بسم الله الرحمن الرحیم

بسمه تعالی

تعهدنامه اثر اصالت

اینجانب **مرضیه یوسفی فر** متعهد می‌شوم که مطالب مندرج در این پایانامه که حاصل کار پژوهشی اینجانب است و دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این پژوهش از آن‌ها استفاده شده است، مطابق مقررات ارجاع و در فهرست منابع ومآخذ ذکر گردیده است. این پایانامه قبلاً برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارایه نشده است. در صورت اثبات تخلف (در هر زمان) مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از اعتبار ساقط خواهد شد .

نام و نام خانوادگی: مرضیه یوسفی فر

امضاء

تهران - لویزان - کدپستی۱۶۷۸۸- صندوق پستی۱۶۳ - ۱۶۷۸۵ تلفن ۹- ۲۹۷۰۰۶۰ (داخلی ۲۳۴۷) نمابر ۲۲۹۷۰۰۱۱ پست الکترونیکی sru@sru.ac.ir

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی

دانشکده‌ی علوم پایه

آنالیز همگرایی روش هم‌محلی طیفی ژاکوبی برای معادلات انتگرال ولترا با کرنل منفرد به طور ضعیف

نگارش:

مرضیه یوسفی فر

استاد راهنما: دکتر رضا ملاپور اصل

استاد مشاور: دکتر حمید صفدری

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی کاربردی

خرداد ۱۳۹۳

شماره: ۱۴۰۴/۱۴
تاریخ: ۹۴/۱۱/۱۱
پیوست:

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

بسمه تعالی

صورتجلسه دفاع پایان‌نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد خانم مرضیه یوسفی فر رشته ریاضی کاربردی تحت عنوان «آنالیز همگرایی روش هم محلی طیفیژاکوبی برای معادلات انتگرال ولترا با کرنلمنفرد به طور ضعیف» در تاریخ ۱۳۹۳/۰۳/۳۱ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی برگزار گردید و نتیجه به شرح ذیل می‌باشد.

☐ قبول (با درجه ...۱۸/۷۵... امتیاز بسیار خوب) ☐ دفاع مجدد ☐ مردود

۱. عالی (۲۰-۱۹)
۲. بسیار خوب (۱۸،۹۹-۱۸)
۳. خوب (۱۷،۹۹-۱۶)
۴. قابل قبول (۱۵،۹۹-۱۴)
۵. غیرقابل قبول (کمتر از ۱۴)

اعضاء	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
استاد راهنما	دکتر رضا ملاپور	استادیار	
استاد مشاور	دکتر حمید صفدری	استادیار	
داور داخلی	دکتر حمید مسگرانی	دانشیار	
داور خارجی	دکتر محسن شاهرضایی	استادیار	
نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه	دکتر حمید مسگرانی	دانشیار	

دکتر ایوب اسماعیل پور
رئیس دانشکده علوم پایه

تهران، لویزان، کد پستی: ۱۶۷۸۸-۱۵۸۱۱

تقدیم به

آنانی که ستاره یادشان در آسمان دلهایمان

نورافشانی می کند و تجسمی زیبا از خاطره ی

بهار را در کلبه ی قلبمان به یادگار می گذارند .

" تقدیم به پدر عزیزم و مادر صبورم "

تقدیر و تشکر

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. و سلام و دورد بر محمّد و خاندان پاك او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان وامدار وجودشان است؛ و نفرین پیوسته بر دشمنان ایشان تا روز رستاخیز...

بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجّل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شائبه ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم. اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می کند و سلامت امانت هایی را که به دستش سپرده اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب " من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر اللّٰه عزّ و جلّ" :

ازپدر و مادر عزیزم...این دو معلم بزرگوارم... که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت هایم گذشته اند و در تمام عرصه های زندگی یار و یاوری بی چشم داشت برای من بوده اند؛

از استاد گرانقدر؛ جناب آقای دکتر ملاپور که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند؛

از استاد محترم ، جناب آقای دکتر صفدری که زحمت مشاوره این رساله را بر عهده گرفتند؛

و از استاد فرزانه ؛ جناب آقای دکترمسگرانی که زحمت داوری این رساله را متقبل شدند؛ کمال تشکر و قدردانی را دارم.

باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید .

چکیده

در این پایانامه ، یک روش طیفی هم محلی ژاکوبی برای معادلات انتگرال ولترا از نوع دوم با هسته منفرد ضعیف به فرم کلی زیر مورد بررسی قرار می‌گیرد

$$y(t) = g(t) + \int_0^t (t-s)^{-\mu} K(t,s)\, y(s)\, ds$$

در این روش که از مرجع [۱] برگرفته شده است ابتدا با استفاده از عملگرهای تبدیل و تغییر متغیرها این معادله را به یک معادله انتگرال ولترای جدید که روی فاصله استاندارد $[-1,1]$ تعریف شده است تبدیل می‌کنیم. بنابراین جواب این معادله جدید دارای بهترین نظم است و قضیه چندجمله‌ایهای متعامد ژاکوبی به طور مناسب اعمال می‌شود. به منظور گرفتن بالاترین مرتبه دقت برای تقریب، جمله انتگرال در معادله آخربه‌وسیله قانون انتگرال‌گیری طیفی ژاکوبی تقریب زده خواهد شد.درجه همگرایی این روش طیفی در نرم L^∞ و نرم L^2 وزن دار بررسی شده است نتایج عددی نشان داده شده تاثیرگذاری این روش را تائید می‌کند .

واژگان کلیدی :روش طیفی، هم‌محلی، ژاکوبی، معادله انتگرال ولترا، متعامد، همگرایی

فهرست مطالب

لیست تصاویر

لیست جداول

فصل ۱

مقدمه ای بر معادلات انتگرال

۱.۱ تعاریف مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید $n \in N$ و$p \leqslant 1$ در این صورت

۱. $C[a,b]$ فضای همه توابع $f : [a,b] \to \mathrm{R}$ به‌طوریکه تابع f روی بازه $[a,b]$ پیوسته باشد.

۲. $C^n[a,b]$ فضای همه توابع $f : [a,b] \to \mathrm{R}$ به‌طوریکه مشتق مرتبه n ام تابع f روی بازه $[a,b]$ پیوسته است.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید X یک فضای خطی و a اسکالری حقیقی و دلخواه باشد. همچنین اگر تابع $\| . \|: X \to \mathrm{R}^+ \cup \{0\}$ به ازای هر $x, y \in X$ دارای خواص زیر باشد

۱. $\| x+y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$

۲. $\| ax \| = | a | \| x \|$

۳. $\| x \| \geqslant 0$

۴. $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

در این صورت تابع $\| . \|$ را نرم فضای X گوییم و X را فضای نرم دار خطی گوییم، در ضمن تابع $| . |: X \to \mathrm{R}$ را شبه نرم گوییم اگر در سه شرط اول صدق کنند.

تعریف ۳.۱.۱. تابع $f(x)$ را در یک نقطه هموار نامیم اگر تابع $f'(x)$ در آن نقطه پیوسته باشد.

تعریف ۴.۱.۱. در ریاضیات یک تابع حقیقی یا تابع مختلط مقدار مثل f روی فضای اقلیدسی n بعدی پیوسته هولدر گوییم هرگاه ثابتهای حقیقی نامنفی C, a وجود داشته باشند بطوریکه برای هر x, yدر دامنه f:

$$| f(x) - f(y) | \leq C \mid x - y \mid^a$$

تعریف ۵.۱.۱. فرمول استرلینگ

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} x^{x-1/2} e^{-x} \{1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} + o\left(x^{-3}\right), \qquad x \gg 1 \tag{۱.۱}$$

$$\sqrt{2\pi} n^{n+1/2} < n! e^n < \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} \left(1 + \frac{1}{4n}\right), \qquad n \geq 1 \tag{۲.۱}$$

انتگرال زیر در فصل های بعدی کاربرد زیادی دارد:

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} dx = 2^{\alpha+\beta+1} \int_{0}^{1} t^{\beta} (1-t)^{\alpha} dt \tag{۳.۱}$$

$$= 2^{\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}, \qquad \alpha, \beta > -1 \tag{۴.۱}$$

۲.۱ فضای باناخ

یک فضای باناخ فضای برداری نرم دار است (فضای $(X, \| . \|)$ را یک فضای برداری نرم دار گوییم) بطوریکه با در نظر گرفتن این متر

$$d(u, v) = \| u - v \| \qquad \forall u, v \in X$$

کامل باشد یعنی هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد.

