در پایان با استفاده از آزمایش‌های شبیه‌سازی مونت کارلو، روش بیزی با روش ماکسیمم درستنمایی مقایسه می‌شوند. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که عملکرد روش بیزی از روش ماکسیمم درستنمایی بهتر می‌باشد.

کلمات کلیدی: روش‌های $MCMC$، توزیع های پایدار، استنباط بیزی، ماکسیمم درستنمایی

فهرست مطالب

فهرست اشکال

فهرست جداول

فصل ۱

مقدمه

توزیع نرمال یکی از توزیع‌های مهم آماری محسوب می‌شود که در مدل‌بندی پدیده‌های گوناگونی در زمینه‌های مختلف از آن استفاده می‌شود. خواص جالب این توزیع، مانند زنگی شکل بودن و تقارن باعث می‌شود که از نظر کاربردی یکی از انتخاب‌های مناسب برای برازش داده‌ها به شمار آید. از طرف دیگر قضیه حد مرکزی پشتوانه نظری لازم را برای بهره‌گیری از توزیع نرمال فراهم می‌کند. امّا در بعضی موارد توزیع نرمال برازش خوبی برای داده‌ها ایجاد نمی‌کند که این از نامتقارنی و دم سنگینی داده‌ها ناشی می‌شود. خانواده توزیع‌های پایدار یک انتخاب مناسب برای برازش چنین داده‌هایی به شمار می‌رود که این به خواص جالب این خانواده از توزیع‌ها مربوط می‌شود. توزیع‌های پایدار علاوه بر دارا بودن پارامترهای مقیاس و مکان، از دو پارامتر چولگی و مولفه مشخصّه سود می‌برند که باعث شده این خانواده برای داده‌های چوله و دم سنگین برازش خوبی به شمار رود. در حقیقت توزیع نرمال یکی از اعضای این خانواده از توزیع‌ها محسوب می‌شود. خانواده توزیع‌های پایدار غیر نرمال دارای خواص جالب و منحصر به فردی است که آن‌ها را از توزیع‌های متداول جدا می‌سازد که می‌توان به عدم وجود فرم تحلیلی برای تابع چگالی و عدم وجود واریانس برای آن‌ها اشاره کرد. از طرف دیگر قضیه حد مرکزی تعمیم یافته یک پشتوانه نظری قوی برای این خانواده است که بیان می‌کند، بدون توجه به وجود واریانس،

توزیع حدی مجموع متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع، در صورت وجود به یک متغیر تصادفی پایدار همگرا می‌شود.

توزیع‌های پایدار در سال‌های ۱۹۲۰ تا ۱۹۳۰ توسط پاول لوی[1] و الکساندر خینچین[2] معرفی شدند و از آن به بعد یکی از زمینه‌های مهم تحقیقاتی بوده و ریاضی‌دانان زیادی در این زمینه جالب کار کرده‌اند. امّا در عمل استفاده از این توزیع‌ها رواج زیادی پیدا نکرده‌است که این به علّت عدم وجود براوردگرهای کارا برای پارامترهای آن به دلیل مشکلات محاسباتی بوده است. در آمار کلاسیک چندین روش برای براورد پارامترها پیشنهاد شده است که از دقت و کارایی نسبتاً خوبی برخوردار هستند و باعث جلب توجه محققان علوم مختلف به این دسته از توزیع‌ها شده است. در حال حاضر از توزیع‌های پایدار در تحلیل بازارهای سهام و تحلیل سیگنال‌ها، پردازش تصاویر و تحلیل شبکه‌های مخابراتی استفاده می‌گردد.

