بسمه تعالی

جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

قاب‌های تقریباً دوگان در فضاهای هیلبرت

سخنران: زهرا ملکی

زمان: یکشنبه ۱۰/ ۱۰/ ۹۱ ساعت ۹ صبح

مکان: سالن خوارزمی دانشکده علوم ریاضی

هیئت داوران

۱– دکتر فرید بهرامی

۲– دکتر محمدتقی جهاندیده

۳– دکتر سیما سلطانی

۴– دکتر محمدرضا کوشش

چکیده

یک قاب این امکان را فراهم می‌سازد که بتوان برای هر عضو از فضا نمایشی بر حسب اعضای آن قاب به‌دست آورد. این امر با استفاده از تعریف قاب دوگان میسر می‌شود، اما در اکثر مواقع به‌دست آوردن قاب دوگان کاری پر زحمت و یا حتی غیر ممکن است. بر این اساس به معرفی قاب‌هایی با رفتار و ویژگی‌های نزدیک قاب‌های دوگان خواهیم پرداخت و برای این منظور قاب‌های تقریباً دوگان را تعریف می‌نماییم.

خواهیم دید که برای یک قاب $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ که نزدیک قاب $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ است و برای آن به‌دست آوردن قاب دوگان، یعنی $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ ممکن می‌باشد، $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ و $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ قاب‌های تقریباً دوگان خواهند بود. همچنین برای این قاب‌ها به خانواده‌ای از قاب‌های تقریباً دوگان دست خواهیم یافت به‌گونه‌ای که می‌توان با یک روند استقرایی به اندازه‌ی دلخواه به قاب دوگان نزدیک شد.

واژه‌های کلیدی: قاب، قاب‌های دوگان، قاب‌های تقریباً دوگان، قاب‌های گابر

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

قاب‌های تقریباً دوگان در فضاهای هیلبرت

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی محض، آنالیز تابعی

زهرا ملکی

استاد راهنما

دکتر فرید بهرامی

دی ۱۳۹۱

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی محض، آنالیز تابعی خانم زهرا ملکی
تحت عنوان

قاب‌های تقریباً دوگان در فضاهای هیلبرت

در تاریخ ۱۰/ ۱۰/ ۹۱ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تأیید نهایی قرار گرفت.

۱– استاد راهنما	دکتر فرید بهرامی
۲– استاد مشاور	دکتر محمدتقی جهاندیده
۳– استاد داور۱	دکتر سیما سلطانی
۴– استاد داور۲	دکتر محمدرضا کوشش

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه

اِلٰهی ... وَ کُلَّما وَفَّقْتَنی مِنْ خَیْرٍ فَاَنْتَ دَلیلی عَلَیْهِ وَ طَریقی اِلَیْهِ ...

بارالها! به هر نیکی موفقم کردی، تو راهنمایم بودی بر آن و تو بودی راه من به سوی او ...

خداوندا! چگونه شکر تو گویم که سراپای وجودم غرقه در نعمت های توست، تویی که مرا در سایه ی لطف و مهرت منزل داده ای،

خدایا! من چگونه شکر تو گویم و حال آنکه توفیق سپاسگزاری از تو، خود محتاج شکر دیگریست،

خدایا! من با کدام زبان به سپاس بپردازم که گردش زبان به سپاس، خود نیازمند تشکر است...

فرازی از دعای بعد از زیارت امام رضا(ع)

با تقدیم صمیمانه ترین سپاس ها

به بزرگترین معلمان زندگیم پدر و مادر مهربان و برادران عزیزم،

به استاد راهنمای بزرگوارم آقای دکتر بهرامی که شاگردی در محضر ایشان یکی از بزرگترین افتخارات زندگیم بود،

به اساتید گرامی آقای دکتر جهاندیده، سرکار خانم دکتر سلطانی و آقای دکتر کوشش و نیز همه ی اساتید ارجمند که در محضرشان علم و اخلاق آموخته ام.

در پایان از تمامی دوستان عزیزم به ویژه سرکار خانم دکتر عمومی که همواره مورد لطف و محبت ایشان بوده ام، نهایت تشکر و قدردانی را دارم و برای همه ی عزیزان سلامتی، موفقیت و سربلندی را از خداوند خواستارم.

