بسم الله الرحمن الرحیم

باسمه تعالی

تعهد نامه اصالت اثر

اینجانب **مهشید حسن پور** متعهد می‌شوم که مطالب مندرج در این پایان‌نامه/ رساله حاصل کار پژوهشی اینجانب است و دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این پژوهش استفاده شده است، مطابق مقررات ارجاع و در فهرست منابع و مآخذ ذکر گردیده است. این پایان‌نامه قبلا برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است. در صورت اثبات تخلف (در هر زمان) مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از اعتبار ساقط خواهد شد.

مهشید حسن پور

امضا

تهران - لویزان - کدپستی ۱۶۷۸۸۱۵۸۱۱ - صندوق پستی ۱۳۶-۱۶۷۸۵ - تلفن ۹-۲۲۹۷۰۰۶۰

نمابر ۲۲۹۷۰۰۳۳ - پست الکترونیکی: **sru@sru.ac.ir**

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی

دانشکده علوم پایه

درباره‌ی بعد متریک گراف‌ها

نگارش

مهشید حسن پور

استاد راهنما: **حمید رضا میمنی**

استاد مشاور: **عبد الرضا اسکوئی**

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض

خرداد ماه ۱۳۹۳

شماره: ۹۵۳/۱۴
تاریخ: ۱۳۹۳/۰۶/۰۴
پیوست:

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

بسمه تعالی

صورتجلسه دفاع پایان‌نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد خانم مهشید حسن پور رشته ریاضی محض تحت عنوان «درباره ی بعد متریک گراف ها» در تاریخ ۱۳۹۳/۰۳/۳۱ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی برگزار گردید و نتیجه به شرح ذیل می‌باشد.

☐ قبول (با درجه ......عالی...... امتیاز ۱۹/۲۵) ☐ دفاع مجدد ☐ مردود

۱. عالی (۲۰-۱۹)
۲. بسیار خوب (۱۸٫۹۹-۱۸)
۳. خوب (۱۷٫۹۹-۱۶)
۴. قابل قبول (۱۵٫۹۹-۱۴)
۵. غیرقابل قبول (کمتر از ۱۴)

اعضاء	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
استاد راهنما	دکتر حمید رضا میمنی	استاد	
استاد مشاور	عبدالرضا اسکوئی	مربی	
داور داخلی	دکتر فرحبخش کمالی	استادیار	
داور خارجی	دکتر سیامک یاسمی	استاد	
نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه	دکتر فرحبخش کمالی	استادیار	

دکتر ایوب اسماعیل پور
رئیس دانشکده علوم پایه

تهران، لویزان، کد پستی: ۱۶۷۸۸-۱۵۸۱۱
صندوق پستی: ۱۶۳-۱۶۷۸۵
تلفن: ۹-۲۲۹۷۰۰۶۰ فکس: ۲۲۹۷۰۰۳۳
Email:sru@sru.ac.ir
www.srttu.edu

تقدیم به

آموزگاران راه زندگی

پدر مهربان و مادر فداکارم

لاله و همای عزیز

و

تقدیم به روان پاک مهتاب مهربان و صبورم

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که همیشه پشتیبان من بودند.

تشکر

اینک که به فضل خداوند این پایان‌نامه به سرانجام رسیده، وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد گرامی دکتر حمیدرضا میمنی به خاطر راهنمایی‌ها و زحمات فراوانشان با سمت استاد راهنما، استاد ارجمند دکتر علی زعیم باشی و استاد عبدالرضا اسکویی با سمت استاد مشاور تشکر کنم.

چکیده

برای مجموعه مرتب شده $W = \{w_1, w_2, ..., w_k\}$ از رئوس و رأس v در گراف همبند G، نمایش v نسبت به W، بردار k-تایی

