دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد

قطعه تخت روی برد عددی ماتریس‌های 3×3

نگارش
فاطمه اسماعیلی طا هری

استاد راهنما
دکتر محمدباقراسدی

استاد مشاور
دکتر رحیم علیزاده

خرداد ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیر و تشکر

با تشکر صمیمانه از استاد ارجمند جناب آقای دکتر اسدی، به خاطر هر آنچه که به من آموختند و با دادن اعتماد به نفس، این روحیه را در من تقویت کردند که بتوانم با پیدا کردن نقاط کور و مبهم، از این موضوع لذت ببرم و با راهنمایی های کلیدی در این راه بازنمانم. نگاه نقادانه و ریزبین ایشان به من آموخت که برای فهم عمیق مطالب باید علاقه مند و صبور بود. هم چنین با سپاس فراوان از استاد محترم جناب آقای دکتر علیزاده که با شرکت در کلاس های آنالیز ماتریس های ایشان توانستم درک زیادی از بردعددی و هندسه بردعددی پیداکنم. پیگیری و انگیزه شان برای کار روی این موضوع مرا بر آن داشت که در تحقیق و مطالعات، جدی و مصمم باشم. و از آقایان دکتر اکبری، دکتر نجفی و دکتر سبزرو، بخاطر راهنمایی هایشان سپاسگزارم. از خداوند متعال آرزوی سلامتی و موفقیت برای تمامی این عزیزان را دارم، که طی دو سال گذشته از گفتار و رفتار آنها درسهای ارزشمندی آموختم و آنچه از لحاظ علمی کسب کرده ام حاصل زحمات ایشان است.

چکیده

درسال های اخیرمطالعات زیادی روی بردعددی ماتریس ها و عملگرهای کراندار صورت گرفته است. دراین پایان نامه، مجموعه ماتریس های۳×۳ مختلط تحویل ناپذیر یکانی که مرز بردعددی آنها دارای قطعه تخت است را بررسی می کنیم و نشان می دهیم این مجموعه همبند راهی است و اگر ناحیه بردعددی دارای شکلی دوبعدی و مرز آن دارای یک قطعه تخت باشد، می توان یک کلاس هم ارزی یکانی از ماتریس ۳×۳ ای که آن را تولید می کند، بیابیم. به طور کلی این پایان نامه قصد دارد توجه مخاطبان عام ریاضی را به تاثیر متقابل و بی نظیر جبرخطی، آنالیز و هندسه(جبری) جلب کند.

کلمات کلیدی: بردعددی [۱] ، منحنی کیپین هان [۲] ، قطعه تخت [۳]

[۱] *Numerical range*
[۲] *Kippenhahn*
[۳] *Flatportion*

فهرست مطالب

مقدمه

مطالعه عملگرهای کراندار یکی از موضوعات مهم در بحث نظریه عملگرها می باشد. ساده ترین نمونه ماتریس ها هستند که در تمام گرایش های ریاضی وجود دارند. ماتریس ها در ریاضیات معرفی شدند و تا امروز ویژگی های آنها بررسی می شود زیرا آنها نقش مهمی در ریاضی و کاربردهای آن بازی می کنند. این پایان نامه به مفهوم مهمی دررابطه با عملگرها به نام بردعددی، و به طور خاص بردعددی ماتریس ها اشاره می کند.

مشابه مفهوم طیف، بردعددی یک ماتریس $n \times n$ مجموعه اعداد مختلطی است که به طور طبیعی وابسته به آن ماتریس می باشد. طیف یک ماتریس یک مجموعه گسسته است، در صورتی که بردعددی می تواند مجموعه ای فشرده و محدب باشد. بردعددی را می توان تصویری از خود ماتریس در نظرگرفت که حاوی اطلاعات مفیدی در مورد ماتریس می باشد که طیف ها به تنهایی نمی توانند چنین اطلاعاتی را به ما بدهند. بردعددی وسیله ای مطمئن برای تعیین محلی است که مقادیر ویژه ماتریس درآنجا متمرکز شده اند. بردعددی این اجازه را به ما می دهد که بسیاری از ویژگی های ماتریس را ببینیم حتی اگر خود ماتریس را دقیقا نشناسیم. به طور مثال از روی بردعددی می توان موقعیت مقادیر ویژه را تعیین کرده و برخی از ویژگی های جبری و آنالیزی آن را استنباط نمود.

