بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی
(گرایش محض)

عنوان :

مباحثی بر گروههای کوانتومی

از:

سمیرا سعدی کیا

استاد راهنما:

دکتر مرضیه شمس‌یوسفی

اسفند ۱۳۹۳

اگر این اثر را منزلی باشد

آن را به پدر و مادرم تقدیم می کنم

آنان که اسوه ایثار و گذشت، مهربانی و محبت اند.

و

تقدیم به خواهر خوبم.

تقدیر و تشکر

نخستین سپاس و ستایش از آن خداوندی است که بنده کوچکش را در دریای بیکران اندیشه، قطره‌ای ساخت تا وسعت آن را از دریچه‌ی اندیشه‌های ناب آموزگارانی بزرگ به تماشا نشیند. لذا اکنون که در سایه‌سار بنده‌نوازی‌هایش پایان‌نامه‌ی حاضر به انجام رسیده است، بر خود لازم می‌دانم تا مراتب سپاس را از بزرگوارانی به جا آورم که اگر دست یاریگرشان نبود، این پایان نامه به انجام نمی‌رسید.

ابتدا از استاد گرانقدرم سرکار خانم دکتر مرضیه شمس‌یوسفی که در کمال سعه‌ی صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند؛

و از استادان فرزانه ؛ آقایان دکتر اسماعیل انصاری و دکتر عباس سهله که زحمت داوری این رساله را متقبل شدند؛

کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از استاد عالی قدرم جناب آقای دکتر رضا اولیایی که گلشن سرای علم و دانش را با راهنمایی‌های کارساز و سازنده بارور ساختند تقدیر و تشکر می‌نمایم.

و همچنین از تمامی دوستانم که حضورشان نشانه‌ی لطف الهی در زندگیم است و

سپاس آخر را به مهربانترین همراهان زندگیم، به پدر، مادر و خواهر عزیزم تقدیم می‌کنم که گرمای امیدبخش وجودشان همواره بهترین پشتیبانم بوده است.

فهرست مطالب

چکیده:

مباحثی بر گروه‌های کوانتومی
سمیرا سعدی کیا

حدود سال‌های ۱۹۳۰ پونتریاگین قضیه‌ی معروف خود را در مورد دوگانی گروه‌های توپولوژیکی ثابت کرد. در واقع نشان داد که تبدیل فوریه $L^1(G)$ به توی $L^\infty(\hat{G})$ و تبدیل فوریه‌ی معکوس $L^1(\hat{G})$ را به توی $L^\infty(G)$ تصویر می‌کند. قضایای دوگانی، به عنوان یکی از قضایای اساسی آنالیز هارمونیک آبلی شناخته می‌شوند که در حالت گروه غیرآبلی جایگزینی ندارند. تلاش‌های وافری برای حل مساله‌ی دوگانی گروه‌های غیرآبلی صورت گرفته که منجر به تولید رسته‌ی گروه‌های کوانتومی شده است.

در این پایان‌نامه به طور اجمالی به بررسی گروه‌های کوانتومی از دیدگاه C^*-جبری می‌پردازیم.

کلید واژه:

C^*-جبرها، گروه کوانتومی فشرده، گروه کوانتومی موضعاًفشرده، حالت هار، وزن KMS.

Abstract:

Topics on Quantum Groups Samira Sadikia

In 1930 L. S. Pontrjagin established his famous duality theorem for abelian locally compact groups: he showed that the fourier transform carries the convolution algebra $L^1(G)$ in to the multiplicative algebra $L^\infty(\hat{G})$; Conversely the fourier inverse transform carries the convolution algebra $L^1(\hat{G})$ into the multiplicative algebra $L^\infty(G)$. Duality theorems one considered as one of the fundumental theorems in Abelian harmonic Analysis. A series of effort has been stablished to solve the duality problem in non-abelian case which leads to the category of quantum groups.

In this thesis we briefly study quantum groups in C^*-algebraic approach.

Key words:
C^*-Algebra, Compact Quantum Group, Locally Compact Quantum Group, Haar state, KMS weight.

پیشگفتار:

گروههای کوانتومی تعمیم گروههای توپولوژیک هستند که به طور طبیعی از تعمیم مکانیک کلاسیک به مکانیک کوانتومی الهام گرفته شده است. ایده اصلی روی گروه توپولوژیک G جایگزین کردن جبر (جابه‌جایی $C_\circ(G)$) با یک C^*-جبر (نه لزوما جابه‌جایی) است که دارای یک هم‌ضرب شرکت‌پذیر باشد. مطالب این پایان‌نامه بر اساس تعریفی از گروه کوانتومی موضعاًفشرده با دیدگاه C^*-جبری که در سال ۱۹۹۹ توسط واعظ[۱] و کاسترمان[۲] به‌دست آمده است، گردآوری شده است. امروزه می‌توانیم به نظریه گروههای کوانتومی از دو دیدگاه اساساً متفاوت نزدیک شویم. اولین روش برای رسیدن به گروه کوانتومی، به‌طور ذاتی جبری است. دومین نگرش، دیدگاه آنالیزی است. انگیزه اساسی در توسعه اخیر این تئوری تعمیم تئوری دوگانی پونتریاگین برای گروههای موضعاًفشرده آبلی بوده است. از آنجا که فضای دوگان گروه غیرآبلی حتی نمی‌تواند گروه باشد ریاضیدانان (عموما ریاضی-فیزیک‌دانان) در جستجوی رسته بزرگتری که خوددوگان باشد، بودند. این اشیاء تعمیم‌یافته، گروه کوانتومی نامیده شدند.