$$c_W = (d(v, w_1), d(v, w_2), .., d(v, w_k))$$

است که $d(x, y)$ نمایش فاصله بین دو رأس x, y است. مجموعه W جداکننده‌ای برای G است هرگاه رئوس متمایز G، دارای نمایش‌های متمایزی نسبت به W باشند. مینیمم اندازه یک مجموعه جداکننده G، بعد متریک آن ارائه شده است. همچنین بعد متریک خانواده‌های کلاسیک از گراف‌ها بررسی شده است. خانواده‌هایی از گراف‌ها که دارای مرتبه n هستند و بعد متریک آن‌ها ۱، $n - 1$ یا $n - 2$ است مشخص شده است و فرمولی برای محاسبه بعد متریک درخت ارائه شده است. همچنین بعد متریک حاصل‌ضرب دکارتی $G \square H$ و حاصل‌ضرب تاجی $G \odot H$ بررسی شده است. در ادامه بعد متریک گراف خطی $L(G)$ از گراف G مطالعه شده است. در نگارش این پایان‌نامه بیشتر از مراجع [۲]،[۴]، [۷]و [۹] استفاده شده است.

کلمات کلیدی: فاصله، مجموعه جداکننده، پایه متریک، بعد متریک، حاصل‌ضرب دکارتی، حاصل‌ضرب تاجی، گراف خطی.

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

مقدمه

مفهوم جدایی پذیری و موقعیت در گراف‌ها اولین بار توسط هرری[۱] و ملتر[۲] و مستقلا اسلیتر[۳] در سال ۱۹۵۷ ارائه شد. ایده‌ی این موضوع از شیمی نشأت گرفته شده است. در واقع یک مسأله بنیادی در شیمی تأمین نمایش‌های ریاضی برای مجموعه‌ای از ترکیبات شیمیایی است به طریقی که ترکیبات متمایز نمایش‌های متمایز داشته باشند. ساختمان یک ترکیب شیمیایی را می‌توان به‌صورت گرافی نمایش داد که برچسب‌های رئوس و یال‌های آن به‌ترتیب نشان‌دهنده‌ی اتم‌ها و انواع پیوندهای بین آن‌ها است. پس یک تعبیر نظری گراف از این مسأله تأمین نمایش‌هایی برای رئوس گراف متناظر به طریقی است که رئوس متمایز نمایش‌های متمایز داشته باشند.

این مفهوم همچنین در حل مسائل معروف به مسائل سنجش سکه کاربرد دارد. یکی از این مسائل به این شرح است:

n سکه داریم، تعدادی از آن‌ها ۱۰ گرمی(اصل) و باقی آن‌ها ۹ گرمی(تقلبی) هستند. چه تعداد سنجش وزنی برای زیر مجموعه‌ای از سکه‌ها لازم است تا تمام سکه‌های تقلبی را پیدا کنیم؟

همچنین اسلیتر کاربرد این مفهوم را در هدایت و ناوبری روبات‌ها مطرح کرد. از کاربردهای دیگر این مفهوم می‌توان به بهینه‌سازی ترکیبی، قدرت تشخیص زیر دریایی‌ها به کمک امواج صوتی و تعیین موقعیت یک مزاحم در یک شبکه اشاره کرد.

چارترند[۴] و همکارانش در مرجع[۴] کران‌هایی را برای بعد متریک گراف همبند G بدست آوردند و بعد متریک خانواده‌هایی کلاسیک از گراف‌ها مثل درخت‌ها، مسیرها و گراف‌های کامل را مشخص کردند.

مطالعات دیگری در مراجع [۲] و [۱۱] بعد متریک حاصل‌ضرب دکارتی و حاصل‌ضرب کرونای دو گراف را مشخص کردند.

در مرجع [۷] بعد متریک گراف خطی $L(G)$ از گراف G بررسی شده است. همچنین جان‌نثاری[۵] در مرجع [۹] برای بعد متریک گراف همبند G که دارای دور است، کرانی برحسب کمر گراف و مرتبه آن بدست آورده است.

---

[۱] Harary
[۲] Melter
[۳] Slater
[۴] Chartrand
[۵] Jannesari

در این پایان‌نامه به این مطالعات و دستاوردها در زمینه بعد متریک پرداخته شده است.

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

در این فصل به معرفی مفاهیم مقدماتی لازم برای این پایان‌نامه مانند فاصله، همسایگی باز، همسایگی بسته، رأس جداکننده، مجموعه جداکننده، پایه متریک و بعد متریک می‌پردازیم. در ادامه قضایایی درباره بعد متریک خانواده‌هایی ازگراف‌ها بیان می‌کنیم.