دی ۱۳۹۱

فهرست مطالب

چکیده

یک قاب این امکان را فراهم می‌سازد که بتوان برای هر عضو از فضا نمایشی بر حسب اعضای آن قاب به‌دست آورد. این امر با استفاده از تعریف قاب دوگان میسر می‌شود، اما در اکثر مواقع به‌دست آوردن قاب دوگان کاری پر زحمت و یا حتی غیر ممکن است. بر این اساس به معرفی قاب‌هایی با رفتار و ویژگی‌های نزدیک قاب‌های دوگان خواهیم پرداخت و برای این منظور قاب‌های تقریباً دوگان را تعریف می‌نماییم.

خواهیم دید که برای یک قاب $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ که نزدیک قاب $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ است و برای آن به‌دست آوردن قاب دوگان، یعنی $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ ممکن می‌باشد، $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ و $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ قاب‌های تقریباً دوگان خواهند بود. همچنین برای این قاب‌ها به خانواده‌ای از قاب‌های تقریباً دوگان دست خواهیم یافت به‌گونه‌ای که می‌توان با یک روند استقرایی به اندازه‌ی دلخواه به قاب دوگان نزدیک شد.

واژه‌های کلیدی: قاب، قاب‌های دوگان، قاب‌های تقریباً دوگان، قاب‌های گابر

فصل ۱

مقدمه

نظریه قاب‌ها در سال ۱۹۵۲ توسط دافین و اسکافر در مقاله‌ی بنیادی [۱۳] معرفی شد. آن‌ها از قاب‌ها به عنوان یک ابزار در مطالعه‌ی سری‌های فوریه‌ی غیرهارمونیک استفاده کردند. در سال ۱۹۸۶، دابشیز، گراسمن و مایر در حین مطالعه بر روی موجک‌ها، مشاهده کردند که قاب‌ها می‌توانند برای یافتن عبارات سری‌های توابع در فضای $L^{2}(\mathbb{R})$ استفاده شوند [۱۱] و به این ترتیب، مطالعه در مبحث قاب‌ها مجدداً شروع شد. امروزه نیز کاربرد قاب‌ها بسیار وسیع شده و به یک ابزار ضروری برای دست یافتن به نتایج مورد نظر تبدیل شده است.

در بین انواع قاب‌ها، مطالعه بر روی قاب‌های با ساختار موجک و گابر از مهم‌ترین موضوعات بررسی شده‌ی اخیر می‌باشد [۷، ۱۲، ۲۰، ۲۹، ۳۰]. به‌طور مثال از قاب‌های گابر برای اثبات و بررسی استحکام امواج در محیط‌های پر صدا و یا مطالعه‌ی تأثیر اختلالات و خسارات در سیستم‌های ارتباطی، به‌طور گسترده و به عنوان یک ابزار مهم استفاده می‌شود [۳،۴].

این پایان‌نامه به صورت زیر سازمان یافته است.

در فصل ۲، مروری بر فضای هیلبرت و عملگرهای خطی خواهیم داشت و مطالبی را که در فصول آینده به آن نیازمندیم، یادآور خواهیم شد.

در فصل ۳، به معرفی قاب‌ها در فضاهای هیلبرت خواهیم پرداخت و با چند نوع از قاب‌ها آشنا خواهیم شد. در ادامه به معرفی عملگرهای مربوط به قاب‌ها می‌پردازیم. برای قاب $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ با عملگر قاب S، نشان خواهیم داد که $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ نیز یک قاب است و آن‌را قاب دوگان متعارف $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ می‌نامیم. بر این اساس، با نمایش والنات آشنا خواهیم شد. در بخش بعدی این فصل، به معرفی قاب دوگان می‌پردازیم و در نهایت ساختار تمام قاب‌های دوگان را به‌دست خواهیم آورد.

در فصل ۴، تعریف قاب‌های تقریباً دوگان را می‌آوریم. برای قاب‌های تقریباً دوگان $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ و $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$، خانواده‌ای از قاب‌های تقریباً دوگان خواهیم ساخت و بدین وسیله، به قاب‌های دوگان نزدیک خواهیم شد. در بخش‌های بعدی این فصل، موضوع نظریه‌ی اختلال و قاب‌ها و نیز قاب‌های تقریباً دوگان را بررسی خواهیم کرد و مشاهده خواهیم نمود که

برای یک قاب $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ که نزدیک قاب $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ است و برای آن به‌دست آوردن قاب دوگان، یعنی $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ ممکن می‌باشد، $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ و $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ قاب‌های تقریباً دوگان خواهند بود. این موضوع به‌طور دقیق در گزاره‌های ۱.۳.۴ و ۳.۳.۴ بیان شده است.

