تقدیم به چشمان پرمهر پدر و مادرم

و به نگار، فرزانه و همه‌ی کسانی که دوستشان دارم ...

فهرست مندرجات

پیشگفتار

در این پایان‌نامه تمامی حلقه‌ها تعویض‌پذیر و یکدار با $0 \neq 1$ هستند و تمامی توسیع‌ها، هم‌ریختی‌ها، زیرحلقه‌ها، مدول‌ها و زیر مدول‌ها، جبرها و زیرجبرها یکانی هستند. بویژه هرگاه R یک حلقه و S زیرحلقه‌ی R باشد، $1_R = 1_S \neq 0$.

FIP مخفف کلمه‌ی " finitely many intermediate algebras property " است و با توجه به این‌که هر جبر یک حلقه می‌باشد تعریف زیر را بیان می‌کنیم:

فرض کنیم R و T دو حلقه هستند. توسیع $R \subseteq T$ را یک FIP−توسیع از حلقه‌ها می‌نامیم هرگاه تعداد حلقه‌های بین R و T متناهی باشد. به بیان دیگر تعداد R−زیرجبرهای T متناهی باشد.

پیش از این مطالب زیادی از توسیع میدان‌ها و مباحث مربوط به آن هم‌چون نظریه گالوا در کتاب‌ها و مقالات زیادی مطرح شده است، ایده‌ی اصلی تعریف FIP نیز از قضیه‌ی کلاسیک عضو ابتدایی برای میدان‌ها که به‌صورت زیر است گرفته شده است.

قضیه عضو ابتدایی : هرگاه $K \subseteq L$ توسیع متناهی بعدی از میدان‌ها باشد آن‌گاه $\alpha \in L$ وجود دارد که $L = K(\alpha)$ اگر و تنها اگر بین K و L تعداد متناهی میدان وجود داشته باشد.

بنابراین قضیه‌ی بالا انگیزه‌ی بررسی و تعمیم چند مطلب در ارتباط با توسیع‌های حلقه‌های تعویض‌پذیر را برای ما و خواننده ایجاد می‌کند، برای مثال این‌که چه موقع در توسیع $R \subseteq T$ از حلقه‌ها عضو $\alpha \in T$ وجود دارد که $R[\alpha] = T$، (به اصطلاح می‌گوییم این توسیع دارای خاصیت عضو ابتدایی است و α را عضو ابتدایی توسیع می‌نامیم) که در مرجع [۲] بررسی

شده است یا این‌که چه موقع توسیع $R \subseteq T$ از حلقه‌ها دارای این خاصیت است که تعداد $R-$زیرجبرهای $R-$جبر T متناهی است، به بیان دیگر تعداد حلقه‌هایی که بین R و T است متناهی است (این خاصیت را FIP می‌نامیم و موضوع اصلی این پایان نامه است). در نظریه‌ی توسیع‌ها بررسی این دو خاصیت و ارتباط این دو با هم بسیار حائز اهمیت می‌باشد.

این پایان‌نامه در دو فصل گردآوری شده است که در فصل اول مقدمات جبری لازم پی‌ریزی شده است. در فصل دوم به بررسی $FIP-$توسیع‌ها می‌پردازیم. در بخش اول به بیان مثال‌ها و قضایایی جهت آشنایی و تسلط بیش‌تر بر این مفهوم می‌پردازیم. سپس در بخش دوم به بیان نتایجی می‌پردازیم که در بخش‌های بعد از آن‌ها استفاده خواهیم کرد. هم‌چنین در این بخش توسیع‌های چندجمله‌ای‌ها را نیز مورد بررسی قرار می‌دهیم. در بخش سوم، $FIP-$توسیع‌های حاصل‌ضرب تعداد متناهی از حلقه‌ها را بررسی می‌کنیم. در بخش چهارم نشان می‌دهیم که چنان‌چه R دامنه‌ی صحیح غیرمیدان با خارج‌قسمت‌های متناهی (یعنی برای هر ایدال ناصفر I از R، R/I متناهی باشد) باشد در این‌صورت توسیع $R \subseteq R[u]$ که u عضوی ناصفر متعلق به توسیعی از حلقه‌ی R است یک $FIP-$توسیع از حلقه‌هاست اگر و تنها اگر $(\circ : u) \neq \circ$ باشد. با استفاده از این موضوع در بخش پنجم حلقه‌هایی را که دارای تعداد متناهی زیرحلقه‌اند را رده‌بندی می‌کنیم و در بخش نهایی نیز اشاره‌ای گذرا به $RFIP-$توسیع‌ها خواهیم داشت.