مفهوم بردعددی اولین بار برای عملگرهای خطی روی $\mathbb{C}^n$ درسال ۱۹۱۸ توسط تئوپلیتز [۴] درارتباط با مبحث سری های فوریه مطرح گردید. او با الهام از قضیه فجر [۵] که ارتباط بین منحنی های مسطح و سری های فوریه را بیان می کند، به هر ماتریس $n \times n$ یک مجموعه فشرده درصفحه مختلط نسبت داد. درسال ۱۹۱۹ دانشمندان آلمانی تئوپلیتز و هاسدورف [۶] قضیه تحدب بردعددی را اثبات نمودند که به قضیه تئوپلیتز ـ هاسدورف معروف است. این دو هم چنین تئوری بردعددی عملگرهای خطی را روی فضای هیلبرت مطرح کردند. این قضیه درسال ۱۹۳۲ توسط استون [۷] در فضای هیلبرت ثابت شد، در سال ۱۹۹۰ این تئوری در شاخه های آنالیزتابعی و آنالیزعددی نیز معرفی گردید. امروزه بردعددی یک مفهوم شناخته شده در آنالیز ماتریس ها است که در تئوری عملگرها بسیار مورد بررسی قرار می گیرد. بردعددی را می توان روی مجموعه انواع مختلف عملگرها به ویژه عملگرهای هرمیتی و فشرده و همین طور جبر عملگرها مثل جبر باناخ و C^* جبرها نیز معرفی و مورد

[۴] $Toeplitz$
[۵] $Fejer$
[۶] $Huasdorff$
[۷] $M.H.Stone$

استفاده قرار داد. به طور مثال لامر [۸] نشان داد که بردعددی ابزار موثری برای مرتبط کردن ویژگی های جبری و هندسی جبرهای باناخ است و به وسیله آن اثبات قضیه ها در این حوزه ساده تر می شود. به طور کلی آنالیز تابعی بر پایه بردعددی هنوز هم حوزه مجهول و ناشناخته ای برای تحقیق است. از دیگر کاربردهای بردعددی درزمینه آنالیزعددی می توان به نقش بردعددی درنظریه های ارتعاش های کوچک و تکرارهای چبیشف برای دستگاه های خطی وغیره اشاره نمود. هم چنین تعمیم هایی از بردعددی درسیستم های پایدار به کارآمده که منجربه شکوفایی تحقیقات مهندسی دراین زمینه و پروژه های مشترکی میان ریاضی دانان و مهندسان الکترونیک شده است.

این پایان نامه بر اساس مقاله های [۱۵] و [۲۵]نوشته شده که دارای پنج فصل می باشد. ابتدا در فصل اول به ویژگی های پایه ای بردعددی پرداخته و سپس روی نتایجی در مورد تحدب بردعددی و چگونگی ترسیم بردعددی ماتریس ها، به ویژه ماتریس های ۲×۲ متمرکز می شویم. در فصل دوم به مقدماتی در مورد منحنی های جبری که آشنایی با آن برای درک چگونگی ترسیم بردعددی به ویژه بردعددی ماتریس های ۳×۳ لازم است، می پردازیم. در فصل سوم طبقه بندی برد عددی ماتریس های ۳×۳ را بر اساس طبقه بندی کیپین هان، بیان کرده و در فصل چهارم با یکی از ویژگی های هندسی مرز بردعددی یعنی داشتن قطعه تخت روی مرز بردعددی آشنا می شویم و دلایل اهمیت وجود آن را بررسی می کنیم و در فصل آخر به کاربردهایی از بردعددی می پردازیم.

با این حال مفهوم بردعددی بسیار وسیع است و تصویری که در اینجا از بردعددی معرفی می شود در راستای مطالعاتی، بر مبنای دیدگاه و علاقه شخصی است. و تنها هدف این است که بتواند نقطه شروعی برای ایجاد انگیزه و علاقه برای کار روی این موضوع در محققین و دانشجویان باشد.

پیش از آغاز این پایان نامه، به چند جمله ای که گاتکین [۹] در انتهای مقاله اش [۷] بیان کرده است، اشاره می کنم " می خواهم دخالتی در کار خواننده داشته باشم و به او توصیه ای کنم رسم فراگیری وجود دارد که هنگام تحقیق معمولا استادان و دانشجویان روی تحقیقات اخیر تمرکز می کنند، من هم از این قاعده مستثنی نیستم. با این حال تجربه من در مطالعه بردعددی مرا به این نتیجه رسانده است که: مطالعه کارهای پدران علوم بسیار بسیار مفید است. "

[۸] $Lumer$

[۹] $Gutkin$

فصل ۱

تعاریف مقدماتی

۱.۱ بردعددی ماتریس ها

فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ با درایه های مختلط باشد، می دانیم که معادله $\det(\lambda I-A)=0$ معادله مشخصه ماتریس A و مجموعه ریشه های این معادله، $\sigma(A)=\{\lambda_1,...,\lambda_m\}$ طیف A را تشکیل می دهد. فرض کنید [۱]

$$M_R=\max\sigma(Re(A)), m_R=\min\sigma(Re(A))$$

$$M_J=\max\sigma(Im(A)), m_J=\min\sigma(Im(A))$$

درسال ۱۹۰۰ بندیکسون [۲] نشان داد

$$\sigma(A)\subset\{x+iy|(x,y)\in\mathbb{R}^2 : m_R\le x\le M_R, m_J\le y\le M_J\}$$

