بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

گروه آمار

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
آمار

برآورد دنباله‌ای ترکیب‌های خطی از پارامترهای مکان و مقیاس در توزیع نمایی منفی

استاد راهنما: دکتر عیسی محمودی

استاد مشاور: دکتر حمزه ترابی

پژوهش و نگارش: معصومه رفیعی

مهر ماه ۱۳۹۰

تقدیم به

پدرم، او که عالمانه به من آموخت تا چگونه در عرصه زندگی، ایستادگی را تجربه نمایم

به مادرم، دریای بی کران فداکاری و عشق که وجودم برایش همه رنج بود و وجودش برایم همه مهر

و به همسرم، اسطوره زندگیم که با صبر و مهربانی مشکلات مسیر را برایم تسهیل نمود.

شکر گزارم او را که مسیر رقتنم را به نورهای مکرر روشن ساخت، چرا که اگر خواست او نبود این روشنایی‌ها را به همراه نداشتم. او که به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرم نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیم ساخت.

سپاسگزارم از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر عیسی محمودی، که همچون معلمی دلسوز و مهربان مرا در جهت تدوین و نگارش این تحقیق راهنمایی کردند.

از استاد محترم جناب آقای دکتر حمزه ترابی که تصحیح آن را متقبل شدند و نظرات ارزشمندی در تکوین این پایان نامه ابراز نمودند، کمال تشکر و قدردانی را دارم. سپاسگزارم از جناب آقای دکتر حجت اله ذاکر زاده و جناب آقای دکتر احد جمالی زاده که داوری این پایان نامه را پذیرفته‌اند.

سپاسگزارم از تمامی کسانی که به واسطه ی وجود ارزشمندشان، صبر و تلاش در راه علم آموزی را آموختم، به خصوص پدر و مادر مهربان، معلمان دلسوز و همسر و خانواده عزیزم.

چکیده

در این مطالعه، از روش‌های دنباله‌ای برای برآورد ترکیب خطی از پارامترهای توزیع نمایی منفی استفاده شده است. در فصل اول اصول و ویژگی‌های روش‌های دنباله‌ای بیان شده است. در فصل دوم روش نمونه‌گیری دومرحله‌ای، به منظور برآورد ترکیب خطی از پارامترهای مکان و مقیاس در توزیع نمایی منفی تحت مخاطره‌ی کراندار شده، به کار رفته است. فصل سوم، شامل مسأله‌ی مخاطره‌ی کراندار شده‌ی ترکیب خطی از پارامترهای مکان در دو توزیع نمایی منفی مستقل است. در این فصل روش دنباله‌ای محض به کار رفته و بسط مرتبه‌ی دوم میانگین حجم نمونه و مخاطره‌ی برآوردگر مورد نظر، محاسبه شده است. در نهایت با استفاده از شبیه‌سازی درستی نتایج تئوری را نشان داده‌ایم.

فهرست مطالب

۱ مفاهیم و تعاریف اولیه **۵**

۱.۱ مقدمه ۶

۲.۱ اصول و مبانی نظریه تصمیم ۶

۳.۱ مفاهیم اولیه در احتمال ۷

۱.۳.۱ قانون قوی اعداد بزرگ ۱۳

۲.۳.۱ نامساوی هولدر ۱۳

۳.۳.۱ رابطه‌ی بین توزیع‌های گاما و پواسون ۱۳

۴.۳.۱ قضیه تیلور ۱۳

۴.۱ تحلیل دنباله‌ای ۱۴

۱.۴.۱ کاربردهایی از روش‌های دنباله‌ای ۱۴

۲.۴.۱ پیشینه و کلیات روش نمونه‌گیری دومرحله‌ای ۱۶

۳.۴.۱ روش نمونه‌گیری دنباله‌ای محض ۱۹

۵.۱ توزیع نمایی منفی و ویژگی‌های آن ۲۰

۲ برآورد مخاطره‌ی کراندار شده‌ی ترکیب خطی از پارامترهای مکان و مقیاس در توزیع نمایی منفی **۲۳**