فصل ۱

مقدمات جبری

در این فصل قصد داریم به یادآوری یک سری مفاهیم اولیه بپردازیم. مطالبی که در این فصل ارائه می‌گردد به نوعی در طول این پایان‌نامه بکار برده شده است، لذا ضروری دانستیم قبل از شروع اصل کار که از فصل دوم آغاز می‌شود، مروری بر آن‌ها داشته باشیم. همان‌طور که مرسوم است؛ $\mathbb{R}$ نشان‌دهنده‌ی مجموعه‌ی اعداد حقیقی، $\mathbb{N}$ مجموعه‌ی اعداد طبیعی، $\mathbb{Z}$ مجموعه‌ی اعداد صحیح، $\mathbb{Q}$ مجموعه‌ی اعداد گویا و $\mathbb{C}$ مجموعه‌ی اعداد مختلط را نشان می‌دهد.

۱.۱ تعاریف مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه باشد. فرض کنیم x یک مجهول (یا متغیری مستقل) روی R باشد. فرض کنیم $R[x]$ مجموعه‌ی چندجمله‌ای‌های بر حسب x با

ضرایب در R باشد، یعنی

$$R[x] = \{a_0 + a_1x + \ldots + a_rx^r : a_i \in R, r \in \mathbb{Z}^+\}.$$

فرض کنیم $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_rx^r$ و $g(x) = b_0 + b_1x^1 + \ldots + b_sx^s$ چندجمله‌ای‌هایی دلخواه در $R[x]$ باشند و $r \leq s$ در این‌صورت این مجموعه با عمل جمع و ضرب زیر تشکیل حلقه می‌دهد:

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_r + b_r)x^r + b_{r+1}x^{r+1} + \cdots + b_sx^s$$

و

$g(x)f(x) = \sum_{i=0}^{r+s} c_ix^i$ که در آن $c_i = \sum_{k=0}^{i} a_kb_{k-i}$. هم‌چنین $f(x) = g(x)$ اگر و تنها اگر $r = s$ و برای هر i که $0 \leq i \leq r$ است، $a_i = b_i$ باشد. در حالت خاص، $a_0 + a_1x + \ldots + a_rx^r = 0$ است اگر و تنها اگر برای هر i، $a_i = 0$ باشد. هرگاه $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_rx^r \neq 0$ و $a_r \neq 0$ باشد آن‌گاه a_r را ضریب پیشروی $p(x)$ می‌نامیم، r درجه $p(x)$ را با $deg\ p(x)$ نشان می‌دهیم و a_0 را جمله‌ی ثابت $p(x)$ می‌نامیم. یک چندجمله‌ای که جمله‌ی ثابت آن صفر باشد را چندجمله‌ای با ثابت صفر می‌نامیم. اگر R دارای واحد باشد، آن‌گاه چندجمله‌ای غیرصفری که ضریب پیشروی آن ۱ باشد، یک چندجمله‌ای تکین نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۱.۱ هرگاه $\{x_1, \cdots, x_n\}$ مجموعه‌ای از مجهول‌ها(یا متغیرهای مستقل) باشند، آن‌گاه:

$$R[x_1, \cdots, x_n] = \{f = \sum_{i_1, \cdots, i_n = o}^{k} a_{i_1, \cdots, i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} | a_{i_1, \cdots i_n} \in R, k, i_j \in \mathbb{Z}^+\}$$

نیز حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های از n متغیر است.

قضیه ۳.۱.۱ هرگاه R یک حلقه باشد در این‌صورت:

(۱) $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_rx^r \in R[x]$ یکال است اگر و تنها اگر a_0 یکال باشد و

برای هر $i \geq 1$، a_i ها پوچ‌توان باشند.

(۲) $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_rx^r \in R[x]$ پوچ‌توان است اگر و تنها اگر همه‌ی a_i ها پوچ توان باشند.

(۳) (قضیه‌ی مک کوی [1]) $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_rx^r \in R[x]$ مقسوم‌علیه‌صفر است اگر و تنها اگر $b \neq 0 \in R$ موجود باشد که $bf = 0$.