و یک کران بالا و پایین برای قسمت حقیقی و موهومی مقادیر ویژه ماتریس ها تعیین کرد. در سال ۱۹۰۲ هیرش [۳] این نتایج را توسعه داد و در سال ۱۹۱۸ تؤپلیتز از یافته های این دو استفاده کرده و فرم جبری زیر را معرفی نمود:

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ با درایه های مختلط باشد، برد عددی ماتریس

[۱] به تعریف ۹.۱.۱ مراجعه شود

[۲] *Bendixson*

[۳] *Hirsch*

A مجموعه همه اعدادمختلط x^*Ax [۴] است که $x \in \mathbb{C}^n, x^*x = ۱$ می باشد و آن را با $w(A)$ نمایش می دهیم :

$$w(A) = \{x^*Ax : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = ۱\}$$

یابه عبارت دیگر

$$w(A) = \{< Ax, x >: x \in S\}$$

که در آن S ، گوی واحد $\mathbb{C}^n$ است، یعنی

$$S = \{x \in \mathbb{C}^n : \|x\| = ۱\}$$

ونرم x عبارت است از

$$\|x\| =< x, x >^{\frac{۱}{۲}}= (\sum_{j=۱}^{n} |x|^۲)^{\frac{۱}{۲}}$$

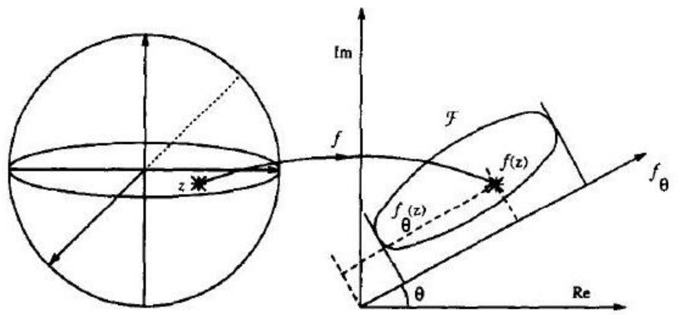
برای هر عدد ثابت n ، ضرب داخلی روی $\mathbb{C}^n$ ، فضای همه بردارهای n مولفه ای با درایه های مختلط، عبارت است از:

$$< x, y >= \sum_{j=۱}^{n} x_j \bar{y}_j, x = \begin{bmatrix} x_۱ \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n, y = \begin{bmatrix} y_۱ \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

M_n را جبر همه ماتریس های مختلط $n\times n$ در نظر می گیریم و میان ماتریس های $n\times n$ وعملگرها روی $\mathbb{C}^n$ تفاوتی قائل نمی شویم. فرض می کنیم A یکی از همین عملگرها باشد، توجه می کنیم دراین فضا A توسط فرم دوخطی $< x, Ay >$ تعیین می شود. مجموعه فشرده ای که تئوپلیتز معرفی می کند، تصویرکره واحد $\{x \in \mathbb{C}^n | x^*x = ۱\}$ تحت نگاشت درجه دوم $x \longrightarrow < x, Ax >$ است. البته باید به این نکته توجه کنیم، از آنجایی که هر عدد مختلط به صورت $x + iy$ دارای نمایش (x, y) در صفحه اعداد حقیقی است، این امکان وجود دارد که بردعددی را زیر مجموعه

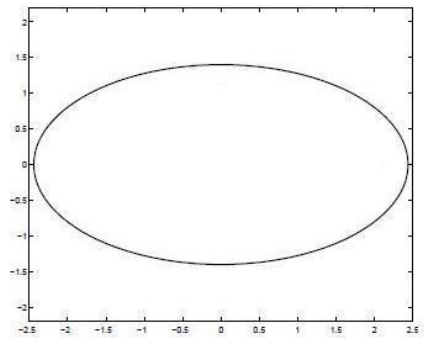
[۴] $x^* = \overline{x^t}$

صفحه اعداد حقیقی در نظر بگیریم.