۱.۱ مفاهیم اولیه

در سرتاسر این بخش فرض می‌کنیم که گراف‌های مورد بحث، گراف‌هایی همبند و ساده هستند. برای نوشتن مطالب این بخش از مراجع[۱] ، [۴] و [۵] استفاده شده است.

تعریف ۱.۱.۱. *فاصله دو رأس u, v در گراف G برابر کوتاهترین مسیر بین آنهاست که با $d(u, v)$ نمایش داده می‌شود.*

تعریف ۲.۱.۱. *اگر دو رأس مجاور u و v از گراف $G = (V, E)$ را با نماد $u \sim v$ نمایش دهیم، برای رأس v در G، همسایگی باز v در G که با $N_G(v)$ نمایش داده می‌شود، برابر مجموعه همسایه‌های v در G است. به‌عبارت دیگر $N_G(v) = \{u \in V : u \sim v\}$. مجموعه $N_G[v] = N_G(v) \bigcup \{v\}$ همسایگی بسته v در G نامیده می‌شود.*

تعریف ۳.۱.۱. *گوییم رأس $w \in V(G)$ دو رأس u و v را جدا می‌کند هرگاه*

$$d(u, w) \neq d(v, w).$$

تعریف ۴.۱.۱. *گوییم $W \subseteq V$ یک مجموعه جداکننده G است هرگاه، برای هر دو رأس متمایز u و v، رأس $w \in W$ موجود باشد که دو رأس u, v را جدا کند.*

نمادگذاری ۵.۱.۱. *فرض‌کنید* $W = \{w_۱, w_۲, ..., w_k\}$ *زیر مجموعه‌ای مرتب از رئوس* G *باشد که از ۱ تا* k *برچسب گذاری شده است،* k *تایی مرتب*

$$r(v|W) = (d(v, w_۱), d(v, w_۲), ..., d(v, w_k))$$

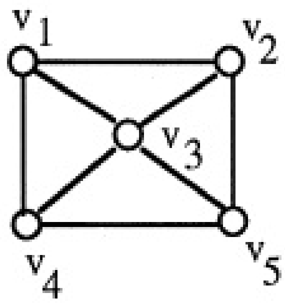
را نمایش v *نسبت به* W *می‌نامیم.*

تعریف ۶.۱.۱. *مجموعه* W *مجموعه جداکننده* G *است هر گاه برای هر دو رأس* u, v *از* G *تساوی* $r(u|W) = r(v|W)$*، ایجاب کند* $u = v$.

تعریف ۷.۱.۱. *مجموعه جداکننده گراف* G *را که دارای کمترین اندازه است، پایه متریک گراف* G *می‌نامند.*

تعریف ۸.۱.۱. *بعد متریک گراف* G *که با* $dim(G)$ *یا* $\mu(G)$ *نمایش داده می‌شود برابر مینیمم اندازه مجموعه جداکننده* G *است.*

مثال ۹.۱.۱. *گراف* G *را در شکل (۱.۱) در نظر بگیرید.*



شکل ۱.۱: گراف G

مجموعه $W_۱ = \{v_۱, v_۳\}$ *جداکننده* G *نیست، چون* $r(v_۲|W_۱) = (۱, ۱) = r(v_۴|W_۱)$*. از طرفی مجموعه* $W_۲ = \{v_۱, v_۲, v_۳\}$ *جداکننده* G *است، زیرا نمایش‌های رئوس* G *نسبت به* $W_۲$ *عبارتند از:*

$$r(v_۱|W_۲) = (۰, ۱, ۱), \qquad r(v_۲|W_۲) = (۱, ۰, ۱), \qquad r(v_۳|W_۲) = (۱, ۱, ۰)$$

$$r(v_۴|W_۲) = (۱, ۲, ۱), \qquad r(v_۵|W_۲) = (۲, ۱, ۱).$$

چون $W_3 = \{v_1, v_2\}$ نیز، مجموعه‌ای جداکننده از اندازه کوچکتر برای G است و هیچ رأس تنهایی جداکننده G نیست، لذا W_3 یک پایه گراف و $dim(G) = 2$ است.