۱.۲ مقدمه ۲۴

۲.۲ روش نمونه‌گیری دومرحله‌ای ۲۷

۳.۲ توزیع احتمال حجم نمونه ۲۹

۴.۲ امید ریاضی و مخاطره‌ی برآوردگرها ۳۲
۱.۴.۲ امید ریاضی و مخاطره‌ی برآوردگر $\hat{\beta}_N$ ۳۹
۲.۴.۲ امید ریاضی و مخاطره‌ی برآوردگر $\hat{\theta}_N$ ۴۶
۵.۲ شبیه‌سازی ۵۴

۳ برآورد دنباله‌ای برای ترکیب خطی از پارامترهای مکان در دو توزیع نمایی منفی مستقل **۶۵**
۱.۳ مقدمه ۶۶
۱.۱.۳ معرفی قاعده‌ی توقف وودروف و بیان ویژگی آن ۶۶
۲.۳ برآورد دنباله‌ای محض برای ترکیب خطی از پارامترهای مکان ۶۸
۳.۳ امید ریاضی و مخاطره‌ی برآوردگرهای M، N و $\hat{\delta}(M,N)$ ۷۳
۴.۳ مطالعه‌ی شبیه‌سازی ۸۵

الف متن برنامه‌های کامپیوتری **۸۹**

ب واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی **۱۰۱**

پ واژه نامه‌ی انگلیسی به فارسی **۱۰۵**

مراجع **۱۰۹**

فهرست جدول‌ها

۱.۲ مقادیر واقعی میانگین و چندک‌های متغیر توقف N، در روش دومرحله‌ای(۵.۲) با استفاده از مقادیر $d = ۱$، $B = ۳/۵$ و $\omega = ۲$. ۵۵

۲.۲ مقادیر شبیه‌سازی شده‌ی امید ریاضی و چندک‌های متغیر توقف N در روش دومرحله‌ای استفاده از مقادیر $d = ۱$ و $B = ۳/۵$ و $\omega = ۲$. ۵۶

۳.۲ مقادیر شبیه‌سازی شده برای امید ریاضی و چندک‌های متغیر توقف N در روش دومرحله‌ای (۵.۲) با استفاده از مقادیر $d = ۱$ و $B = ۳/۵$ و $\omega = ۰/۰۰۱$. ۵۷

۴.۲ مقادیر شبیه‌سازی شده برای امید ریاضی و چندک‌های متغیر توقف N در روش دومرحله‌ای (۵.۲) با استفاده از مقادیر $d = ۱$ و $B = ۱۰۰۰۰$ و $\omega = ۲$. ۵۸

۵.۲ مقادیر واقعی امید ریاضی N و مخاطره‌ی برآوردگر $\hat{\beta}_N$ تحت روش دومرحله‌ای (۵.۲) با استفاده از مقادیر $d = ۱$ و $A = ۱$ و $\omega = ۲$. ۵۹

۶.۲ مقادیر شبیه‌سازی شده‌ی امید ریاضی متغیر توقف N و مخاطره‌ی برآوردگر $\hat{\beta}_N$ تحت روش دومرحله‌ای (۵.۲) با استفاده از مقادیر $d = ۱$، $\alpha = ۸$، $A = ۱$ و $\omega = ۲$. ۶۰

۷.۲ مقادیر واقعی امید متغیر توقف N و امید و مخاطره‌ی برآوردگر $\hat{\theta}_N$. . . . ۶۱

۸.۲ مقادیر شبیه‌سازی شده امید متغیر توقف N و امید و مخاطره‌ی برآوردگر $\hat{\theta}_N$. ۶۲

۹.۲ مقادیر واقعی امید متغیر توقف N و امید و مخاطره‌ی برآوردگر $\hat{\theta}_N$ با استفاده از مقادیر مختلف m. ۶۳

۱۰.۲ مقادیر شبیه‌سازی شده‌ی امید متغیر توقف N و امید و مخاطره‌ی برآوردگر $\hat{\theta}_N$ با استفاده از مقادیر مختلف m. ۶۳

۱.۳ مقادیر شبیه‌سازی شده برای مخاطره‌ی برآوردگر $\hat{\delta}(M_1, N_1)$ و میانگین قواعد توقف M_1 و N_1 وقتی که $\delta = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} = 1/5$. ۸۶

۲.۳ مقادیر شبیه‌سازی شده برای مخاطره‌ی برآوردگر $\hat{\delta}(M_1, N_1)$ و میانگین قواعد توقف M_1 و N_1 وقتی که $\delta = \alpha_2 - \alpha_1 = 1$. ۸۷