در فصل ۵، پس از معرفی قاب‌های با ساختار گابر و دوگان چنین قاب‌هایی، در مورد قاب‌های تقریباً دوگان یک قاب گابر بحث خواهیم کرد و در نهایت در بخش آخر این فصل با استفاده از یک مثال، عملکرد روش ارائه شده در گزاره‌ی ۳.۳.۵ برای به‌دست آوردن قاب‌های تقریباً دوگان برای قاب‌های گابر با تابع مولد گاوسی را، با عملکرد گزاره‌های ۱.۳.۴ و ۳.۳.۴ مقایسه می‌کنیم و به برتری‌های گزاره‌ی ۳.۳.۵ در این مورد پی خواهیم برد.

قابل ذکر است که اکثر مطالب این پایان‌نامه بر اساس مراجع [۵] و [۶] گردآوری شده است.

فصل ۲

مروری بر فضاهای هیلبرت و عملگرهای خطی

فضای هیلبرت یکی از مفاهیم مهم در آنالیز تابعی است که کاربردهای گوناگونی در زمینه‌های مختلف دارد. در این فصل قصد نداریم فضای هیلبرت را از ابتدا و به‌طور کامل مورد بررسی قرار دهیم و تنها مطالبی را که در فصول آینده به آن نیازمندیم، یادآور خواهیم شد. در این پایان‌نامه برای فضای هیلبرت با ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle$، نماد $\mathcal{H}$ را به کار می‌بریم و آن‌را روی میدان اعداد مختلط، $\mathbb{C}$، در نظر می‌گیریم. همچنین فرض می‌کنیم $\mathcal{H}$ نامتناهی البعد باشد. مطالب این فصل بر مبنای مراجع [۵]، [۶]، [۸]، [۱۵]، [۳۱] و [۳۲] تنظیم شده است.

۱.۲ پایه‌ی هیلبرتی

یکی از مفاهیم مهم در فضاهای هیلبرت، مفهوم تعامد و به دنبال آن مفهوم پایه‌ی هیلبرتی برای این فضاست.

تعریف ۱.۱.۲ دنباله‌ی $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ از بردارها در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ را یک مجموعه‌ی متعامد یکه گوییم، هرگاه

- برای هر k، $\|e_k\| = 1$ و
- اگر $k \neq l$، آنگاه $\langle e_k, e_l \rangle = 0$.

مجموعه‌ی متعامد یکه‌ی ماکسیمال را، یک پایه‌ی هیلبرتی برای $\mathcal{H}$ نامیم.

در حالتی که $\mathcal{H}$ متناهی‌البعد باشد، با استفاده از فرایند گرام-اشمیت می‌توانیم به راحتی یک پایه‌ی متعامد یکه برای آن بسازیم. در حالتی که $\mathcal{H}$ نامتناهی‌البعد باشد وجود پایه‌ی هیلبرتی با استفاده از لم زورن ثابت می‌شود. این حالت را در قضیه‌ی زیر مورد توجه قرار می‌دهیم.

قضیه ۲.۱.۲ هر فضای هیلبرت غیر صفر دارای یک پایه‌ی هیلبرتی است.

برهان. باید نشان دهیم اگر $\mathcal{O} \subset \mathcal{H}$ یک مجموعه از بردارهای متعامد یکه باشد، آنگاه $\mathcal{H}$ دارای یک پایه‌ی متعامد یکه مانند $\mathcal{B}$ است، به‌طوری‌که $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}$. برای این منظور قرار می‌دهیم

$$\mathbf{B} := \{\mathcal{B} \mid \ \mathcal{O} \subset \mathcal{B} \text{ و } \mathcal{B} \text{ متعامد یکه باشد} \}.$$

در این صورت $(\mathbf{B}, \subset)$، یک مجموعه‌ی به‌طور جزیی مرتب است. اگر $\mathbf{C}$ یک زنجیر در $\mathbf{B}$ باشد، تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{C} := \bigcup_{\mathcal{B} \in \mathbf{C}} \mathcal{B}.$$