نکته ۱۰.۱.۱. *توجه کنید که برای هر گراف همبند G و هر زیر مجموعه مرتب $W = \{w_1, w_2, ..., w_k\}$ از رئوس G، i امین مختصات $r(w_i|W)$ برابر صفر است و i امین مختصات نمایش رئوس دیگر G نسبت به W عددی مثبت است. بنابراین برای بررسی اینکه مجموعه $W \subseteq V(G)$ مجموعه جداکننده G هست یا نه، کافیست رئوس $V(G) - W$ را مورد توجه قرار دهیم.*

نتیجه ۱۱.۱.۱. *زیر مجموعه‌های $V(G)$ و $V(G) - \{v\}$ (برای هر $v \in V(G)$) دو مجموعه جداکننده برای هر گراف همبند غیر بدیهی G هستند.*

نتیجه ۱۲.۱.۱. *اگر G گرافی همبند از مرتبه $n \geqslant 2$ باشد، آنگاه*

$$1 \leqslant dim(G) \leqslant n - 1.$$

۲.۱ کران‌هایی برای بعد متریک گراف

در این بخش کران‌هایی بر حسب قطر یا ماکسیمم درجه گراف برای بعد متریک ارائه خواهیم داد.

تعریف ۱.۲.۱. *برای دو عدد صحیح مثبت n و d، نماد $f(n,d)$ برابر کوچکترین عدد صحیح مثبت k است که در نامساوی $k + d^k \geqslant n$ صدق کند.*

قضیه ۲.۲.۱. *[۴] اگر G گرافی همبند از مرتبه $n \geqslant 2$ و قطر d باشد، آنگاه*

$$f(n,d) \leqslant dim(G) \leqslant n - d.$$

اثبات. ابتدا کران بالا را می‌سازیم. فرض‌کنید $u, v \in V(G)$ به‌طوری‌که $d(u,v) = d$ و فرض‌کنید $u = v_0, v_1, ..., v_d = v$ ، $u - v$ مسیری به‌طول d باشد. فرض‌کنید

$$W = V(G) - \{v_1, v_2, ..., v_d\}.$$

چون برای $1 \leqslant i \leqslant d$ و $u \in W$ داریم $d(u, v_i) = i$. درنتیجه W مجموعه جدا کننده G با اندازه $n - d$ است. بنابراین $dim(G) \leqslant n - d$.

حال کران پایین را در نظر بگیرید. فرض‌کنید B پایه‌ای برای G با اندازه k باشد. چون نمایش هر رأس از $V(G)-B$ نسبت به B برداری k -تایی است که هر مختص آن عدد صحیح نابیشتر از d است و تمام $n-k$ تا نمایش از بردارهای k -تایی متمایز هستند، در نتیجه

$$d^k \geqslant n-k \Longrightarrow k+d^k \geqslant n \Longrightarrow f(n,d) \leqslant k = dim(G).$$

■

نامساوی داده شده در کران بالای قضیه(۱.۲.۲)دقیق است.

لم ۳.۲.۱. *برای گراف همبند G، اگر $dim(G) \geqslant ۲$ و $d = diam(G) \geqslant ۴$، آنگاه کران پایین در قضیه (۱.۲.۲) نمی‌تواند دقیق باشد.*

اثبات. برعکس، فرض‌کنید گراف G از مرتبه n، قطر $d \geqslant ۴$ و $dim(G) = k \geqslant ۲$ وجود دارد که $k+d^k = n$. مجموعه $W = \{w_۱, w_۲, ..., w_k\}$ را پایه‌ای برای G درنظر بگیرید.

دراین‌صورت تمام k -تایی‌هایی که مؤلفه‌های آن‌ها اعداد صحیح مثبت نابیشتر از d هستند باید به‌عنوان نمایش رأسی از رئوس G نسبت به W ظاهر شوند. زیرا تعداد آن‌ها برابر $d^k = n-k$ است. چون k -تایی $(۱, ۱, ..., ۱)$ ظاهر می‌شود، پس

$$d(w_۱, w_۲) \leqslant ۲.$$

برای رأسی مانند v از G داریم $r(v|W) = (۱, ۴, ...)$. درنتیجه $d(v, w_۱) = ۱$. اما،

$$d(v, w_۲) = ۴ > ۱ + ۲ \geqslant d(v, w_۱) + d(w_۱, w_۲) \text{ ،}$$

که با نامساوی مثلثی در تناقض است. پس چنین گرافی وجود ندارد. ■

حال کران پایین دقیق‌تری برای بعد متریک گراف همبند G بر حسب ماکسیمم درجه آن که با $\Delta(G)$ نمایش داده می‌شود ارائه می‌دهیم.