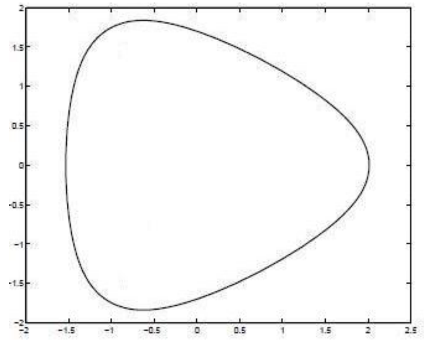


شکل ۱.۱: تصویر کره واحد S تحت نگاشت درجه دوم f

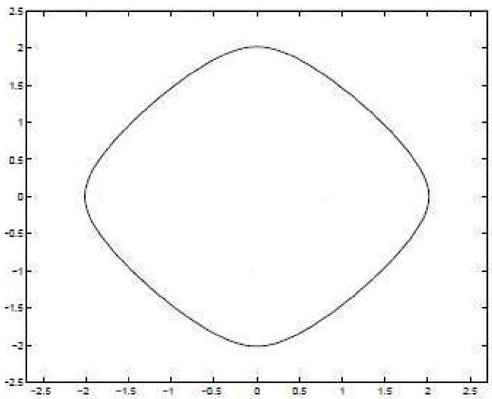
در صفحه بعد چند نمونه از بردعددی ماتریس های ۲×۲ ، ۳×۳ و ماتریس هایی از مراتب بالاتر را مشاهده می کنیم:



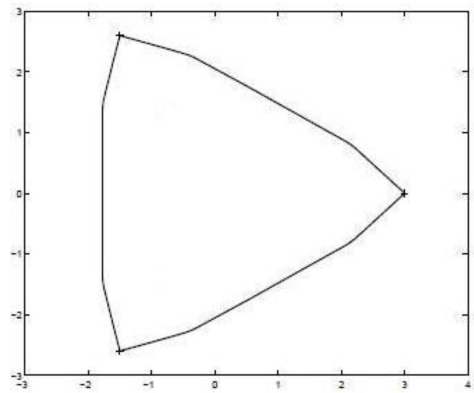
شکل ۲.۱: مرز بردعددی یک ماتریس ۲×۲



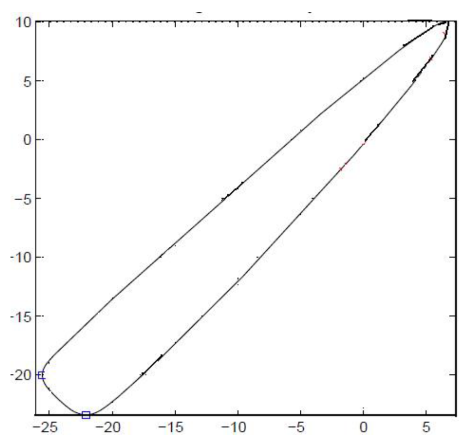
شکل ۳.۱: مرز بردعددی یک ماتریس ۳×۳



شکل ۱.۴: مرز بردعددی یک ماتریس ۴×۴



شکل ۱.۵: مرز بردعددی یک ماتریس ۶×۶



شکل ۱.۶: مرز بردعددی یک ماتریس ۱۰×۱۰

حال برای روشن تر شدن موضوع مثالی می آوریم:

مثال ۲.۱.۱. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ و $x = (x_۱, x_۲) \in \mathbb{C}^n$ بردار یکه باشد، باتوجه به اینکه

$$|\overline{x_۱}x_۲| = |x_۱||x_۲| \leqslant \frac{۱}{۲}(|x_۱|^۲ + |x_۲|^۲) = \frac{۱}{۲}$$

داریم

$$w(A) = \{x^*Ax : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = ۱\} = \{x^* \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} x : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = ۱\}$$
$$= \{\bar{x_۱}x_۲ : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = ۱\}$$

در نتیجه

$$w(A) \subseteq \{z \in \mathbb{C}|\ |z| \leqslant \frac{۱}{۲}\}$$

برعکس فرض کنید $z = re^{i\theta}$ با انتخاب $x_۱ = \cos\alpha, x_۲ = e^{i\theta}\sin\alpha, \alpha = \frac{۱}{۲}arc\sin(۲r)$ که $\theta \in \mathbb{R}, ۰ \leq r \leq \frac{۱}{۲}$ داریم

$$z = x^*Ax = re^{i\theta}$$

درنتیجه $x \in S$ بنابراین

$$w(A) = \{z \in \mathbb{C}|\ |z| \leqslant \frac{۱}{۲}\}.$$

تئوپلیتز نشان داد بردعددی دارای خواص زیر است:

لم ۳.۱.۱. *(خاصیت انتقال و ضرب اسکالر) اگر* $A \in M_n$ *و* $\alpha, \beta \in C$ *دلخواه باشد آنگاه*

$$w(A + \alpha I_n) = w(A) + \alpha, w(\beta A) = \beta w(A)$$

اثبات.

$$\begin{aligned} w(\beta A+\alpha I_n) =&\{x^*(\beta A+\alpha I_n)x | x^*x=۱\}\\ =&\{x^*\beta Ax+\alpha x^* I_n x | x^*x=۱\}\\ =&\{\beta x^*Ax+\alpha | x^*x=۱\}=\beta w(A)+\alpha. \end{aligned}$$