می‌خواهیم نشان دهیم $\mathcal{C} \in \mathbf{B}$. واضح است که $\mathcal{O} \subset \mathcal{C}$. برای هر $c \in \mathbf{C}$، مجموعه‌ی $\mathcal{B} \in \mathbf{C}$ یافت می‌شود که $c \in \mathcal{B}$ و در نتیجه $\|c\| = ۱$. برای $c_i, c_j \in \mathbf{C}$ مجموعه‌های $\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j \in \mathbf{C}$ وجود دارند که $c_i \in \mathcal{B}_i, c_j \in \mathcal{B}_j$. از آن‌جا که $\mathbf{C}$ یک مجموعه‌ی به‌طور جزیی مرتب است، $\mathcal{B}_k \in \mathbf{C}$ وجود دارد به‌گونه‌ای‌که $\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j \subset \mathcal{B}_k$ و چون $\mathcal{B}_k$ متعامد یکه است، نتیجه می‌شود که $\langle c_i, c_j \rangle = ۰$. پس $\mathcal{C}$ متعامد یکه می‌باشد. بنابراین زنجیر $\mathbf{C}$ در $\mathbf{B}$ از بالا کراندار بوده و با استفاده از لم زورن، $\mathbf{B}$ دارای عضو ماکسیمال است. ■

در قضیه‌ی زیر ضمن بیان چند خاصیت معادل برای پایه‌ی هیلبرتی، به چند خاصیت مهم چنین پایه‌ای در یک فضای هیلبرت اشاره می‌کنیم.

قضیه ۳.۱.۲ فرض کنیم $\{e_k\}_{k=۱}^{\infty}$ یک مجموعه‌ی متعامد یکه در $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادل هستند.

(الف) $\{e_k\}_{k=۱}^{\infty}$ یک پایه‌ی هیلبرتی برای $\mathcal{H}$ است.

(ب) اگر $f \in \mathcal{H}$ و برای هر $k \in \mathbb{N}$، $\langle f, e_k \rangle = ۰$، آنگاه $f = ۰$.

(ج) برای هر $f \in \mathcal{H}$، $f = \sum_{k=۱}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k$. به عبارت دیگر، $f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=۱}^{n} \langle f, e_k \rangle e_k$.

(د) برای هر $g, f \in \mathcal{H}$،

$$\langle g, f \rangle = \sum_{k=۱}^{\infty} \langle g, e_k \rangle \langle e_k, f \rangle.$$

(ه) (اتحاد پارسوال) برای هر $f \in \mathcal{H}$،

$$\|f\|^۲ = \sum_{k=۱}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^۲. \tag{۱.۲}$$

برهان. برای مشاهده‌ی اثبات به مرجع [۸]، فصل ۱ مراجعه شود. ■

فرض کنیم $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه‌ی هیلبرتی برای $\mathcal{H}$ باشد. بنابر قضیه‌ی فوق، هر $f \in \mathcal{H}$ را می‌توانیم به صورت $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ نمایش دهیم که در آن ضرایب c_k به صورت یکتا و برابر $\langle f, e_k \rangle$ مشخص می‌شوند. این ضرایب را ضرایب فوریه برای عضو f در پایه‌ی هیلبرتی $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ می‌نامیم. در گزاره‌ی زیر نیز خاصیت دیگری بیان شده است که می‌توان برای مشاهده‌ی اثبات به مرجع [۱۵]، فصل ۸ مراجعه نمود.

گزاره ۴.۱.۲ فرض کنیم $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک مجموعه‌ی متعامد یکه در $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه‌ی هیلبرتی برای $\mathcal{H}$ است اگر و تنها اگر $span\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ در $\mathcal{H}$ چگال باشد.

در گزاره‌ی فوق منظور از $span\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$، مجموعه‌ی تمام ترکیبات خطی حاصل از اعضای دنباله‌ی $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ می‌باشد. جدایی‌پذیر بودن یک فضای هیلبرت، از جمله مفاهیمی است که خصوصیات مناسبی را برای فضا به دنبال دارد. ابتدا به تعریف آن می‌پردازیم.

تعریف ۵.۱.۲ فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ را جدایی‌پذیر گوییم، هرگاه دارای یک زیرمجموعه‌ی شمارای چگال باشد.

گزاره ۶.۱.۲ یک فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ جدایی‌پذیر است اگر و تنها اگر دارای یک پایه‌ی هیلبرتی شمارا باشد.

برهان. برای مشاهده‌ی اثبات به مرجع [۱۵]، فصل ۸ مراجعه شود. ■

فرض کنیم

$$\ell^2(\mathbb{N}) := \left\{ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \forall n \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

برای $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, b = \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$، قرار می‌دهیم $\langle a, b \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n}$. در این صورت مشاهده می‌شود که $\ell^2(\mathbb{N})$ یک فضای هیلبرت است. با توجه به تعریف نرم در یک فضای هیلبرت، برای هر $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$،

$$\|a\|_2 = \langle a, a \rangle^{1/2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2}.$$

این فضا را به طور معمول با نماد ℓ^2 نمایش می‌دهیم. فضای ℓ^2 مثالی از یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر می‌باشد.