قضیه ۴.۲.۱. [۵] *اگر G گرافی غیر بدیهی و همبند باشد، آنگاه*

$$dim(G) \geqslant \lceil log_۳(\Delta(G)+۱) \rceil.$$

اثبات. فرض‌کنید $dim(G)=k$ و $v\in V(G)$ رأسی از درجه $\Delta(G)$ باشد. به‌علاوه $N(v)$ را همسایگی باز v و $B=\{u_۱,u_۲,\ldots,u_k\}$ را پایه‌ای برای G بگیرید.

اگر $u\in N(v)$ آنگاه برای $d(u,u_i)$ سه حالت وجود دارد.

حالت ۱) $d(u,u_i)=d(v,u_i)$.

حالت ۲) $d(u,u_i)<d(v,u_i)$. در این‌حالت چون $u\sim v$، داریم

$$d(u,u_i)=d(v,u_i)-۱.$$

حالت ۳) $d(u,u_i)>d(v,u_i)$. در این‌حالت چون $u\sim v$، داریم

$$d(u,u_i)=d(v,u_i)+۱.$$

بنابراین $d(u,u_i)$ برای هر $۱\leqslant i\leqslant k$ برابر یکی از مقادیر $d(v,u_i)$، $d(v,u_i)+۱$ یا $d(v,u_i)-۱$ است. به‌علاوه $\Delta(G)=|N(v)|$. با سه مقدار بالا ۳^k تا k-تایی متمایز می‌توان نوشت. چون نمایش رئوس $N(v)$ نسبت به B، k - تایی های متمایز هستند داریم $\Delta(G)\leqslant ۳^k-۱$، درنتیجه

$$log_۳ ۳^k\geqslant log_۳(\Delta(G)+۱)،$$

لذا حکم برقرار خواهد شد. ■

نکته ۵.۲.۱. *حالت تساوی برای این کران پایین همیشه می‌تواند برقرار باشد. یعنی برای هر دو عدد صحیح k و Δ که در رابطه $۳^k=\Delta+۱$ صدق کنند، گراف همبند $G_{k,\Delta}$ وجود دارد به‌طوری‌که*

$$\Delta(G_{k,\Delta})=\Delta \text{ و } dim(G_{k,\Delta})=k.$$

۳.۱ بعد متریک خانواده‌های کلاسیک از گراف‌ها

دراین بخش گراف‌هایی از مرتبه n که دارای بعد ۱، $n-۱$ یا $n-۲$ هستند مشخص شده و فرمولی برای بعد متریک درخت ارائه خواهد شد.

قضیه ۱.۳.۱. [۴] *گراف همبند G از مرتبه n دارای بعد یک است، اگر و فقط اگر $G=P_n$.*

اثبات. اگر $G=P_n$، دراین‌صورت $d=diam(G)=n-۱$ و $f(n,d)=۱$. از قضیه (۲.۲.۱) داریم

$$f(n, n-۱) \leqslant dim(P_n) \leqslant n-(n-۱).$$

بنابراین $dim(G) = ۱$.

برای عکس، فرض‌کنید G گراف همبندی با $dim(G) = ۱$ و $W = \{w\}$ پایه‌ای برای آن باشد. برای هر رأس v از G، $r(v|W) = d(v, w)$ یک عدد صحیح مثبت کمتر از n است. چون نمایش رئوس G نسبت به W متمایز هستند پس رأس $u \in V(G)$ وجود دارد به‌طوری‌که $d(u, w) = n-۱$. درنتیجه $diam(G) = n-۱$، که ایجاب می‌کند $G = P_n$. ■

قضیه ۲.۳.۱. [۴] *گراف همبند G از مرتبه $n \geqslant ۲$ دارای بعد $n-۱$ است، اگر و فقط اگر* $G = K_n$.