در آمار بیز به دلیل عدم وجود فرم تحلیلی برای تابع چگالی و ناممکن بودن محاسبه توزیع پسین با استفاده از روش‌های معمول، تحقیقات زیادی در زمینه براورد پارامترهای توزیع پایدار صورت نگرفته است. برای اولین بار بوکل[3]، [۳]، با استفاده از نمونه‌گیر گیبز و با استفاده از استراتژی متغیر کمکی موفق به نمایش تابع چگالی توام در یک فرم تحلیلی برای توزیع‌های پایدار گردید و سپس با استفاده از روش‌های مونت کارلوی زنجیر مارکفی (MCMC) و نمونه‌گیری گیبز به براورد بیزی پارامترهای توزیع پایدار پرداخت. این روش به مدل‌های رگرسیونی با نوفه‌های پایدار نیز توسعه پیدا کرد، [۲۷]. تسیوناس [4]، [۳۰]، برای مدل‌های رگرسیونی با نوفه‌های پایدار متقارن، روشی را پیشنهاد کرد که بدون استفاده از متغیر کمکی، با بهره‌گیری از توزیع نرمال آمیخته و با به کارگیری روش‌های MCMC به

[1] Paul Levy

[2] Alexander Khinchin

[3] Buckel

[4] Tsionas

براورد بیزی برای این مدل‌ها پرداخت. لومباردی [5]، [۱۷]، با استفاده از روش‌های MCMC و با استفاده از روش، [۳۰]، راه‌کاری را ارائه کرد که با استفاده از روش متروپلیس قدم تصادفی و بدون نیاز به متغیر کمکی، می‌توان به شبیه‌سازی از توزیع پسین و براورد پارامترهای آن پرداخت.

در این پایان نامه به بررسی روش‌های موجود برای استنباط بیزی توزیع‌های پایدار پرداخته می‌شود و پس از معرفی روش‌ها، آن‌ها را مورد مقایسه قرار داده می‌شوند. در فصل دوم توزیع‌های پایدار و برخی از خواص مهم آن‌ها معرفی می‌شوند. روش‌های مونت کارلوی زنجیر مارکفی در فصل سوم مورد بررسی قرار داده می‌شوند و انواع مختلف آن شرح داده می‌شود. فصل چهارم اختصاص به بررسی روش‌های بیزی برای براورد پارامترهای توزیع پایدار یافته است. در فصل پنجم با استفاده از آزمایش‌های مونت کارلو، روش بیزی با روش ماکسیمم درستنمایی مورد مقایسه قرار داده می‌شود و نتایج به دست آمده مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرند.

[5] Lombardi

فصل ۲

توزیع‌های پایدار

توزیع‌های پایدار یک کلاس غنی از توزیع‌های احتمالی هستند که از خواص جالب نظری و کاربردی برخوردار هستند. اولین بار لوی[1] در ۱۹۲۰ توزیع‌های پایدار را در جریان مطالعات خود در مورد توزیع مجموع متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع معرفی کرد. بعد از لوی ریاضی‌دانان دیگری نیز روی این توزیع‌ها از لحاظ نظری کار کردند ولی در عمل کمتر از این توزیع‌ها استفاده می‌شد تا این که مندلبرات[2] [۱۸] با معرفی براوردهای ساده و بدون نیاز به محاسبات پیچیده، باعث جلب توجه آماردانان کاربردی به این خانواده شد و بعد از آن همراه با پیشرفت محاسباتی، در استفاده از توزیع‌های پایدار نیز افزوده شد که در این مسیر محققانی همچون فاما[3] [۹]، [۱۰] و دوموشل[4] [۷] نقش مهمی در معرفی این توزیع‌ها داشتند.

در ادامه این فصل ابتدا توزیع‌های پایدار تعریف می‌شوند، سپس برخی از خواص مهم این توزیع‌ها بررسی می‌گردند و در پایان چگونگی شبیه‌سازی از آن‌ها شرح داده می‌شود. مطالب این فصل بر اساس منابع [۲۹] و [۲۵] می‌باشد.

---

[1] Levy

[2] Mandelbrot

[3] Fama

[4] DuMuchel

۱.۲ تعریف توزیع‌های پایدار

برای توزیع‌های پایدار چهار تعریف آورده می‌شود که دو تعریف اول، خاصیّت پایداری را در بردارند به این معنا که آن‌ها تحت عمل جمع بسته هستند. سومین تعریف نقش توزیع‌های پایدار در قضیه حد مرکزی را بیان می‌کند و در آخرین و مهمترین تعریف از نظر کاربردی یک متغیر تصادفی پایدار بر اساس تابع مشخصّه تعریف می‌شود.