۳.۱ فضای هیلبرت

اگر X یک فضای برداری حقیقی باشد، ضرب داخلی روی X تابعی به این صورت

$$(u, v) : X \times X \to \mathrm{R}$$

باشد بطوریکه :

۱. $(u,v)=(v,u) \qquad \forall u,v\in X$

۲. $(\alpha u+\beta v,w)=\alpha(u,w)+\beta(v,w) \quad \forall\alpha,\beta\in \mathrm{R} \quad ,v,w\in X,$

۳. $(u,u)\geq 0 \quad \forall u\in X$

۴. $(u,u)=0 \Leftrightarrow u=0$

$u,v\in X$ را در Xمتعامد گوییم اگر $(u,v)=0$باشد. ضرب داخلی $(.,.)$ روی X نرم تولید می‌کند به این صورت:

$$\parallel u\parallel=\sqrt{(u,u)} \qquad \forall u\in X \tag{۵.۱}$$

و به این ترتیب متر روی X تعریف می‌شود به این صورت:

$$d(u,v)=\parallel u-v\parallel$$

فضای هیلبرت یک فضای باناخ که دارای ضرب داخلی فوق است در فضای هیلبرت نامساوی کشی-شوارتز[۱] برقرار است که به این فرم است:

$$|(u,v)|\leqslant\parallel u\parallel\parallel v\parallel \qquad \forall u,v\in X \tag{۶.۱}$$

۴.۱ فضای L^p

برای $1\leqslant p\leqslant\infty$ قرار می‌دهیم:

$$L^p(\Omega)=\{u:\parallel u\parallel_{L^p(\Omega)}<\infty \qquad \text{اندازه پذیر روی}\ \Omega\ u\} \tag{۷.۱}$$

بطوریکه برای $1\leqslant p<\infty$

$$\parallel u\parallel_{L^p(\Omega)}=\left(\int_\Omega |u(x)|^p\,dx\right)^{1/p}, \qquad \parallel u\parallel_{L^\infty(\Omega)}=ess \quad sup_{x\in\Omega}|u(x)| \tag{۸.۱}$$

در حالت خاص فضای $L^2(\Omega)$ یک فضای هیلبرت مجهز به ضرب داخلی زیر است

$$(u,v)_{L^2(\Omega)}=\int_\Omega u(x)\,v(x)\,dx, \qquad \forall u,v\in L^2(\Omega) \tag{۹.۱}$$

[۱] Cauchy–Schwarz

۵.۱ تاریخچه معادلات انتگرال

به طور کلی معادلاتی که در آن‌ها تابع مجهول تحت یک انتگرال ظاهر می‌شود، معادلات انتگرال گفته می‌شود. بویس ریموند [۲] اولین کسی بود که نام معادلات انتگرالی را بر روی این گونه معادلات نهاد، اما در عمل لاپلاس [۳] اولین کسی بود که در سال ۱۷۸۲ برای حل معادلات دیفرانسیل معادله انتگرال را مطرح نمود و به دنبال آن فوریه [۴] برای حل مساله حرارت، تبدیلات سینوسی و کسینوسی فوریه و همچنین آبل [۵] در حل مسائل مکانیکی، معادله آبل را مطرح کردند که هر یک به نوعی به معادله‌های انتگرالی منجد می‌شدند. افراد دیگری نیز در سیر تکامل معادلات انتگرالی موثر بوده‌اند، بعضی از این افراد عبارتند از:

- پواسون [۶] در تئوری مغناطیس(۱۸۲۶)
- لیوویل [۷] در حل برخی معادلات دیفرانسیل به کمک معادلات انتگرالی (۱۸۳۲)
- نیومن [۸] مسأله دیریکله را تبدیل به یک معادله نمود (۱۸۷۰)
- ولترا [۹] برای اولین بار نظریه عمومی معادلات انتگرالی را ارائه نمود (۱۸۹۶)

نظریه معادلات انتگرال یکی از مهمترین شاخه‌های علم ریاضیات است اصولا اهمیت آن از لحاظ مسائل مقدار مرزی در تئوری معادلات با مشتق جزئی است. توسعه نظریه معادلات انتگرال تنها در اواخر قرن ۱۹ شروع شد در حدود سال‌های ۱۹۰۳-۱۹۰۰ بود که یک ریاضی‌دان ایتالیایی به نام ولترا روی آن کار کرد و همچنین یک ریاضی‌دان سوئدی به نام فردهلم [۱۰] در همان سال‌ها یک روش جدید جهت حل مساله دریکله [۱۱] پیشنهاد داد و سپس یک دسته‌بندی کلی از معادلات انتگرالی خطی را انجام داد که شامل دسته‌بندی خاصی از معادلات ولترا نیز بودند. در ادامه این فرایند هیلبرت

[۲] Bois Reymond
[۳] Laplace
[۴] Fourier
[۵] Abel
[۶] Poison
[۷] Liouville
[۸] Newman
[۹] Voltra
[۱۰] Fredholm
[۱۱] Dirichlet