اثبات. گراف G را گراف کامل K_n در نظر بگیرید که $n \geqslant ۲$ و W را پایه‌ای برای آن درنظر بگیرید. اگر $u \notin W$، هر مولفه از $r(u|W)$ برابر ۱ است. بنابراین هر مجموعه جداکننده G باید شامل تمام رئوس بغیر از یکی از آن‌ها باشد. پس $dim(G) = n-۱$.

برای عکس قضیه فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه $n \geqslant ۲$ با $dim(G) = n-۱$ باشد که کامل نیست، پس بنابه قضیه (۲.۲.۱) داریم $dim(G) \leqslant n-۲$ و تناقض حاصل می‌شود. پس $G = K_n$. ■

لم ۳.۳.۱. *فرض کنید G گرافی همبند باشد که مجموعه رئوس آن به $V_۱ \cup V_۲ \cup \ldots \cup V_p$ افراز شوند به‌طوری‌که برای $(۱ \leqslant i \leqslant p)$، V_i مستقل باشد و رئوس آن همسایگی باز یکسان داشته باشند یا V_i یک خوشه را القا کند و رئوس آن همسایگی‌های بسته یکسان داشته باشند، دراین‌صورت*

$$dim(G) \geqslant (|V_۱|-۱)+\ldots+(|V_p|-۱)$$

اثبات. اگر S جداکننده G باشد، آنگاه

$$S = S \cap V = S \cap (V_۱ \cup \ldots \cup V_p) = \cup_{i=۱}^{P}(S \cap V_i).$$

درنتیجه $|S| = \sum_{i=۱}^{P}|S \cap V_i|$. فرض کنید $S = \{x_۱, \ldots, x_t\}$ و $۱ \leqslant i \leqslant P$ وجود دارد که $|S_i| \leqslant |V_i|-۲$.

دراین‌صورت حداقل دو رأس در V_i داریم که در S نیست.

فرض کنید $v_۱, v_۲ \in V_i - S$. دو حالت را درنظر می‌گیریم.

حالت ۱) برای هر $x_j \in S$ که $x_j \in V_i$ دو زیرحالت را در نظر می‌گیریم.

زیرحالت ۱) رئوس V_i مستقل باشند. دراین‌صورت $v_۱, v_۲, x_j$ مستقل هستند. پس همسایگی باز یکسان دارند. یعنی با رأسی مانند v_m متعلق به $V_k(k \neq i)$ مجاورند. درنتیجه

$$d(v_۱, x_j) = d(v_۲, x_j).$$

زیرحالت ۲) رئوس V_i مستقل نباشند، پس V_i یک خوشه القا می‌کند که دراین‌صورت هم

$$d(v_۱, x_j) = d(v_۲, x_j).$$

حالت ۲) هر $x_j \in S$ که $(k = ۱, ..., p, (k \neq i))x_j \in V_k$ دو زیرحالت در نظر می‌گیریم.

زیرحالت ۱) رئوس V_i مستقل باشند. دراین‌صورت $v_۱, v_۲$ همسایگی باز یکسان دارند. فرض کنید $v_۱, v_۲$ با عضوی از این همسایگی مثلا v_k مجاور باشند. چون G همبند است، مسیری از v_k به x_j وجود دارد. درنتیجه

$$d(v_۱, x_j) = d(v_۲, x_j).$$

زیرحالت ۲) رئوس V_i مستقل نباشند. پس یک خوشه القا می‌کنند. درنتیجه $v_۱, v_۲$ با تمام رئوس دیگر V_i مجاورند. یعنی همسایگی بسته یکسان و چون G همبند است از هر مجاور مشترک آن‌ها یک مسیر به x_j وجود دارد. درنتیجه

$$d(v_۱, x_j) = d(v_۲, x_j).$$

در تمامی این حالات داریم $r(v_۱|S) = r(v_۲|S)$، که با فرض جداکننده بودن S در تناقض است. درنتیجه برای هر $۱ \leqslant i \leqslant P$ داریم $|S \cap V_i| \geqslant |V_i| - ۱$. بنابه تعریف بعد متریک داریم

$$dim(G) \geqslant (|V_۱| - ۱) + ... + (|V_p| - ۱).$$

■

درقضیه قبل گراف‌هایی از مرتبه n را که دارای بعد $n - ۱$ هستند مشخص کردیم. در واقع این گراف‌ها، گراف‌های کامل هستند. در ادامه گراف‌هایی از مرتبه n را که بعد $n - ۲$ دارند، رده بندی می‌کنیم.