اثبات. بخش ٦ از فصل ۳ از مرجع [۱۳] را ببینید. □

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنیم R حلقه‌ای دلخواه است. کوچکترین عدد صحیح مثبت n (در صورت وجود) را مشخصه‌ی حلقه‌ی R می‌گوییم هرگاه برای هر $a \in R$ داشته باشیم $na = 0$. در غیر این‌صورت R را با مشخصه‌ی صفر می‌نامیم. مشخصه‌ی یک حلقه را با $Char(R)$ نشان می‌دهیم .

بدیهی است که هرگاه R حلقه‌ای یکدار با مشخصه‌ی $n > 0$ باشد در این‌صورت دارای زیرحلقه‌ای یک‌ریخت با $\mathbb{Z}_n$ است و اگر $Char(R) = 0$ باشد آن‌گاه دارای زیرحلقه‌ای یک‌ریخت با $\mathbb{Z}$ است.

در دوره‌ی کارشناسی دیدیم که هرگاه F میدان باشد آن‌گاه $F[x]$ دامنه‌ی صحیح است.

تعریف ۵.۱.۱ چندجمله‌ای غیرثابت $f(x) \in R[x]$ را تحویل‌ناپذیر گوییم، هرگاه $f(x) = g(x)h(x)$ باشد در این‌صورت یا درجه‌ی $h(x)$ صفر باشد یا درجه‌ی $g(x)$.

قضیه ٦.۱.۱ محک ایزنشتاین : فرض کنیم D دامنه‌ی تجزیه‌ی یکتا است. هرگاه $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_rx^r \in D[x]$ و $deg(f) \geq 1$ و p عضو تحویل‌ناپذیری در D

[1] McCoy

باشد به‌طوری‌که

$$p|a_n \;; p|a_i, i = \circ, \mathsf{1}, \cdots, n - \mathsf{1} \;; p^{\mathsf{2}} \not| a_\circ$$

در این‌صورت f چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیری در $D[x]$ است.

اثبات. قضیه‌ی ٦.۱۵.۳ از مرجع [۱۳] را ببینید. □

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنیم S زیرمجموعه‌ای از R است. S را یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از R می‌گوییم هرگاه $\mathsf{1} \in S$ و $\circ \notin S$ و برای هر $x, y \in S$ داشته باشیم $xy \in S$.

مثال ۸.۱.۱ هرگاه $\{P_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از ایدال‌های اول حلقه‌ی R باشد، آن‌گاه $S := R\setminus \bigcup_{i\in I} P_i$ یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی R است.

لم ۹.۱.۱ فرض کنیم S یک مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از حلقه‌ی R باشد. رابطه‌ی $\sim$ را روی $R \times S$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: به ازای $(a, s), (b, t) \in R \times S$

$$(a, s) \sim (b, t) \iff \exists u \in S : u(ta - sb) = \circ$$

در این‌صورت $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی $R \times S$ است.

اثبات. قضیه‌ی ۲.۴.۳ از مرجع [۱۳] را ببینید. □

نکته ۱۰.۱.۱ (۱) به ازای $(a, s) \in R \times S$، رده‌ی هم‌ارزی شامل (a, s) را با $\frac{a}{s}$ و مجموعه رده‌های هم‌ارزی $\sim$ را با $S^{-\mathsf{1}}R$ نمایش می‌دهیم. در این‌صورت $S^{-\mathsf{1}}R$ تحت عمل‌های

$$\frac{a}{s}\frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

و

$$\frac{a}{s}+\frac{b}{t}=\frac{ta+sb}{st}$$

به ازای a,b های متعلق به R، و s,tهای متعلق به S، حلقه‌ای تعویض‌پذیر است. این حلقه‌ی جدید $S^{-1}R$ حلقه‌ی کسرهای R نسبت به S نامیده می‌شود. معمولاً آن را موضع‌سازی R نسبت به S نیز می‌نامیم و آن را با R_S نیز نشان می‌دهیم. هم‌چنین هرگاه $a \in R$ یک عضو نامقسوم‌علیه‌صفر باشد و $S=\{1,a,a^2,\cdots\}$ به جای R_S می‌نویسیم R_a.

(۲) عضو صفر حلقه‌ی $S^{-1}R$ ، $\frac{0}{1}$ و عضو همانی آن $\frac{1}{1}$ است.

(۳) فرض کنیم $a \in R$ و $s \in S$. در این‌صورت $\frac{a}{s}=0_{S^{-1}R}$ اگر و تنها اگر $t \in S$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $t(1a-s0)=0$، یعنی $ta=0$.