□

لم ۴.۱.۱. *(خاصیت شمول طیفی) برای هر $A \in M_n$ رابطه $\sigma(A) \subseteq w(A)$ برقرار است.*

اثبات. فرض کنید $\lambda \in \sigma(A)$ باشد، پس $\lambda I_n - A$ معکوس پذیر نیست. لذا $x \neq ۰$ در $\mathbb{C}^n$ موجوداست که $Ax=\lambda x$. باتقسیم طرفین بر $\|x\|$ و قرار دادن $\|y\|=۱$ ، $y=\frac{x}{\|x\|}$ داریم $Ay=\lambda y$ پس

$$\lambda = y^*Ay \in w(A).$$

□

نکته ۵.۱.۱. می بینیم که تمام مقدارهای ویژه ماتریس A به برد عددی A تعلق دارد، اما برد عددی معمولا بسیار بزرگتر از غلاف محدب مقادیر ویژه A است. به طور مثال مقدارهای ویژه یک ماتریس ۲ × ۲ حداکثردو تا است که غلاف محدب آن به صورت یک خط راست است ولی بردعددی آن به شکل بیضی است.

لم ۶.۱.۱. *(خاصیت زیرجمعی) فرض کنید $A, B \in M_n$ آنگاه*

$$w(A+B) \subseteq w(A)+w(B)$$

اثبات.

$$\begin{aligned} w(A+B) =&\{x^*(A+B)x | x^*x=۱\}\\ =&\{x^*Ax+x^*Bx | x^*x=۱\}\\ &\subseteq \{x^*Ax+y^*By | x^*x=y^*y=۱\}\\ &\subseteq \{x^*Ax | x^*x\}+\{y^*By | y^*y=۱\}\\ =&w(A)+w(B) \end{aligned}$$

□

تعریف ۷.۱.۱. ماتریس $U \in M_n$ را یکانی گوییم هرگاه $U^*U = I_n$

لم ۸.۱.۱. (*خاصیت تشابه یکانی*) *فرض کنید* $U, A \in M_n$ *و* U *ماتریسی یکانی باشد آنگاه داریم*

$$w(U^*AU) = w(A)$$

اثبات. فرض کنید $\lambda \in w(U^*AU)$ باشد. بنابراین x ای وجود دارد بطوریکه

$$\lambda =< U^*AUx, x >=< AUx, Ux >$$

و می دانیم که

$$\|Ux\|^۲ =< Ux, Ux >=< U^*Ux, x >= \|x\|^۲ = ۱$$

لذا $\lambda = (AUx, Ux)$ و در نتیجه $\lambda \in w(A)$ پس

$$w(U^*AU) \subseteq w(A)$$

به طریق مشابه

$$w(A) \subseteq w(U^*AU)$$

بنابراین

$$w(U^*AU) = w(A).$$

□

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید $A \in M_n$ باشد قرار می دهیم :

$$H(A) = \frac{۱}{۲}(A + A^*), S(A) = \frac{۱}{۲}(A - A^*)$$

به $H(A)$ قسمت هرمیتی A و به $S(A)$ قسمت پادهرمیتی A می گوییم .

به طور کلی عملگرهای خطی وابسته به اینکه فضای مربوطه دارای حاصلضرب داخلی حقیقی یا مختلط است در دو طبقه نامگذاری می شوند. در حالت حقیقی این تبدیل ها، تقارنی و پادتقارنی و در حالت مختلط هرمیتی و پادهرمیتی نامیده می شوند. این عملگرها در کاربردهای متفاوت بی

شماری نقش دارند، به عنوان مثال عملگرهای هرمیتی نقش مهمی را بر فضاهای نامتناهی البعد در مکانیک کوانتوم ایفا می کنند.

لم ۱۰.۱.۱. (*خاصیت تصویر*) *فرض کنید $A \in M_n$ آنگاه داریم* $Re(w(A)) = w(H(A))$

اثبات. برای هر $x \in \mathbb{C}^n$ داریم:

$$\begin{aligned} w(H(A)) = \{< H(A)x, x > | x \in S\} =& \frac{۱}{۲}\{< (A + A^*)x, x > | x \in S\} \\ =& \frac{۱}{۲}\{< Ax, x > + < A^*x, x > | x \in S\} \\ =& \frac{۱}{۲}\{< Ax, x > + \overline{< Ax, x >} | x \in S\} \\ =& Re < Ax, x > \end{aligned}$$

بنابراین $Re(w(A)) = w(H(A))$. □

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید $A \in M_n$ ماتریس A را نرمال گوییم اگر و تنها اگر $A^*A = AA^*$.