اگر $e_k \in \ell^2$ دنباله‌ای باشد که k-امین مؤلفه‌ی آن ۱ و بقیه‌ی مؤلفه‌ها صفر باشد، آنگاه مجموعه‌ی $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2$ تشکیل یک پایه‌ی هیلبرتی برای این فضا می‌دهد.

این پایه را با $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ نمایش داده و آن‌را پایه‌ی متعامد یکه‌ی متعارف می‌نامیم.

۲.۲ عملگرهای خطی بر یک فضای هیلبرت

در این بخش، برخی از عملگرهای خطی بر یک فضای هیلبرت و ویژگی‌های آن‌ها را یادآور خواهیم شد.

تعریف ۱.۲.۲ عملگر خطی $T:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ را یک عملگر کراندار و یا عملگر پیوسته گوییم، هرگاه عدد $M>0$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $f\in\mathcal{H}$،

$$\|T(f)\|\leq M\|f\|.$$

مجموعه‌ی تمام عملگرهای کراندار روی $\mathcal{H}$ را با نماد $B(\mathcal{H})$ نشان می‌دهیم. این مجموعه همراه با جمع توابع و ضرب اسکالر در توابع به صورت

$$(T_1+T_2)(f)=T_1(f)+T_2(f),\qquad(\alpha T)(f)=\alpha T(f),$$

برای $f\in\mathcal{H}$ و $\alpha\in\mathbb{C}$، یک فضای برداری است. همچنین اگر به‌ازای هر $T\in B(\mathcal{H})$ تعریف کنیم

$$\|T\|=\sup_{0\neq f\in\mathcal{H}}\frac{\|T(f)\|}{\|f\|},\tag{۲.۲}$$

آن‌گاه $\|\cdot\|$ یک نرم بر روی $B(\mathcal{H})$ است. اثبات این موضوع را می‌توان در مرجع [۱۵]، فصل ۳ مشاهده نمود.

توجه داریم که برای هر $f\in\mathcal{H}$، با استفاده از رابطه (۲.۲)،

$$\|T(f)\|\leq\|T\|\|f\|.\tag{۳.۲}$$

لم ۲.۲.۲ فرض کنیم $T\in B(\mathcal{H})$ و برای هر $f\in\mathcal{H}$، $\langle Tf,f\rangle=0$. در این صورت $T=0$.

برهان. برای مشاهده‌ی اثبات به مرجع [۶]، فصل ۲ مراجعه شود. ■

در این پایان‌نامه برای عملگر $T\in B(\mathcal{H})$، $T(f)$ را با نماد Tf نشان می‌دهیم و اگر U نیز یک عملگر در $B(\mathcal{H})$ باشد، نماد TU بیانگر ترکیب این دو عملگر است.

قضیه ۳.۲.۲ اگر T یک عملگر روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، آن‌گاه عملگر یکتای $T^*\in B(\mathcal{H})$ موجود است به‌گونه‌ای‌که برای هر $f,g\in\mathcal{H}$،

$$\langle Tf,g\rangle=\langle f,T^*g\rangle.\tag{۴.۲}$$

برهان. برای مشاهده‌ی اثبات به مرجع [۱۵]، فصل ۹ مراجعه شود. ■

با استفاده از قضیه‌ی فوق به تعریف الحاق یک عملگر هدایت می‌شویم. فرض کنیم $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ فضاهای هیلبرت باشند. برای عملگر کراندار

$$T : (\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}) \to (\mathcal{K}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{K}}),$$

عملگر یکتای $T^* : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ را الحاق عملگر T گوییم، هرگاه برای هر $f \in \mathcal{H}$ و $g \in \mathcal{K}$،

$$\langle Tf, g \rangle_{\mathcal{K}} = \langle f, T^* g \rangle_{\mathcal{H}}.$$

گزاره‌ی زیر، ویژگی‌های الحاق یک عملگر را بیان می‌کند.

گزاره ۴.۲.۲ برای $S, T \in B(\mathcal{H})$ و $\alpha \in \mathbb{C}$، خواص زیر برقرار است.

(الف) $T^{**} = T$،

(ب) $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$،

(ج) $(S+T)^* = S^* + T^*$،

(د) $(ST)^* = T^* S^*$،

(ه) $\|T^*\| = \|T\|$ و $\|T^*T\| = \|T\|^۲$.