به تحقیق در مورد معادلات انتگرالی پرداخت و در حل بسیاری از مسائل ریاضی و فیزیک بهره جست. یکی از بزرگترین کارهای وی فرموله کردن مسائل معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با شرایط مرزی و اولیه به صورت یک معادله انتگرالی است که حرکتی نو در حل این گونه معادلات را به وجود آورد. قضایای فردهلم از قضایای اصلی معادلات انتگرال است از آنجا که این قضایا ابتدا توسط فردهلم برای هسته‌های پیوسته ارائه شده‌اند اما بعدا توسط پژوهشگران دیگری برای هسته‌های کلی‌تر تعمیم یافته‌اند. یکی از مساول خوش وضع معادلات انتگرالی نوع دوم می‌باشند که به‌صورت تحلیلی توسط فردهلم حل شده است وبا روش‌های عددی نظریه نیستروم، بسط کمترین مربعات، گالرکین، ... این دسته از مسائل را حل نمود. معادلات نوع اول که از مسائل بدوضع هستند به سادگی قابل حل نبوده وگاهی اوقات این نوع مسائل را می‌توان با یکی از روشهای بسط، توابع ویژه، منظم سازی، تکراری و افزوده گالرکین حل کرد.
امروزه اکثر مسائل علوم مهندسی را با توجه به پیچیدگی مدل مربوطه با روش‌های عددی حل می‌کنند و تقریب تابع یکی از مهمترین مسائل در زمینه ریاضیات کاربردی و مهندسی است. که این تقریب باید طوری باشد که با حجم عملیات کمتری به دقت خوبی برسد که یکی از مهمترین این روش‌ها روش‌های طیفی است.

۶.۱ معرفی معادلات انتگرال

یک معادله انتگرال خطی به شکل زیر است:

$$u\left(x\right)=f\left(x\right)+\int_{a}^{b}K\left(x,t\right)u\left(t\right)dt \qquad (۱۰.۱)$$

که $K\left(x,t\right)$ هسته انتگرال نامیده می‌شود و یک معادله انتگرال غیر خطی معادله ای به شکل بالاست با این تفاوت که تابع $u\left(x\right)$ زیر علامت انتگرال با توابع غیر خطی نظیر $u^{2}\left(x\right)$ یا $cosu\left(x\right)$ یا $e^{u(x)}$ و غیره تعویض شود. هدف ما تعیین تابع مجهول یعنی $u\left(x\right)$ است که در رابطه ۱۰.۱ صدق کند .

۱.۶.۱ انواع معادلات انتگرال خطی

متداول ترین معادلات انتگرال خطی را می توان به دو گروه معادلات انتگرال فردهلم ومعادلات انتگرال ولترا دسته بندی نمود .

۱. **معادله انتگرال خطی فردهلم:**

شکل استاندارد معادلات انتگرال خطی فردهلم، که در آنها حد پایین و حد بالای انتگرالگیری به ترتیب اعداد ثابت a و b هستند به صورت زیر می‌باشد:

$$\phi(x)\,u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\,u(t)\,dt \qquad a \leqslant x,t \leqslant b \tag{۱۱.۱}$$

که در آن هسته معادله انتگرال $K(x,t)$ وتابع $f(x)$ از قبل مشخص هستند و λ هم یک پارامتر معلوم می‌باشد.معادله انتگرال فردهلم خطی به دو دسته عمده تقسیم بندی می‌شود :

- **معادله انتگرال فردهلم نوع اول :**

  زمانی که $\phi(x) = 0$ معادله ۱۱.۱ به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\,u(t)\,dt = 0 \qquad a \leqslant x,t \leqslant b \tag{۱۲.۱}$$

- **معادله انتگرال فردهلم نوع دوم:**

  زمانیکه $\phi(x) = 1$ معادله ۱۱.۱ به شکل زیر خواهد بود:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\,u(t)\,dt \qquad a \leqslant x,t \leqslant b \tag{۱۳.۱}$$

۲. **معادله انتگرال خطی ولترا:**

شکل استاندارد معادلات انتگرال خطی ولترا، یعنی معادلاتی که در آنها حد بالا و پایین انتگرالگیری بجای اینکه یک عدد ثابتی باشد به صورت تابعی از x ظاهر می‌شود به فرم زیر می‌باشد:

$$\phi(x)\,u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\,u(t)\,dt \tag{۱۴.۱}$$

که در آن تابع مجهول یعنی $u(x)$ زیر علامت انتگرال به صورت خطی می‌باشد .

معادلات انتگرال ولترا به دو دسته تقسیم می‌شود:

- **معادله انتگرال ولترا نوع اول:**

  در حالتیکه $\phi(x) = 0$ معادله ۱۴.۱ به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\,u(t)\,dt = 0 \tag{۱۵.۱}$$

به این معادله انتگرال ولترا نوع اول گوییم.