(۴)هم‌ریختی طبیعی $f:R\longrightarrow S^{-1}R$ با ضابطه‌ی $f(a)=\frac{a}{1}$ برای هر $a\in R$ وجود دارد.

(۵) هم‌ریختی حلقه‌ای طبیعی $f:R\longrightarrow S^{-1}R$ لزوماً یک به یک نیست. از بند ۳ در بالا نتیجه می‌شود که

$$ker(f)=\{a\in R \mid ta=0 \text{ موجود باشد که } t\in S\}.$$

(٦) اگر S یک زیرمجموعه‌ی بسته ضربی از حلقه‌ی R و $f:R\longrightarrow S^{-1}R$ هم‌ریختی طبیعی باشد، آن‌گاه:

(الف) برای هر $s\in S$، $f(s)=\frac{s}{1}$ در $S^{-1}R$ یکال است و $\frac{1}{s}$ وارون آن است.

(ب) هر عضو $\frac{a}{s}$ از حلقه‌ی $S^{-1}R$ را که در آن $a\in R$ و $s\in S$ است می‌توان به‌صورت $\frac{a}{s}=f(a)(f(s))^{-1}$ نوشت. زیرا:

$$\frac{a}{s}=\frac{a}{1}\cdot\frac{1}{s}=\frac{a}{1}\cdot(\frac{s}{1})^{-1}=f(a)(f(s))^{-1}$$

(۷) اگر I ایدالی از حلقه R باشد، آن‌گاه $S^{-1}I=\{\frac{a}{s}:a\in I,s\in S\}$ است.

نکته ۱۱.۱.۱ اگر حلقه‌ی R یک دامنه‌ی صحیح باشد، $S = R\backslash\{0\}$ زیر مجموعه‌ای بسته ضربی از R است و حلقه‌ی کسرهای R نسبت به S دقیقاً همان میدان کسرهای R است و آن را با $qf(R)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۲.۱.۱ حلقه‌ی R را که دقیقاً یک ایدال ماکسیمال دارد حلقه‌ی شبه‌موضعی می‌نامیم. هرگاه R، نوتری نیز باشد، آن را موضعی می‌نامیم.
حلقه‌ای که فقط تعداد متناهی ایدال ماکسیمال دارد را نیم‌شبه‌موضعی می‌نامیم.

هرگاه R یک حلقه باشد $Spec(R)$ نشان‌دهنده‌ی مجموعه‌ی تمام ایدال‌های اول R است. فرض می‌کنیم $S := R\backslash P$ باشد، حلقه‌ی کسرهای $S^{-1}R$ را با R_P نمایش می‌دهیم. این حلقه یک حلقه‌ی شبه‌موضعی با ایدال ماکسیمال

$$M = \{\lambda \in R_P : \lambda = \frac{a}{s}, a \in P, s \in S\}$$

است که معمولاً آن را با P_P نشان می‌دهیم. این حلقه را حلقه‌ی حاصل از موضعی‌سازی R درایدال اول P می‌نامیم.

تعریف ۱۳.۱.۱ زیرمجموعه‌ی بسته ضربی S از حلقه‌ی R را اشباع‌شده می‌نامیم هرگاه $xy \in S$ آن‌گاه $x \in S, y \in S$.

تعریف ۱۴.۱.۱ هرگاه R دامنه‌ای صحیح و K میدان کسرهای آن باشد و I ایدال R باشد در این‌صورت قرار می‌دهیم $I^{-1} = \{x \in K | xI \subseteq R\}$.
I را وارون‌پذیر می گوییم، هرگاه $II^{-1} = R$.

قضیه ۱۵.۱.۱ هر ایدال وارون‌پذیر، متناهیاً تولیدشده است.

اثبات. قضیه ۵۸ از مرجع [۱۴] را ببینید. □

تعریف ۱۶.۱.۱ دامنه‌ای صحیح که هر ایدال متناهیاً تولیدشده‌ی آن وارون‌پذیر باشد را دامنه‌ی پروفر می‌نامیم.

تعریف ۱۷.۱.۱ هرگاه R دامنه‌ی صحیح و K میدان کسرهای آن باشد، R را یک دامنه‌ی ارزه می‌نامیم هرگاه برای هر $u \neq 0 \in K$، $u \in R$ یا $u^{-1} \in R$ باشد.