قضیه ۱۲.۱.۱. [۱۳] *فرض کنید $A \in M_n$ نرمال باشد آنگاه ماتریس یکانی U چنان موجود است که $A = U^*diag(\lambda_۱, ..., \lambda_n)U$ که $\lambda_۱, ..., \lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس A هستند.*

تعریف ۱۳.۱.۱. فرض کنید $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{C}^n$ می گوئیم A محدب است هر گاه پاره خط واصل بین هر دو نقطه دلخواه A تماما در A قرار بگیرد.

تعریف ۱۴.۱.۱. غلاف محدب [۵] مجموعه K به صورت زیر تعریف می شود:

$$co(K) = \{\lambda_۱ x_۱ + ... + \lambda_n x_n | \lambda_۱ + ... + \lambda_n = ۱, \lambda_۱, .., \lambda_n \geq ۰, x_۱, ..., x_n \in K, n \in \mathbb{N}\}$$

لم ۱۵.۱.۱. *فرض کنید $A \in M_n$ نرمال باشد آنگاه*

$$w(A) = co(\sigma(A))$$

[۵] $Convexhull$

اثبات. فرض کنید $\lambda_1, ..., \lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس A باشند، آنگاه باتوجه به قضیه بالا ماتریس یکانی U چنان موجود است که $A = U^* diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)U$ می باشد. طبق لم تشابه یکانی به ازای هر $x \in \mathbb{C}^n$ داریم:

$$\begin{aligned} w(A) =& w(diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)) \\ =& \{((diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)x, x) : \|x\| = 1\} \\ =& \{\sum_{j=1}^{n} x_j \bar{x_j} \lambda_j, \|x\| = 1\} \\ =& \{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \lambda_j, \|x\| = 1\} \end{aligned}$$

همانطورکه می دانیم $|x|^2 \geq 0$ است و $\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 = 1$ پس

$$w(A) = co(\lambda_1, ..., \lambda_n) = co(\sigma(A))$$

□

با دیدن این قضیه می توان پی برد که چگونه بردعددی دیدگاه متفاوتی را برای بررسی پیدا کردن نزدیکترین حالت به حالت نرمال ماتریس، به ما نشان می دهد. برای آشنایی بیشتر می توانید مقاله[۲۷] را ببینید.

لم ۱۶.۱.۱. *(خاصیت فشردگی) فرض کنید $A \in M_n$ آنگاه $w(A)$ زیرمجموعه فشرده ای از $\mathbb{C}$ است.*

اثبات. نگاشت $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{C}$ که $x \longmapsto x^*Ax$ نگاشتی پیوسته است، وچون S مجموعه ای فشرده در $\mathbb{C}$ است، با توجه به پیوستگی نگاشت فوق $w(A)$ نیز یک مجموعه فشرده در $\mathbb{C}$ است. □

نکته ۱۷.۱.۱. [۴] بردعددی، مجموعه ای کراندار است ولی در حالت کلی مجموعه ای بسته نیست. بطور مثال اگر عملگر شیفت S بصورت زیر

$$S(x_0, x_1, ...) = (0, x_0, x_1, ...)$$

را روی $l^{۲}$ در نظر بگیریم آنگاه بردعددی S دیسک باز واحد $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < ۱\}$ است، درحالیکه اگر فضا را متناهی البعد در نظر بگیریم $w(S)$ بسته و در نتیجه فشرده خواهد شد.

نکته ۱.۱.۱۸. همبند بودن $w(A)$ نیز مشابه قضیه بالا قابل اثبات است.

تعریف ۱.۱.۱۹. برای $J \subseteq \{۱, ۲, ..., n\}$ و $A \in M_n$ ، $J(A)$ زیر ماتریسی از A است که در آن سطر و ستون i ام ماتریس A که $i \notin J$ ، حذف شده باشد.

قضیه ۱.۱.۲۰. *برای هر* $J \subseteq \{۱, ۲, ..., n\}$ *داریم* $w(A_J) \subseteq w(A)$

اثبات. فرض کنید $J = \{n_۱, n_۲, ..., n_k\}$ که $۱ \leq n_۱ < ... < n_k = n$ باشد و $z \in w(A_J)$ لذا $y = (y_۱, ..., y_k) \in \mathbb{C}^k$ موجود است که $y^*y = ۱$ و $z = y^*Ay$ حال بردار یکه $x = (x_۱, ..., x_n)$ را به صورت زیر بسازید

$$x_i = \begin{cases} y_i & i \in J \\ ۰ & i \notin J \end{cases}$$

داریم

$$z = y^*(A_J)y = x^*Ax \in w(A)$$

و در نتیجه $w(A_J) \subseteq w(A)$. □

تعریف ۱.۱.۲۱. نیم صفحه چپ باز $\mathbb{C}$ را با RHP نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$RHP = \{z \in \mathbb{C} |\ \ Rez > ۰\}$$

و همین طور داریم

$$RHP_۰ = \{z \in \mathbb{C} |\ \ Rez \geqslant ۰\}$$

تعریف ۱.۱.۲۲. ماتریس A را معین مثبت گوئیم هرگاه برای هر بردار ناصفر x داشته باشیم $x^*Ax > ۰$ در صورتی که $x^*Ax \geqslant ۰$ باشد، ماتریس A را نیمه معین مثبت گوئیم.