۳.۳ مقادیر شبیه‌سازی شده برای مخاطره‌ی $\hat{\delta}(M_2, N_2)$ و میانگین قواعد توقف M_2 و N_2 وقتی $\delta = \alpha_2 - \alpha_1 = 1$. ۸۷

فهرست نمادها

تابع زیان حاصل از برآورد θ توسط d ..... $L(d,\theta)$

تابع مخاطره‌ی حاصل از برآورد θ توسط d ..... $R(d,\theta)$

گوی باز به مرکز a و شعاع r ..... $B_r(a)$

سیگما فیلد ساخته شده ..... $\sigma(.)$

همگرایی در احتمال ..... $\xrightarrow{P}$

همگرایی تقریباً مطمئن ..... $\xrightarrow{a.s.}$

همگرایی در توزیع ..... $\xrightarrow{L}$

هم‌توزیعی ..... $\overset{d}{=}$

تابع مشخصه متغیر تصادفی X ..... $\phi_X(.)$

توزیع گاما ..... $Gamma(.,.)$

متغیر تصادفی گاما ..... $G(.,.)$

توزیع نمایی منفی ..... $Exp(.,.)$

تابع توزیع نرمال استاندارد ..... $\Phi(.)$

توزیع پواسون ..... $Pois(.)$

معرفی نماد جدید برای رابطه‌ی سمت چپ ..... $=:$

معرفی نماد جدید برای رابطه‌ی سمت راست ..... $:=$

بزرگترین عدد صحیح مثبت کوچکتر از a ..... $\lfloor a \rfloor$

تابع علامت ..... $sgn(a)$

آماره‌ی ترتیبی iام ..... $X_{i:n}$

پیشگفتار

آبراهام والد[1] را می‌توان پیشرو در زمینه‌ی تحلیل دنباله‌ای دانست. والد [۳۷] و همکارانش در اوایل سال ۱۹۴۰ نظریه و روش آزمون‌های دنباله‌ای را به منظور کاهش تعداد نمونه‌ی مورد بررسی، بدون مصالحه در مورد اعتماد به تصمیم نهایی توسعه دادند. استفاده از تحلیل دنباله‌ای به علت کاربرد عمیق آن در پاسخ به آزمون‌های کارا در توپخانه‌های ضد هوایی و دیگر سلاح‌ها، در طول جنگ جهانی دوم آغاز شد. استفاده از نمونه‌های کمتر و دستیابی به نتایج بهتر یکی از ضروریات جنگ بود. روش دنباله‌ای در نیمه‌ی سال ۱۹۴۰ طبقه‌بندی شد و نظر محققان روش شناس را به خود جلب کرد. همین موضوع منجر شد تا تحلیل دنباله‌ای در دامنه‌ی وسیعی از مسائل کاربردی مانند کنترل کیفیت، طرح آزمایش‌ها، مقایسه‌های چندگانه و ... مورد استفاده قرار گیرد. در سراسر سال‌های۱۹۶۰ تا ۱۹۷۰ محققان در دنباله‌ی آزمایش‌های بالینی به وابستگی پدیدار شده بین طرح مناسب و قوانین توقف مناسب پی‌بردند. به همین دلیل تحقیقات در این زمینه ادامه پیدا کرد و به عنوان بخش مهمی از تحقیقات اساسی در روش‌های دنباله‌ای در نظر گرفته شد. امروزه روش‌های دنباله‌ای در کشاورزی، آزمایش‌های بالینی، داده‌های مین‌گذاری، دارایی، ژنتیك، ردیابی و ... مورد استفاده قرار می‌گیرد. روش‌های دنباله‌ای کاربردی توسط موخوپادهای و همکاران [۲۶] در سال ۲۰۰۴ ویرایش شد و منبعی برای بعضی ابتکارات اخیر قرار گرفت.