تعریف ۱۸.۱.۱ دامنه‌ی ایدال اصلی (PID) R را که یک دامنه‌ی ارزه است و فقط یک ایدال اول غیرصفر دارد را دامنه‌ی ارزه‌ی گسسته می‌نامیم و با DVR نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۹.۱.۱ هرگاه R و T دو حلقه و $f : R \longrightarrow T$ هم‌ریختی حلقه‌ای باشد در این‌صورت هر $T-$مدول، مثل A را می‌توان به یک $R-$مدول تبدیل کرد بدین ترتیب که ضرب $R-$مدولی را برای هر $x \in A$ و $r \in R$ به‌صورت $rx = f(r)x$ تعریف کنیم.

تعریف ۲۰.۱.۱ هرگاه R و T دو حلقه باشند، حلقه‌ی T را یک $R-$جبر می‌نامیم هرگاه هم‌ریختی حلقه‌ای هم‌چون $f : R \longrightarrow T$ وجود داشته باشد که در این‌صورت T نیز ساختار $R-$مدولی خواهد داشت.
T را یک $R-$جبر از نوع متناهی می‌نامیم هرگاه مجموعه‌ای متناهی از اعضای T باشد به‌طوری‌که هر عضو T را بتوان بر حسب آن اعضا با ضرایبی از $f(R)$ نوشت.

تعریف ۲۱.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه و M و N دو $R-$مدول باشند. $\mathbb{Z}^{(M\times N)}$ را مجموعه‌ی تمام حاصل‌جمع‌های صوری زیر قرار می‌دهیم:

$\mathbb{Z}^{(M\times N)} = \{\sum_{i=1}^{t} n_i(x_i, y_i) : t \geq 1, n_i \in \mathbb{Z}, (x_i, y_i) \in M \times N\}$

برای دو عضو دلخواه مثل $\sum_{i=1}^{t} n_i(x_i, y_i), \sum_{i=1}^{t} n'_i(x_i, y_i) \in \mathbb{Z}^{(M\times N)}$ عمل جمع را به صورت زیر قرار می‌دهیم،

$\sum_{i=1}^{t} n_i(x_i, y_i) + \sum_{i=1}^{t} n'_i(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{t}(n_i + n'_i)(x_i, y_i)$. به‌راحتی دیده می‌شود که با این عمل $\mathbb{Z}^{(M\times N)}$ تشکیل یک گروه آبلی ($\mathbb{Z}-$مدول) می‌دهد. حاصل‌ضرب تانسوری دو مدول را به کمک این گروه آبلی تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲۲.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه و M و N دو $R-$مدول باشند و F را گروه آبلی آزاد $\mathbb{Z}^{(M\times N)}$ در نظر می‌گیریم و فرض کنیم K زیرگروهی از F باشد که توسط اعضای $(x + x', y) - (x, y) - (x', y)$ و $(x, y + y') - (x, y) - (x, y')$ و $(xr, y) - (x, ry)$ ، تولید می‌شود که در آن $r \in R$ و $y, y' \in N$ و $x, x' \in M$. در این‌صورت، گروه آبلی ($\mathbb{Z}-$مدول) F/K را حاصل‌ضرب تانسوری M و N می‌نامیم و آن را با $M \otimes_R N$ نشان می‌دهیم و عضو $(x, y) + K$ از $M \otimes N = F/K$ را با $x \otimes y$ نشان می‌دهیم. به راحتی می‌توان ثابت کرد که برای هر $x', x \in M, y, y' \in N, r \in R, n \in \mathbb{Z}$ داریم:

(۱) $x \otimes (y + y') = x \otimes y + x \otimes y'$ و $(x + x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y$

(۲) $xr \otimes y = x \otimes ry$

(۳) $n(x \otimes y) = nx \otimes y = x \otimes ny$.

گزاره ۲۳.۱.۱ هرگاه R حلقه و A و B دو $R-$مدول باشند در این‌صورت :

$A \otimes_R R \cong A$ و $R \otimes_R B \cong B$

اثبات. قضیه ۷.۵.۴ از مرجع [۱۳] را ببینید. □

قضیه **۲۴.۱.۱** هرگاه R و S دو حلقه و A یک R−مدول و B یک R,S−دو مدول و C یک S−مدول باشند آن‌گاه

$(A\otimes B)\otimes_S C\cong A\otimes_R(B\otimes_S C)$

اثبات. قضیه ۸.۵.۴ ازمرجع [۱۳] را ببینید. □

تعریف **۲۵.۱.۱** M را یک R−مدول تخت می‌نامیم، چنان‌چه دقیق‌بودن دنباله‌ها را حفظ کند. یعنی هرگاه $Q \longrightarrow P \longrightarrow 0$ دنباله‌ای دقیق از R−مدول‌ها باشد آن‌گاه $Q\otimes_R M \longrightarrow P\otimes_R M \longrightarrow 0$ نیز دنباله‌ای دقیق از R−مدول‌ها باشد.