تعریف ۱.۱.۲ متغیر تصادفی X را دارای توزیع پایدار گویند اگر برای هر عدد مثبت B, A، اعداد $C > ۰$ و $D \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد به طوری که

$$AX_۱ + BX_۲ \overset{d}{=} CX + D \qquad (۱.۱.۲)$$

که $X_۲, X_۱$ مستقل و هم‌توزیع با X هستند.

یک متغیر تصادفی X را اکیداً پایدار گویند اگر (۲.۱.۱) برای $D = ۰$ برقرار باشد و متغیر تصادفی X را پایدار متقارن گویند اگر توزیع آن متقارن باشد.

قضیه ۲.۱.۲ . برای هر متغیر تصادفی پایدار X، یک عدد $\alpha \in (۰, ۲]$ وجود دارد به طوری که عدد C در (۲.۱.۱) برابر است با:

$$C^\alpha = A^\alpha + B^\alpha$$

به عدد α اندیس پایداری یا مولفه مشخصّه گفته می‌شود.

مثال ۳.۱.۲ اگر X یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$ باشد، آن‌گاه X یک متغیر تصادفی پایدار با مولفه مشخصّه $\alpha = ۲$ است زیرا

$$AX_۱ + BX_۲ \sim N\left((A+B)\mu, (A^۲ + B^۲)\sigma^۲\right)$$

یعنی (۲.۱.۱) برای $C = (A^۲ + B^۲)^{\frac{۱}{۲}}$, $D = (A + B - C)\mu$ برقرار است.

تعریف ۴.۱.۲ متغیر تصادفی X را دارای توزیع پایدار گویند اگر برای هر $n \geq ۲$، عدد مثبت C_n و عدد حقیقی D_n وجود داشته باشد به طوری‌که

$$X_۱ + X_۲ + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} C_n X + D_n \qquad (۲.۱.۲)$$

$X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با X می‌باشند.

معادل بودن تعریف (۲.۱.۲) با (۲.۱.۱) را به راحتی می‌توان نشان داد، [۲۹]. همچنین $C_n = n^{\frac{۱}{\alpha}}$ که $۰ < \alpha \leq ۲$ ، و این همان α اندیس مشخصّه است. اگر تعریف (۲.۱.۲) برای $n = ۲,۳$ برقرار باشد، آنگاه می‌توان نشان داد که X پایدار است.

تعریف ۵.۱.۲ (قضیه حد مرکزی تعمیم‌یافته) متغیر تصادفی X را دارای توزیع پایدار گویند اگر دامنه جذب داشته باشد، یعنی اگر دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع $Y_۱, Y_۲, \cdots$ و دنباله‌ای از اعداد مثبت $\{d_n\}$ و اعداد حقیقی $\{a_n\}$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که

$$\frac{Y_۱ + Y_۲ + \cdots + Y_n}{d_n} + a_n \stackrel{d}{\Longrightarrow} X \qquad (۳.۱.۲)$$

واضح است که از تعاریف قبلی می‌توان (۲.۱.۳) را به دست آورد، مثلاً اگر Y_iها مستقل و هم‌توزیع با X در نظر گرفته شوند.

وقتی X نرمال و Y_iها مستقل و هم‌توزیع با واریانس متناهی در نظر گرفته شوند، آنگاه (۲.۱.۳) بیان قضیه حد مرکزی معمولی است، که Y_iها متعلق به دامنه جذب نرمال X با $d_n = n^{\frac{۱}{\alpha}}$ می‌باشند. در حقیقت این تعریف معادل با قضیه حد مرکزی تعمیم‌یافته است که در بسیاری از کتاب‌ها به آن اشاره و اثبات شده است، (برای مثال [۱]).

تعریف ۶.۱.۲ متغیر تصادفی X دارای توزیع پایدار است اگر پارامترهای $۰ < \alpha \leq ۲$، $-۱ \leq \beta \leq ۱$، $\gamma > ۰$ و $\delta \in \mathbb{R}$ حقیقی وجود داشته باشند به طوری‌که تابع مشخصّه آن به فرم

زیر باشد:

$$\phi_1(t)=\begin{cases}\exp\left\{i\delta_1 t-\gamma^\alpha|t|^\alpha[1-i\beta sgn(t)\tan(\frac{\pi\alpha}{2})]\right\} & \alpha\neq 1,\\ \exp\left\{i\delta_1 t-\gamma|t|[1+i\beta\frac{2}{\pi}sgn(t)\ln|t|]\right\} & \alpha=1.\end{cases}\qquad (۲.۱.۴)$$