لم ۱.۱.۲۳. *فرض کنید ماتریس* A *ماتریسی* $n \times n$ *باشد* $w(A) \subseteq RHP_۰$ *اگر و تنها اگر* $H(A)$ *نیمه معین مثبت باشد*

اثبات. اگر $w(A) \subseteq RHP$، در این صورت داریم $w(A) \subseteq \{z \in \mathbb{C} | Re(z) \geq \circ\}$ و چون $w(H(A)) = Re(w(A))$ بنابراین خواهیم داشت

$$w(H(A)) \subseteq w(A) \subseteq \{z \in \mathbb{C} | Re(z) \geq \circ\}$$

پس

$$w(H(A)) = \{x^* H(A) x | x^* x = \text{۱}\} \geq \circ$$

یعنی به ازای هر $x \in \mathbb{C}^n$ داریم $x^* H(A) x \geq \circ$ بنابراین $H(A)$ نیمه معین مثبت است. □

درتئوری ماتریس ها همان طور که دترمینان را تابعی تعبیر و تفسیر می کنیم که به هر ماتریس، عددی را که دترمینان آن ماتریس نامیده می شود را تخصیص می دهد، بردعددی هم تابعی است که به هر ماتریس مجموعه ای فشرده و محدب را که بردعددی آن ماتریس نامیده می شود، اختصاص می دهد. دیدیم که بردعددی دارای خواص متنوعی بود. اما می خواهیم بدانیم که کدام یک از این ویژگی ها از سایر ویژگی ها نتیجه می شود؟ به عبارت دیگر به دنبال حداقل ویژگی هایی هستیم که بردعددی را به طور منحصر به فردی مشخص می کند. قضیه زیر به این سؤال پاسخ می دهد.

قضیه ۲۴.۱.۱. *تابع $\varphi : M_n \longrightarrow \mathbb{C}$ تابع بردعددی است اگر در سه شرط زیر صدق کند:*

۱) *برای هر $A \in M_n$، $\varphi(A)$ محدب و فشرده باشد.*

۲) *برای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ و $A \in M_n$ تساوی های زیر برقرار باشند*

$$\varphi(A + \alpha I_n) = \varphi(A) + \alpha, \varphi(\alpha A) = \alpha \varphi(A).$$

۳) *برای هر $A \in M_n$، $\varphi(A) \subset RHP$ اگر و تنها اگر $H(A)$ مثبت معین باشد.*

برای اثبات قضیه بالا از قضیه زیر استفاده می کنیم:

قضیه ۲۵.۱.۱. *اگر A, B دو زیر مجموعه از هم جدای محدب و فشرده از $\mathbb{R}^\text{۲}$ باشند، خط L چنان موجود است که اشتراکی با A, B نداشته و A در یک طرف و B در طرف دیگر آن خط می باشد.*

اثبات. نتیجه بدیهی از قضیه جداسازی هان - باناخ است. □

اثبات. (قضیه ۲۴.۱.۱) با توجه به اینکه بردعددی در سه شرط بالا صدق می کند کافی است نشان دهیم فقط یک تابع موجود است که در شرط بالا صدق می کند . فرض کنید $\varphi_۱, \varphi_۲$ در سه شرط گفته شده صدق کنند کافی است نشان دهیم برای هر $A \in M_n$ ، $\varphi_۱(A) = \varphi_۲(A)$ می باشد. با توجه به تقارن بحث کافی است نشان دهیم $\varphi_۱(A) \subseteq \varphi_۲(A)$ فرص کنید چنین نباشد پس β متعلق به $\varphi_۱(A)$ موجود است که β به $\varphi_۲(A)$ تعلق ندارد. طبق قضیه بالا خط L چنان موجود است که β و $\varphi_۲(A)$ در دو طرف متفاوت آن قرار می گیرند. با یک انتقال و یک دوران می توان L راچنان بر محور y ها منطبق کرد که β درسمت چپ و $\varphi_۲(A)$ در سمت راست آن قرار گیرند به عبارت دیگر اعداد مختلط λ و θ که $(۰ \leq \theta \leq ۲\pi)$ ، چنان موجودند که :

$$e^{i\theta}(\beta + \lambda) \notin RHP, e^{i\theta}(\varphi_۲(A) + \lambda) \in RHP \tag{۱.۱}$$