تعریف **۲۶.۱.۱** M را یک R−مدول تخت وفادار می‌نامیم، هرگاه $Q \longrightarrow P \longrightarrow 0$ دنباله‌ای دقیق از R−مدول‌ها است اگر وتنها اگر $Q\otimes_R M \longrightarrow P\otimes_R M \longrightarrow 0$ دنباله‌ای دقیق از R−مدول‌ها باشد.

تعریف **۲۷.۱.۱** هرگاه $P\in Spec(R)$ باشد ارتفاع P را سوپریمم طول زنجیرهایی به‌صورت $P_0\subseteq P_1\subseteq\ldots\subseteq P_n$ تعریف می‌کنیم که P_n ایدال ماکسیمال R است و هرگاه این سوپریمم موجود نباشد آن را نامتناهی قرارداد می‌کنیم و با $height_R P$ نمایش می‌دهیم.

تعریف **۲۸.۱.۱** بعد کرول R را سوپریمم ارتفاع‌های ایدال‌های اول R تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲۹.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه و M یک $R-$مدول است و $m \in M$.
مجموعه‌ی $\tau_m = \{r \in R | rm = 0\}$ ایدالی از R است. اگر $\tau_m \neq 0$ باشد، m را یک عضو تابی M می‌نامیم.
هرگاه R دامنه‌ی صحیح باشد آن‌گاه مجموعه‌ی همه‌ی اعضای تابی M تشکیل یک زیرمدول می‌دهند که آن را زیرمدول تابی M می‌نامیم و با $T(M)$ نمایش می‌دهیم.
چنان‌چه $T(M) = 0$ باشد ، M را فارغ از تاب می‌نامیم.

تعریف ۳۰.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه است. اشتراک همه‌ی ایدال‌های ماکسیمال R را رادیکال جیکوبسون R ، می‌نامیم و با $J(R)$ نمایش می‌دهیم. حلقه‌ی R را که در آن $J(R) = 0$ است را حلقه‌ی نیم‌ساده می‌نامیم.

گزاره ۳۱.۱.۱ هرگاه R، حلقه‌ای آرتینی باشد، $J(R)$ یک ایدال پوچ‌توان است.

اثبات. قضیه ۷.۱.۹ از مرجع [۱۳] را ببینید. □

تعریف ۳۲.۱.۱ حلقه‌ی R، را ساده می‌نامیم، چنان‌چه هیچ ایدال سره‌ای نداشته باشد.
یک ایدال را ساده می‌نامیم، چنان‌چه به عنوان حلقه ساده باشد.

قضیه ۳۳.۱.۱ شرایط زیر روی حلقه‌ی دلخواه R، معادلند.
(۱) R، حلقه‌ی آرتینی نیم‌ساده است.
(۲) R به شکل حاصل‌ضرب تعداد متناهی ایدال ساده است که هر کدام، یک‌ریخت با

حلقه‌ی خودریختی‌های یک فضای برداری متناهی‌بعد روی حلقه‌ی تقسیم‌اند.
این قضیه به‌قضیه آرتین—ودربرن[۲]، شهرت دارد.

اثبات. قضیه ۳.۳.۹ از مرجع [۱۳] را ببینید. □

۲.۱ توسیع‌های صحیح و جبری

تعریف ۱.۲.۱ میدان F را توسیع میدان K گوییم، هرگاه K زیرمیدان F باشد، در این‌صورت می‌نویسیم $K \subseteq F$ و آن را یک توسیع از میدان‌ها می‌نامیم. در این‌صورت F یک فضای برداری روی K است و بعد آن را با $[F : K]$ نمایش می‌دهیم.
F را یک توسیع متناهی یا نامتناهی گوییم، هرگاه $[F : K]$ متناهی یا نامتناهی باشد.

قضیه ۲.۲.۱ هرگاه $K \subseteq E \subseteq F$ توسیع‌هایی از میدان‌ها باشند، آن‌گاه $[F : K] = [F : E][E : K]$.