به پارامتر $\alpha\in(0,2]$ اندیس پایداری یا مولفه مشخصّه اطلاق می‌شود که میزان سنگینی دم‌ها را تعیین می‌کند به طوری که هر چه α کوچک‌تر باشد دم‌ها سنگین‌تر و هرچه α به ۲ نزدیک‌تر شود دم‌های توزیع سبک‌تر و چگالی متقارن‌تر خواهد شد. به پارامتر $\beta\in[-1,1]$ پارامتر چولگی اطلاق می‌شود به این‌معنی‌که β میزان چولگی توزیع را نشان می‌دهد که حالت تقارن متناظر با $\beta=0$ است. پارامترهای $\gamma>0$ و $\delta\in\mathbb{R}$، به ترتیب پارامترهای مقیاس و مکان توزیع می‌باشند.

تابع مشخصّه (۲.۱.۴) را می‌توان به شکل‌های دیگری نیز نوشت. اصطلاحی که در این‌جا به کار می‌رود پارامتربندی[5] است. در حقیقت پارامتربندی‌های زیادی برای تابع مشخصّه توزیع پایدار وجود دارند که هر کدام از آن‌ها دارای مزایا و معایب مخصوص به خود است. تابع مشخصّه در (۲.۱.۴) با پارامتربندی (۲.۱.۴) نشان داده می‌شود و با استفاده از آن می‌توان پارامترهای توزیع را به خوبی شرح داد. ولی پارامتربندی (۲.۱.۴) به دلیل ناپیوستگی در $\alpha=1$ و مشکلات محاسباتی کمتر مورد توجه است. توزیع پایدار در پارامتربندی (۲.۱.۴) با نماد $S_1(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ نمایش داده می‌شود.

برای حل مشکل ناپیوستگی پارامتربندی (۲.۱.۴) می‌توان تابع مشخصّه را به فرم زیر نمایش داد:

$$\phi_0(t)=\begin{cases}\exp\left\{i\delta_0 t-\gamma^\alpha|t|^\alpha\left[1+i\beta\mathrm{sgn}(t)\tan(\frac{\pi\alpha}{2})(|\gamma t|^{1-\alpha}-1)\right]\right\} & \alpha\neq 1,\\ \exp\left\{i\delta_0 t-\gamma|t|[1+i\beta\frac{2}{\pi}\mathrm{sgn}(t)\ln(\gamma|t|)]\right\} & \alpha=1.\end{cases}\qquad (۲.۱.۵)$$

برای این پارامتربندی، توزیع با نماد $S_0(\alpha,\beta,\gamma,\delta_0)$ نشان داده می‌شود. نمایش (۲.۱.۵) برای تابع مشخصّه کار را از لحاظ تحلیلی دشوارتر و معانی پارامترها را نیز دچار آشفتگی‌هایی

[5] Parameterization

می‌کند، ولی این نمایش برای کاربردهای آماری خیلی مفیدتر است و به طور معمول از آن استفاده می‌شود.

تنها تفاوت آن با پارامتربندی (۲.۱.۴) در پارامتر مکان است که دارای رابطه زیر با یکدیگر هستند:

$$\delta_0 = \begin{cases} \delta_1 + \beta\gamma\tan(\frac{\pi\alpha}{2}) & \alpha \neq 1, \\ \delta_1 + \beta\frac{2}{\pi}\gamma\ln\gamma & \alpha = 1. \end{cases}$$

پارامتربندی دیگری که در بعضی اوقات مورد استفاده قرار می‌گیرد و با نماد $S_2(\alpha, \beta_2, \gamma_2, \delta_1)$ نمایش داده می‌شود برابر است با:

$$\phi_2(t) = \begin{cases} \exp\left\{i\delta t - \gamma_2^\alpha|t|^\alpha \exp\left[-i\frac{\pi\beta_2}{2}\mathrm{sgn}(t)\min(\alpha, 2-\alpha)\right]\right\} & \alpha \neq 1, \\ \exp\left\{i\delta t - \gamma_2|t|\left[1 + i\beta_2\frac{2}{\pi}\mathrm{sgn}(t)\ln(\gamma_2|t|)\right]\right\} & \alpha = 1. \end{cases} \qquad (۲.۱.۶)$$