برآورد دنباله‌ای برای میانگین توزیع نمایی یکی از مسائل مهمی است که اهمیت کاربردی آن توجه نویسندگان زیادی از جمله گوری [۲][۱۱] در سال ۱۹۵۸، باسو[۳][۴] در سال ۱۹۷۱، استار و وودروف[۴] [۳۲] در سال ۱۹۷۲، گوش وموخوپادهای[۵][۹] در سال ۱۹۷۶، وودروف [۳۸] در سال

---

[1] Abraham Wald

[2] Ghurye

[3] Basu

[4] Starr and Woodroofe

[5] Ghosh and Mukhopadhyay

۱۹۷۷، سوانپول و فان‌ویک[۶] [۳۵] در سال ۱۹۸۲، تاکادا[۷] [۳۶] در سال ۱۹۸۶، کوبوکاوا[۸] [۱۶] در سال ۱۹۸۹، ایزوگی و اونو[۹] [۱۴] در سال ۱۹۹۴، موخوپادهای [۱۷] و [۱۹] در سال‌های ۱۹۷۴ و۱۹۹۴ و موخوپادهای و داتا [۱۰] [۲۲] در سال ۱۹۹۵ را به خود جلب کرده است، تمام این بررسی‌ها در توزیع نمایی با یك پارامتر یا توزیع نمایی با دو پارامتر صورت گرفته است.

موخوپادهای و سیکنتی[۱۱] [۲۰] و [۲۱] در سال‌های ۲۰۰۰ و ۲۰۰۵ و موخوپادهای و داگان[۱۲] [۲۳] در سال ۲۰۰۰ کلاسی از برآوردگرها برای تابع قابلیت اعتماد، با روش دنباله‌ای معرفی کردند. زاکس[۱۳] وموخوپادهای [۳۹] در سال ۲۰۰۶ راهکاری برای ارزیابی دقیق مخاطره‌ی برآوردگرهای دنباله‌ای محض نظیر میانگین، نرخ شکست و تابع قابلیت اعتماد توزیع نمایی با پارامتر مقیاس ارائه دادند. زاکس و موخوپادهای [۴۰] در سال۲۰۰۶ برآورد دنباله‌ای میانگین توزیع نمایی در نمونه‌گیری دومرحله‌ای، وقتی تابع مخاطره توسط مقدار ثابت از پیش تعیین شده‌ای کراندار است را مورد مطالعه قرار داد.

در فصل دوم روش نمونه‌گیری دومرحله‌ای برای برآورد ترکیب خطی از پارامترهای مکان و مقیاس در توزیع نمایی منفی که برای اولین بار توسط موخوپادهای و زاکس [۲۷] در سال ۲۰۰۷ پیشنهاد شده است، مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین فرمول‌های صریحی برای توزیع حجم نمونه، امید ریاضی و مخاطره‌ی برآورگرهای مورد نظر ارائه می‌شود و سپس به وسیله‌ی مطالعات شبیه‌سازی درستی این فرمول‌ها را در موارد خاص بررسی می‌کنیم.

موخوپادهای و همدی [۲۴] در سال ۱۹۸۴، همدی و همکارانش [۱۴][۱۲] در سال ۱۹۸۹ و سینگ

---

[۶] Swanepoel and van Wyk

[۷] Takada

[۸] Kubokawa

[۹] Isogai and Uno

[۱۰] Datta

[۱۱] Cicconetti

[۱۲] Duggan

[۱۳] Zacks

[۱۴] Hamdy et al.

و چتورودی [15][۳۱] در سال ۱۹۹۱، مسأله‌ی برآورد فاصله‌ای با طول ثابت را برای اختلاف بین پارامترهای مکان در دو توزیع نمایی منفی مطرح و مورد بررسی قرار دادند. موخوپادهای [۱۸] در سال ۱۹۹۲ مسأله‌ی برآورد مخاطره‌ی کراندار شده را به‌طور هم زمان برای پارامتر مکان در k توزیع نمایی مورد بررسی قرار داد. مسأله مخاطره‌ی کراندار شده برای ترکیب خطی از پارامترهای مکان در دو توزیع نمایی منفی موضوعی است که توسط ایزوگی و فوتسچیك [16][۱۳] در سال ۲۰۱۰ مطرح گردید و ما در فصل سوم آن را مورد بررسی قرار خواهیم داد. در این فصل بسط مرتبه‌ی دوم میانگین حجم نمونه‌ها و مخاطره‌ی برآوردگر مورد نظر با استفاده از روش دنباله‌ای محض محاسبه شده و درستی آن‌ها با استفاده از نتایج شبیه‌سازی بررسی می‌گردد.

[15] Singh and Chaturvedi

[16] Futschik