نمادگذاری ۴.۳.۱. *برای گرافهای G و H، $G \cup H$ نمایش اجتماع مجزای G و H است. گراف $G + H$ نمایش گراف بدست آمده از الحاق G و H است که با اتصال هر رأس G به تمام رئوس H بدست می‌آید.*

قضیه ۵.۳.۱. [۴] *فرض‌کنید G گرافی همبند از مرتبه $n \geqslant ۴$ باشد. دراین‌صورت $dim(G) = n - ۲$ اگر و تنها اگر*

$$G = K_{s,t}(s,t \geqslant ۱) \text{ ، } G = K_s + (K_۱ \cup K_t)(s,t \geqslant ۱) \text{ یا } G = K_s + \overline{K_t}(s \geqslant ۱, t \geqslant ۲).$$

اثبات. تمام گراف‌های ذکر شده در قضیه دارای بعد $n - ۲$ هستند. چون در لم قبل ثابت شد که اگر رئوس یک گراف به $V_۱ \cup V_۲ \cup ... \cup V_p$ افراز شوند به‌طوری‌که هر V_i مستقل باشد و رئوسش همسایگی باز یکسان داشته باشند یا V_i یک خوشه القا کند و رئوس آن همسایگی بسته یکسان داشته باشند، دراین‌صورت

$$dim(G) \geqslant (|V_۱| - ۱) + ... + (|V_p| - ۱).$$

بنابراین درمورد تمامی این گراف‌ها داریم $dim(G) \geqslant n - ۲$. طبق قضیه (۲.۳.۱)، چون G کامل نیست $dim(G)$ نمی‌تواند $n - ۱$ باشد.

برای عکس قضیه، فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه $n \geqslant ۴$ باشد که $dim(G) = n - ۲$. بنابه قضیه (۲.۲.۱) و (۲.۳.۱)، $diam(G) = ۲$ (چون $dim(G) = n - ۲ \leqslant n - d$ و G کامل نیست).

اگر G دو بخشی باشد چون قطرش دو است، اعداد صحیح و مثبت $s,t \geqslant ۱$ وجود دارند که $G = K_{s,t}$. بنابراین فرض کنید که G دو بخشی نباشد. درنتیجه G شامل یک دور فرد است. فرض کنید C_r کوچکترین دور فرد G باشد. ادعا می‌کنیم $r = ۳$. مطمئنا C_r دوری القایی از G است. اگر G شامل k - دور $v_۱, v_۲, ..., v_k, v_۱$ باشد که $k \geqslant ۵$، آنگاه $W = V(G) - \{v_۲, v_۳, v_۴\}$ مجموعه جداکننده G از اندازه $n - ۳$ است، زیرا اگر درنظر بگیریم $w_۱ = v_۱, w_۲ = v_۵$، آنگاه

$$r(v_۲|W) = (۱, s, ...), r(v_۳|W) = (۲, ۲, ...), r(v_۴|W) = (t, ۱, ...),$$

که $s,t \geqslant ۲$. چون $|W| = n - ۳$ پس $dim(G) \leqslant n - ۳$، که تناقض است. درنتیجه G دور القایی به‌طول $k \geqslant ۵$ ندارد. پس $r = ۳$ و G شامل مثلث است.

فرض کنید Y مجموعه رئوس بزرگترین خوشه G باشد. چون G شامل مثلث است، پس $|Y| \geqslant ۳$. فرض‌کنید $U = V(G) - Y$ باشد. چون G کامل نیست $|U| \geqslant ۱$. اگر $|U| = ۱$، آنگاه اعداد صحیح s,t وجود دارند که $G = K_s + (K_۱ \cup K_t)$. حال، چون G همبند است $s \geqslant ۱$ و چون G کامل نیست $t \geqslant ۱$. از این مشاهدات می‌توان فرض‌کرد $|U| \geqslant ۲$. ابتدا نشان می‌دهیم که U مجموعه‌ای مستقل از رئوس است.