اما با توجه به ویژگی (ب) داریم

$$\varphi_۲(e^{i\theta}(A + \lambda I)) = e^{i\theta}(\varphi_۲(A + \lambda I)) = e^{i\theta}(\varphi_۲(A) + \lambda) \subseteq RHP$$

باتوجه به خاصیت (ج) برای $\varphi_۲(A)$ ، $H(e^{i\theta}(A) + \lambda I_n)$ مثبت معین است. اما با توجه به اینکه $\beta \in \varphi_۱(A)$ و $\varphi_۱(A)$ نیز در شرط (ب) صدق می کند داریم

$$e^{i\theta}(\beta + \lambda) \in e^{i\theta}(\varphi_۱(A) + \lambda) \subseteq \varphi_۱(e^{i\theta}(A) + \lambda I) \tag{۲.۱}$$

حال چون $H(e^{i\theta}(A) + \lambda I_n)$ مثبت معین است و چون $\varphi_۱$ در شرط (ج) صدق می کند داریم $\varphi_۱(e^{i\theta}(A + \lambda I)) \subseteq RHP$ پس با توجه (۲.۱) داریم $e^{i\theta}(\beta + \lambda) \in RHP$ که با (۱.۱) در تناقض است. پس $\varphi_۱(A) \subseteq \varphi_۲(A)$ و حکم ثابت است. □

تئوپلیتز فرض کرد $w(A)$ محدب است وثابت کرد مرز بیرونی آن یک منحنی محدب می باشد. یک سال بعد نیز هاسدورف فرض تئوپلیتز را اثبات کرد. اثباتهای زیادی برای نشان دادن خاصیت تحدب بردعددی بعد از اثبات هاسدورف ارائه و در اکثر آنها از تکنیک کاهش دادن (خاص کردن) مسأله به ماتریس های ۲×۲ استفاده شده که مراحل آن به صورت زیر است:

مرحله ۱: در این مرحله نشان می دهیم برای اثبات تحدب بردعددی ماتریس $n \times n$ کافی است ثابت

کنیم که بردعددی هر ماتریس ۲×۲ محدب است.

مرحله ۲: در این مرحله نشان می دهیم برای اینکه ثابت کنیم بردعددی هر ماتریس ۲×۲ محدب است، کافی است ثابت کنیم بردعددی هر ماتریس ۲×۲ به شکل $A = \begin{bmatrix} ۰ & a \\ b & ۰ \end{bmatrix}$ که a, b نامنفی هستند، محدب است.

مرحله ۳: در این مرحله نشان می دهیم بردعددی هر ماتریس ۲×۲ به شکل $A = \begin{bmatrix} ۰ & a \\ b & ۰ \end{bmatrix}$ یک بیضی ناتبهگون می باشد.

برای اجرای مرحله۱ ابتدا نیاز به دانستن لم زیر است، اما قبل از آن به یک نکته اشاره می کنیم.

نکته ۲۶.۱.۱. برای هر ماتریس $A, B \in M_n$ اگر $AB = I_n$ آنگاه A, B معکوس یکدیگرند.

لم ۲۷.۱.۱. [۱۵] *برای هر دو بردار* $x, y \in \mathbb{C}^n$ *ماتریس یکانی* U *و بردارهای* $v, w \in \mathbb{C}^n$ *با* $v = (v_۱, v_۲, ۰, ۰, ..., ۰), w = (w_۱, w_۲, ۰, ۰, ..., ۰)$ *چنان موجودند که*

$Uv = x, Uw = y.$

حال این سؤال مطرح می شود که آیا این لم را می توان به حالت نامتناهی البعد تعمیم داد؟

لم ۲۸.۱.۱. *اگر بردعددی هر* $A \in M_۲$ *محدب باشند آنگاه بردعددی هر* $A \in M_n (n \geq ۲)$ *نیز محدب اند.*

اثبات. فرض کنید $x, y \in \mathbb{C}^n$ و $x^*x = ۱, y^*y = ۱$. اگر $۰ \leq \lambda \leq ۱$ ، باید نشان دهیم

$$\lambda x^*Ax + (۱ - \lambda)y^*Ay \in w(A)$$

طبق لم قبل ماتریس یکانی $U \in M_n$ و بردارهای $v = (v_۱, v_۲, ۰, ..., ۰), w = (w_۱, w_۲, ۰, ..., ۰)$ در $\mathbb{C}^n$ موجودند که $Uv = x, Uw = y$. پس

$$\begin{aligned}
&\lambda x^*Ax + (۱ - \lambda)y^*Ay \\
=&\lambda(Uv^*)A(Uv) + (۱ - \lambda)(w^*U^*)A(Uw) \\
=&\lambda < A(Uv), Uv > +(۱ - \lambda) < A(Uw), Uw > \\
=&\lambda < U^*A(Uv), v > +(۱ - \lambda) < U^*A(Uw), w >
\end{aligned}$$