- **معادله انتگرال ولترا نوع دوم :**

زمانیکه $\phi(x) = 1$ آنگاه معادله ۱۴.۱ به شکل زیر تبدیل خواهد شد:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\, u(t)\, dt \qquad (۱۶.۱)$$

که به این معادله انتگرال ولترا نوع دوم می‌گوییم.

اگر در معادله انتگرال فردهلم نوع دوم ۱۳.۱ و معادله انتگرال ولترا نوع دوم ۱۶.۱ شرط $f(x) = 0$ برقرار باشد آنگاه معادله حاصل را یک معادله انتگرال همگن می‌نامیم . در غیر این صورت معادله مورد نظر را یک معادله انتگرال غیر همگن می‌گویند.
این مطالب از مرجع [۱۱] برگرفته شده است.

فصل ۲

چند جمله ایهای ژاکوبی وبررسی خواص آن

۱.۲ مقدمه

فاصله باز $I=(a,b)$ و یک تابع وزن کلی w

$$w(x)>0 \qquad \forall x\in I \quad ,w\in L^1(I) \tag{۱.۲}$$

را در نظر می‌گیریم و دو تابع f و g را در فضای تابعی $L^2_w(a,b)$ با در نظر گرفتن w متعامد گوییم، اگر

$$(f,g)_w:=\int_a^b f(x)g(x)w(x)dx=0 \tag{۲.۲}$$

چند جمله ای کلی از درجه n به‌وسیله $k_n\neq 0 \qquad p_n(x)=k_nx^n+.....+k_0$

نشان داده می‌شود، به‌طوری که $\{k_i\}_{i=0}^n$ ثابت اند و k_n ضریب پیشرو p_n است.

یک دنباله از چندجمله‌ای‌های $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ ،با درجه p_n برابر با n ، در $L^2_w(a,b)$ متعامدند اگر

$$(p_n,p_m)=\int_a^b p_n(x)p_m(x)w(x)dx=\gamma_n\delta_{mn} \tag{۳.۲}$$

به‌طوریکه ثابت $\gamma_n=\|p_n\|_w^2$ غیرصفر است و δ_{mn} دلتای کرونکر [۱] است.

P_n یک مجموعه از چندجمله‌ای‌های جبری از درجه کمتر مساوی n است، بدین معنی

$$P_n:=span\{1,x,x^2,...,x^n\} \tag{۴.۲}$$

وبه‌طور کلی می‌توان این‌طور نوشت:

$$P_n=span\{p_0,p_1,...,p_n\} \tag{۵.۲}$$

[۱] Kronecker delta

p_{n+1} با هر چندجمله‌ای $q \in P_n$ متعامد است.

برهان. با استفاده از ۵.۲ برای هر $q \in P_n$ می‌توانیم بنویسیم $q = b_n p_n + ... + b_0 p_0$ بنابراین

$$(p_{n+1}, q) = b_n(p_{n+1}, p_n) + ... + b_0(p_{n+1}, p_0) = 0$$

با استفاده از ۳.۲ تساوی بالا برابر با صفر می‌شود. □

حال نشان می‌دهیم چندجمله‌ایهای تکین متناظر p_n به این صورت

$$\overline{p_n(x)} = p_n(x)/k_n = x^n + a_{n-1}^{(n)} x^{n-1} + ... + a_0^{(n)} \qquad (۶.۲)$$

می‌باشد.

قضیه ۲.۱.۲. *برای هر تابع وزن $w \in L^1(I)$ یک دنباله یکتا از چندجمله‌ای‌های متعامد تکین $\{\overline{p_n}\}$ با درجه n به‌صورت زیر ساخته می‌شوند.*

$$\overline{p_0} = 1$$

$$,\overline{p_1} = x - \alpha_0$$

$$,\overline{p_{n+1}} = (x - \alpha_n)\,\overline{p_n} - \beta_n \overline{p_{n-1}} \qquad n \geq 1 \qquad (۷.۲)$$

بطوریکه

$$\alpha_n = \frac{(x\overline{p_n}, \overline{p_n})_w}{\| \overline{p_n} \|_w^2} \qquad n \geq 0 \qquad (۸.۲)$$

$$\beta_n = \frac{\| \overline{p_n} \|_w^2}{\| \overline{p_{n-1}} \|_w^2} \qquad n \geq 1 \qquad (۹.۲)$$

برهان. این واضح است که دو چندجمله‌ای اول عبارتند از $\overline{p_0(x)} = 1 \quad , \overline{p_1(x)} = x - \alpha_0$

برای به دست آوردن α_0 داریم:

$(\overline{p_0}, \overline{p_1})_w = 0$ اگروتنهااگر