برهان. برای مشاهده‌ی اثبات به مرجع [۱۵]، فصل ۹ مراجعه شود. ■

عملگر $T \in B(\mathcal{H})$ را معکوس‌پذیر گوییم، هرگاه عملگر یکتای $S \in B(\mathcal{H})$ موجود باشد به‌گونه‌ای‌که

$$TS = ST = I.$$

عملگر S را برای سهولت با نماد $T^{-۱}$ نمایش می‌دهیم. الحاق چنین عملگری نیز دارای ویژگی زیر است.

گزاره ۵.۲.۲ اگر عملگر $T \in B(\mathcal{H})$ معکوس‌پذیر باشد، آن‌گاه T^* نیز معکوس‌پذیر است و $(T^*)^{-۱} = (T^{-۱})^*$.

برهان. برای مشاهده‌ی اثبات به مرجع [۸]، فصل ۲ مراجعه شود. ■

قضیه‌ی زیر به قضیه‌ی نیومان مشهور بوده و بیان می‌کند که اگر عملگر کراندار T به اندازه‌ی کافی به عملگر همانی نزدیک شود، آن‌گاه معکوس‌پذیر است.

قضیه ۶.۲.۲ برای عملگر کراندار $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$، اگر $\|I - T\| < ۱$، آن‌گاه T معکوس‌پذیر است و

$$T^{-۱} = \sum_{k=۰}^{\infty} (I - T)^k. \tag{۵.۲}$$

علاوه بر آن،

$$\|I - T^{-۱}\| \leq \frac{۱}{۱ - \|I - T\|}. \tag{۶.۲}$$

برهان. برای مشاهده‌ی اثبات به مرجع [۳۲]، فصل ۲۳ مراجعه شود. ■

عملگر $T \in B(\mathcal{H})$ را خود الحاق گوییم، هرگاه $T^* = T$. بعضی از نویسندگان از کلمه‌ی هرمیتی برای این تعریف استفاده می‌کنند. در گزاره‌ی زیر یک شرط لازم و کافی برای خود الحاق بودن عملگر T، بیان شده است.

گزاره ۷.۲.۲ عملگر $T \in B(\mathcal{H})$ خود الحاق است اگر و تنها اگر برای هر $f \in \mathcal{H}$، $\langle Tf, f \rangle \in \mathbb{R}$.

برهان. برای مشاهده‌ی اثبات به مرجع [۱۵]، فصل ۹ مراجعه شود. ■

گزاره ۸.۲.۲ فرض کنیم $T, S \in B(\mathcal{H})$ عملگرهای خود الحاق باشند. در این صورت عملگر TS خود الحاق است اگر و تنها اگر $TS = ST$.

برهان. فرض کنیم TS خود الحاق باشد. بنابراین

$$TS = (TS)^* = S^*T^* = ST.$$

برعکس، فرض کنیم $TS = ST$. در این صورت

$$(TS)^* = (ST)^* = T^*S^* = TS.$$

■

تعریف ۹.۲.۲ برای عملگرهای خود الحاق $T, S \in B(\mathcal{H})$ گوییم $T \leq S$، هرگاه برای هر $f \in \mathcal{H}$،

$$\langle Tf, f \rangle \leq \langle Sf, f \rangle.$$

واضح است که $T \leq T$. همچنین اگر $S \leq T$ و $T \leq S$، طبق تعریف فوق $\langle (T-S)f, f\rangle = \circ$ و لذا طبق لم ۲.۲.۲، $T - S = \circ$ و بنابراین $T = S$. بعلاوه اگر $S \leq T$ و $T \leq U$، طبق تعریف فوق $S \leq U$. به عبارت دیگر، رابطه‌ی معرفی شده در تعریف فوق بیانگر یک رابطه‌ی ترتیب جزیی بین عملگرهای خود الحاق می‌باشد.

یادآور می‌شویم اگر $T \in B(\mathcal{H})$ یک عملگر خودالحاق باشد، نرم T را می‌توان به صورت

$$\|T\| = \sup_{\|f\|=1} |\langle Tf, f\rangle|,$$

به‌دست آورد. همچنین اگر طیف این عملگر را با نماد $\sigma(T)$ نشان دهیم و به صورت

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{معکوس‌پذیر نباشد } T - \lambda I\}$$

تعریف کنیم، آن‌گاه

$$\|T\| = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(T)\}.$$

دلیل گزاره‌های فوق را می‌توان در مرجع [۱۵]، فصل ۹ یافت.