در پارامتربندی (۲.۱.۶) تابع چگالی نسبت به α پیوسته نیست. تصویر نامطلوب دیگر پارامتربندی (۲.۱.۶) برای تابع مشخصّه، مفهوم پارامتر چولگی β است که در رابطه با α به صورت زیر تغییر می‌کند:

وقتی $\alpha \in (0,1)$ ، β منفی به چولگی منفی دلالت دارد در حالی که برای $\alpha \in (1,2)$ ، β منفی به چولگی مثبت دلالت دارد. برای تبدیل پارامتربندی (۲.۱.۶) به پارامتربندی‌های (۲.۱.۵) و (۲.۱.۴) از روابط زیر استفاده می‌گردد (برای $\alpha \neq 1$):

$$\begin{aligned} \beta &= \cot\frac{\pi\alpha}{2}\tan\left(\frac{\pi\beta_2}{2}\min(\alpha, 2-\alpha)\right) \\ \gamma &= \gamma_2\left[\cos\left(\frac{\pi\beta_2}{2}\min(\alpha, 2-\alpha)\right)\right]^{\frac{1}{\alpha}} \end{aligned}$$

که در این‌جا پارامترهای α و δ بدون تغییر باقی می‌مانند.

توابع چگالی احتمال متغیرهای تصادفی α ـپایدار وجود دارند و پیوسته هستند ولی جز تعداد کمی، بقیّه به فرم تحلیلی قابل بیان نیستند. فرم‌های شناخته‌شده تابع چگالی برای خانواده پایدار عبارتند از:

الف. توزیع نرمال $N(\mu,\sigma^۲)=S_۰(۲,۰,\gamma,\delta)$ که $\mu=\delta$ و $\sigma^۲=۲\gamma^۲$ است.

ب. توزیع کشی $Cauchy(\mu,\sigma)=S_۰(۱,۰,\gamma,\delta)$ که $\gamma=\sigma$، $\delta=\mu$ و تابع چگالی آن به فرم زیر است:

$$f_X(x)=\frac{\sigma}{\pi((x-\mu)^۲+\sigma^۲)}$$

ج. توزیع لوی $S_۰(\frac{۱}{۲},۱,\gamma,\delta)$، $Levy(\mu,\sigma)$، که $\gamma=\sigma$، $\delta=\mu$، و دارای تابع چگالی $f_X(x)=\frac{\sigma}{۲\pi}^{\frac{۱}{۲}}\frac{۱}{(x-\mu)^{\frac{۳}{۲}}}\exp\{\frac{-\sigma}{۲(x-\mu)}\}$ متمرکز شده روی (μ,∞) است.

۲.۲ خواص متغیرهای تصادفی پایدار

در این بخش به برخی از خواص مهم متغیرهای تصادفی پایدار اشاره می‌شود. بیشتر این خواص برای پارامتربندی (۲.۱.۴) بدون اثبات بیان می‌شوند (برای اثبات رجوع شود به [۲۹]).

۱.۲.۲ مفهوم پارامترهای توزیع پایدار

پارامتر δ یک پارامتر مکان است زیرا

ویژگی ۱.۲.۲ فرض کنید $X\sim S(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ و $a\in\mathbb{R}$، آنگاه : $X+a\sim S(\alpha,\beta,\gamma,\delta+a)$

ویژگی زیر نشان می‌دهد که پارامتر γ یک پارامتر مقیاسی است.

ویژگی ۲.۲.۲ اگر $X\sim S(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ و $a\neq ۰$ یک عدد حقیقی مخالف صفر باشد، آنگاه:

$$\begin{aligned} &aX\sim S(\alpha,sgn(t)\beta,|a|\gamma,a\delta) && \alpha\neq ۱;\\ &aX\sim S(۱,sgn(t)\beta,|a|\gamma,a\delta-\tfrac{۲}{\pi}a(\ln|a|)\gamma\beta) && \alpha=۱. \end{aligned}$$