اثبات. قضیه ۲.۱.۵ از مرجع [۱۳] را ببینید. □

تعریف ۳.۲.۱ هرگاه F توسیع میدانی K باشد، $u \in F$ را روی K جبری می‌نامیم، هرگاه در چندجمله‌ای غیرصفری هم‌چون $f \in K[x]$ صدق کند.
u را متعالی گوییم، هرگاه ریشه‌ی هیچ چندجمله‌ای غیرصفری نباشد.

[۲] Artin-Wedderburn

تعریف ۴.۲.۱ F را توسیع جبری K می‌نامیم، هرگاه هر عضو آن روی K جبری باشد و توسیع را متعالی می‌نامیم، هرگاه حداقل یک عضو آن روی K متعالی باشد.

تعریف ۵.۲.۱ هرگاه R زیرحلقه‌ای یکدار از حلقه‌ی S باشد در این‌صورت S را توسیع R می‌نامیم و می‌نویسیم $R \subseteq S$. هرگاه S به عنوان $R-$مدول متناهیاً تولیدشده باشد، آن را یک توسیع متناهی گوییم.

تعریف ۶.۲.۱ هرگاه $R \subseteq S$ توسیعی از حلقه‌ها باشد، $s \in S$ را روی R صحیح می‌نامیم، هرگاه چندجمله‌ای تکین $f(x) \in R[x]$ باشد که s ریشه‌ای از آن باشد. توسیع $R \subseteq S$ را صحیح می‌نامیم، هرگاه هر عضو S روی R صحیح باشد.
هرگاه در تعریف بالا تکین‌بودن $f(x)$ را حذف کنیم $s \in S$ را روی R جبری می‌نامیم و چنان‌چه همه‌ی اعضای S روی R جبری باشند توسیع را جبری می‌نامیم.

قضیه ۷.۲.۱ هرگاه $R \subseteq T$ توسیعی از حلقه‌ها باشد و $u, v \in T$ نیز روی R صحیح باشند، در این‌صورت $u + v$ و uv نیز روی R صحیح‌اند.

اثبات. قضیه ۱۳ از مرجع [۱۴] را ببینید. □

هرگاه $R \subseteq T$ توسیعی از حلقه‌ها باشد مجموعه‌ی اعضایی از T که روی R صحیح‌اند، زیرحلقه‌ای از T است که شامل R است و آن را با R' نمایش می‌دهیم. به بیان دیگر $R \subseteq R' \subseteq T$. R' را بستار صحیح R در T می‌نامیم. اگر $R' = R$ باشد گوییم R در T، بسته‌ی صحیح است.

قضیه ۸.۲.۱ هرگاه R یک حلقه و T یک $R-$جبر باشد در این‌صورت شرایط زیر هم‌ارزند:

(۱) T یک R—مدول متناهیاً تولید شده است.

(۲) T، حلقه‌ای متناهیاً تولید شده روی R است و T روی R صحیح است.

اثبات. قضیه ۱۷ ازمرجع [۱۴] را ببینید. □

قضیه ۹.۲.۱ هرگاه R دامنه‌ای صحیح و K میدان خارج‌قسمت‌های آن باشد و $u \neq 0 \in R$ آن‌گاه شرایط زیر معادلند:

(۱) هر ایدال اول غیر صفرR ، u را دربردارد.

(۲) هر ایدال R، توانی از u را دربردارد.

(۳) $K = R[u^{-1}]$.

اثبات. قضیه ۱۹ از مرجع [۱۴] را ببینید. □

قضیه ۱۰.۲.۱ فرض کنیم $R \subseteq T$ توسیع صحیحی از حلقه‌ها است و S زیرمجموعه‌ی بسته ضربی از R است آن‌گاه $S^{-1}R \subseteq S^{-1}T$ نیز توسیعی صحیح از حلقه‌هاست.

اثبات. صفحه‌ی ۳۳ از مرجع [۱۴] را ببینید. □

قضیه ۱۱.۲.۱ فرض کنیم R دامنه‌ای صحیح و S زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی آن باشد . چنان‌چه R بسته‌ی صحیح باشد، در این‌صورت $S^{-1}R$ نیز بسته‌ی صحیح است.

اثبات. قضیه‌ی ۸.۵.۸ از مرجع [۱۳] را ببینید. □

تعریف ۱۲.۲.۱ اینک به بیان مهم‌ترین ویژگی‌هایی می‌پردازیم که در توسیعی هم‌چون $R \subseteq T$ از حلقه‌ها ممکن است اتفاق بیفتد.