عملگر $T \in B(\mathcal{H})$ را یک عملگر مثبت گوییم، هرگاه T خود الحاق بوده و $\sigma(T) \subset [\circ, \infty)$. برای بررسی مثبت بودن یک عملگر نیز، شرط لازم و کافی زیر را داریم.

گزاره ۱۰.۲.۲ عملگر خودالحاق $T \in B(\mathcal{H})$ مثبت است اگر و تنها اگر برای هر $f \in \mathcal{H}$، $\langle Tf, f\rangle \geq \circ$.

برهان. برای مشاهده‌ی اثبات به مرجع [۱۵]، فصل ۹ مراجعه شود. ■

قضیه ۱۱.۲.۲ فرض کنیم $T, S, U \in B(\mathcal{H})$ عملگرهایی خود الحاق باشند. اگر $S \leq T$، U عملگر مثبت و با هر یک از عملگرهای T و S جابجا شود، آن‌گاه $SU \leq TU$.

برهان. برای مشاهده‌ی اثبات به مرجع [۲۱] مراجعه شود. ■

عملگر $U \in B(\mathcal{H})$ را یکانی گوییم، هرگاه $UU^* = U^*U = I$. به عبارت دیگر، $U^* = U^{-1}$. همچنین اگر U یکانی باشد، برای هر $f, g \in \mathcal{H}$،

$$\langle Uf, Ug\rangle = \langle f, g\rangle.$$

فصل ۳

تعاریف و مفاهیم اولیه‌ی قاب‌ها

به خاطر داریم اگر $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه‌ی هیلبرتی برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه هر $f \in \mathcal{H}$ را می‌توان به صورت $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ با ضرایب یکتای $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ نمایش داد. با توجه به این رابطه به سادگی مشاهده می‌شود که هر پایه‌ی هیلبرتی مجموعه‌ای مستقل خطی از اعضای $\mathcal{H}$ است. معرفی قاب‌ها به ما این امکان را می‌دهد که بدون داشتن شرطی همچون مستقل خطی بودن اعضای پایه، بتوان برای هر $f \in \mathcal{H}$ نمایشی مانند فوق بر حسب اعضای قاب در نظر گرفت.

در این فصل به معرفی قاب و تعاریف و قضایای مربوطه در فضاهای هیلبرت می‌پردازیم. مطالب این فصل بر مبنای مراجع [۶]، [۱۰] و [۳۳] تنظیم شده است.

۱.۳ قاب‌ها در فضاهای هیلبرت

فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر باشد.

تعریف ۱.۱.۳ دنباله‌ی $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ را یک قاب برای $\mathcal{H}$ گوییم، هرگاه اعداد $A, B > 0$ موجود باشند به‌طوری‌که برای هر $f \in \mathcal{H}$،

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^2 \leq B\|f\|^2. \tag{۱.۳}$$

اعداد A و B را به ترتیب کران‌های پایینی و بالایی قاب گوییم. اینفیمم تمام کران‌های بالایی قاب را کران بالایی بهینه و سوپریمم تمام کران‌های پایینی قاب را کران پایینی بهینه برای قاب می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۳ دنباله‌ی $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ در $\mathcal{H}$ را یک قاب چسبان و یا قاب محکم گوییم، هرگاه عدد $A > 0$ موجود باشد

به‌طوری‌که برای هر $f \in \mathcal{H}$،

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 = A\|f\|^2. \tag{۲.۳}$$

در واقع برای یک قاب چسبان مقادیر A و B در (۱.۳)، بر هم منطبق می‌شوند. عدد A را کران قاب و یا به‌طور خلاصه کران گوییم. همچنین اگر $A = 1$ آن‌را قاب پارسوال می‌نامیم.

تعریف ۳.۱.۳ قاب $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ را یک قاب یکنواخت گوییم، هرگاه عدد $c \in \mathbb{R}^+$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $k \in \mathbb{N}$،

$$\|f_k\| = c.$$

ملاحظه می‌کنیم اگر $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ باشد و برای هر $f \in \mathcal{H}$ و نیز هر $k \in \mathbb{N}$، $\langle f, f_k \rangle = 0$، طبق تعریف ۱.۱.۳، $f = 0$ و لذا طبق قضیه‌ی ۳.۱.۲، $\overline{span}\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \mathcal{H}$. حال اگر $\overline{span}\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \neq \mathcal{H}$، هر چند $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ قاب نیست اما با توجه به بسته بودن $\overline{span}\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ و زیر فضا بودن این مجموعه در $\mathcal{H}$، می‌توان انگیزه‌ای برای تعریف زیر داشت.