وقوع: برای هر $P \in Spec(R)$ ، $Q \in Spec(T)$ هست که $Q \bigcap R = P$.

صعود: هرگاه $P \subseteq P_0$ دو ایدال اول R باشند و Q ایدالی از T باشد به‌طوری‌که

$Q\bigcap R = P$، در این‌صورت ایدالی چون $Q_\circ \in T$ هست که $Q \subseteq Q_\circ$ و $Q_\circ \bigcap R = P_\circ$.
نزول: هرگاه $P_\circ \subseteq P$ دو ایدال اول R باشند و Q ایدالی از T باشد به‌طوری‌که $Q\bigcap R = P$، در این‌صورت ایدالی چون $Q_\circ \in T$ هست که $Q_\circ \subseteq Q$ و $Q_\circ \bigcap R = P_\circ$.
مقایسه‌ناپذیری: هرگاه $Q, Q' \in Spec(T)$ دو ایدال متفاوت باشند که $Q\bigcap R = Q'\bigcap R$ در این‌صورت $Q = Q'$.

قضیه ۱۳.۲.۱ هرگاه $R \subseteq T$ توسیع صحیح باشد در این‌صورت توسیع دارای خواص وقوع، صعود، نزول و مقایسه‌ناپذیری است.

اثبات. قضیه ۴۴ از مرجع [۱۴] را ببینید. □

قضیه ۱۴.۲.۱ هرگاه $R \subseteq T$ توسیع صحیحی از حلقه‌ها باشد و $Q \in Spec(S)$ باشد که $Q\bigcap R = P$. در این‌صورت Q در S ماکسیمال است اگر و تنها اگر P در R ماکسیمال باشد.

اثبات. نتیجه ۱۲.۵.۸ از مرجع [۱۳] را ببینید. □

تعریف ۱۵.۲.۱ هرگاه F میدان و $f \in F[x]$ چندجمله‌ای از درجه‌ی مثبت باشد، گوییم f روی $F[x]$ شکافته می‌شود هرگاه به صورت حاصل‌ضربی از عوامل خطی در $F[x]$ نوشته شود، یعنی $u_i \in F$ که، $\circ \leq i \leq n$ و $n = deg(f)$ است، وجود داشته‌باشند که $f = u_\circ(x-u_1)\cdots(x-u_n)$.

تعریف ۱۶.۲.۱ هرگاه K یک میدان و $f \in K[x]$ چندجمله‌ای غیرثابتی باشد، توسیع میدانی F از K را یک میدان شکافتنی از f روی K می‌نامیم، هرگاه f در $F[x]$ شکافته شود و $F = K(u_1, \cdots, u_n)$ که u_iها تمامی ریشه‌های f در $F[x]$ می‌باشند.

مثال ۱۷.۲.۱ ریشه‌های چندجمله‌ای $x^2 - 2$ روی Q، $\sqrt{2}, \sqrt{-2}$ هستند و $(x - \sqrt{2})(x - \sqrt{-2}) = x^2 - 2$. پس $Q(\sqrt{2})$ میدان شکافتنی از $x^2 - 2$ روی Q است.

قضیه ۱۸.۲.۱ شرایط زیر روی میدان F معادلند:

(۱) هر چندجمله‌ای غیرثابت $f \in F[x]$ دارای ریشه‌ای در F است.

(۲) هر چندجمله‌ای غیرثابت $f \in F[x]$ روی F شکافته می‌شود.

(۳) هر چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر $f \in F[x]$، از درجه‌ی یک است.

(۴) هیچ توسیع میدانی جبری از F به غیر از F، وجود ندارد.

(۵) زیر میدانی از F چون K هست که F روی K جبری است و هرچندجمله‌ای در $K[x]$ در $F[x]$ شکافته می‌شود.

اثبات. قضیه ۳.۳.۵ از مرجع [۱۳] را ببینید. □

تعریف ۱۹.۲.۱ میدانی که در شرایط معادل قضیه‌ی ۲۰.۲.۱، صدق کند، را میدان جبری بسته گوییم.

تعریف ۲۰.۲.۱ فرض کنیم K یک میدان و $f \in K[x]$ چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر باشد، f را تفکیک‌پذیر گوییم هرگاه در میدان شکافتنی f روی K، هر ریشه‌ی f، ریشه‌ای ساده باشد (توجه کنید که ریشه‌ی α از f را ساده می‌نامیم هرگاه α با تکرر یک باشد).