تعریف ۴.۱.۳ دنباله‌ی $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ در $\mathcal{H}$ را در نظر می‌گیریم. گوییم $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک دنباله قاب است، هرگاه این دنباله برای $\overline{span}\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب باشد.

برای روشن شدن تعاریف فوق، به ذکر برخی از مثال‌های ساختاری می‌پردازیم.

مثال ۵.۱.۳ فرض کنیم $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه‌ی هیلبرتی برای $\mathcal{H}$ باشد. به وضوح این پایه یک قاب یکنواخت برای $\mathcal{H}$ است. توجه داریم که عکس آن همیشه برقرار نیست. در این حالت به قابی که پایه نباشد، فزاینده‌گوییم. اکنون با استفاده از پایه‌ی هیلبرتی فوق، به ساخت قاب‌هایی در فضای $\mathcal{H}$ می‌پردازیم.

۱. اگر

$$\{f_k\}_{k=1}^{\infty} := \{e_1, e_1, e_2, e_3, \ldots\}.$$

در این صورت به‌ازای هر $f \in \mathcal{H}$،

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 = |\langle f, e_1 \rangle|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 = |\langle f, e_1 \rangle|^2 + \|f\|^2,$$

و بنابراین

$$\|f\|^۲ \leq \sum_{k=۱}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^۲.$$

از طرف دیگر،

$$\begin{aligned} \sum_{k=۱}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^۲ &= ۲|\langle f, e_۱\rangle|^۲ + |\langle f, e_۲\rangle|^۲ + |\langle f, e_۳\rangle|^۲ + \cdots \\ &\leq ۲|\langle f, e_۱\rangle|^۲ + ۲|\langle f, e_۱\rangle|^۲ + ۲|\langle f, e_۱\rangle|^۲ + \cdots \\ &= ۲\sum_{k=۱}^{\infty} |\langle f, e_k\rangle|^۲ = ۲\|f\|^۲. \end{aligned}$$

بنابراین $\{f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ یک قاب با کران پایینی ۱ و کران بالای ۲ است. می‌توان به سادگی مشاهده کرد که در این مثال $A = ۱$ کران پایینی بهینه و $B = ۲$ کران بالایی بهینه برای این قاب هستند.

۲. قرار می‌دهیم

$$\{f_k\}_{k=۱}^{\infty} := \{e_۱, e_۱, e_۲, e_۲, e_۳, e_۳, \ldots\}.$$

در این صورت برای $f \in \mathcal{H}$،

$$\sum_{k=۱}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^۲ = \sum_{k=۱}^{\infty} ۲|\langle f, e_k\rangle|^۲ = ۲\sum_{k=۱}^{\infty} |\langle f, e_k\rangle|^۲ = ۲\|f\|^۲,$$

و بنابراین $\{f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ یک قاب چسبان با کران $A = ۲$ است. در حالت کلی، اگر هر عضو پایه‌ی هیلبرتی را m مرتبه تکرار کنیم، یک قاب چسبان با کران $A = m$ خواهیم داشت.

۳. اگر دنباله‌ی $\{f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ را به صورت

$$\{f_k\}_{k=۱}^{\infty} := \{e_۱, \frac{۱}{\sqrt{۲}}e_۲, \frac{۱}{\sqrt{۲}}e_۲, \frac{۱}{\sqrt{۳}}e_۳, \frac{۱}{\sqrt{۳}}e_۳, \frac{۱}{\sqrt{۳}}e_۳, \frac{۱}{\sqrt{۴}}e_۴, \frac{۱}{\sqrt{۴}}e_۴, \frac{۱}{\sqrt{۴}}e_۴, \frac{۱}{\sqrt{۴}}e_۴, \ldots\}$$

در نظر بگیریم، یک قاب پارسوال به دست می‌آوریم، زیرا برای عضو دلخواه $f \in \mathcal{H}$ داریم

$$\begin{aligned} \sum_{k=۱}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^۲ &= |\langle f, e_۱\rangle|^۲ + ۲|\langle f, \frac{۱}{\sqrt{۲}}e_۲\rangle|^۲ + ۳|\langle f, \frac{۱}{\sqrt{۳}}e_۳\rangle|^۲ + \cdots \\ &= \sum_{k=۱}^{\infty} |\langle f, e_k\rangle|^۲ = \|f\|^۲. \end{aligned}$$