واعظ و کاسترمان در مقاله‌ای به بررسی دومین شیوه یعنی رویکرد آنالیزی پرداختند. یکی از دلایلی که نشان می‌دهد این تئوری کاملا با نگرش جبری تفاوت دارد این است که نقش اصلی توسط تعمیم‌های خاصی از اندازه هار در یک گروه موضعاًفشرده ایفا خواهد شد. بسیاری از هاف‌جبرهایی که گروه کوانتومی نامیده می‌شود این تعمیم خاص از اندازه هار را نمی‌پذیرند.

نگاه C^*-جبری به مفهوم گروههای کوانتومی به سال ۱۹۷۰ برمی‌گردد. بعد از اولین تلاش تاکازاکی[۳]، تاناکا[۴]، کراین[۵] و برخی ریاضیدانان برجسته دیگر، مسئله پیدا کردن یک رسته خوددوگان که شامل گروههای موضعاًفشرده باشد به طور کاملا مستقل توسط کاتس[۶] و واینرمن[۷] و به‌وسیله اناک[۸] و شوارتس[۹] حل شد. اشیائی را که آنها تعریف کردند جبر کاتس نامیدند. چالشی برای تعریف رسته بزرگتر که شامل هر دو رسته جبرهای کاتس و گروههای کوانتومی‌فشرده که توسط ورونویچ[۱۰] ارائه شده بود به وجود آمد. لذا جستجو برای ارائه‌ی یک تعریف برای گروه کوانتومی موضعاًفشرده آغاز شد. اولین تلاش‌ها به وسیله مازودا[۱۱] و ناکاگامی[۱۲] صورت گرفت یک تعریف از گروههای کوانتومی‌موضعاًفشرده در قالب جبرهای فون‌نویمان فرمول‌بندی شد و آن را جبر ورونویچ نامیدند. یک صورت C^*-جبری این تعریف در کنفرانسی توسط مازودا، ناکاگامی و ورونویچ ارائه

[۱] S. Vaes [۲] J. Kustermans [۳] Takesaki [۴] Tannaka، [۵] Krein، [۶] Kac [۷] Vainerman [۸] Enock [۹] Schwartz
[۱۰] Woronowicz [۱۱] Masuda [۱۲] Nakagami

شد اما هرگز منتشر نشد. مانع اصلی شیوه آنها پیچیدگی اصول اولیه بود. در حقیقت بسیاری از مشخصه‌های زیبای گروههای کوانتومی موضعاًفشرده که هر کسی علاقه‌مند به اثبات آنها از اصول مقدماتی است در آن تعریف پیش‌فرض بودند. اما با این وجود تئوری آنها قادر به دادن دوگان داخل کاتگوری مربوطه است. تئوری آنها شامل گروههای کوانتومی‌فشرده و جبرهای کاتس است و همچنین گروه های کوانتومی‌موضعاًفشرده را هم در بر می گیرد. واعظ و کاسترمان در سال ۱۹۹۹ تعریفی برای گروههای کوانتومی موضعاًفشرده ارائه دادند. مسئله باقی‌مانده اصلی تعریف واعظ و کاسترمان -درست مشابه تعریف مازودا، ناکاگامی و ورونویچ یا تعریف جبرهای کاتس- این است که هنوز هم وجود اندازه هار یک فرض تلقی می‌شود. واضح است که ارائه یک تعریف از گروههای کوانتومی موضعاًفشرده بدون این فرض و با اثبات وجود اندازه هار به عنوان قضیه زیباتر است.

پایان نامه‌ای که پیش رو دارید در سه فصل تنظیم شده است. عمده‌ی مطالب آن، با استفاده از مرجع [۱۷] و [۱۸] و [۳۰] نگارش شده است که در آن سعی کرده ایم به طور اجمالی با دیدگاه C^*-جبری نگاهی به گروههای کوانتومی داشته باشیم. فصل اول شامل مقدماتی است که برای درک دو فصل بعدی نیاز می‌باشد. در فصل دوم، ابتدا یک گروه کوانتومی را از دیدگاه ساختار جبری بررسی کرده و ساختار یک گروه مانند وجود ضرب، شرکت‌پذیری ضرب، وجود وارون و یکه و همچنین قضیه‌ی فوبینی را در سطح گروههای کوانتومی ترجمه می کنیم. سپس در فصل سوم با ذکر برخی از مقدمات، صورت کوانتومی قضیه معروف آنالیز هارمونیک یعنی قضیه دوگانی پونتریاگین را برای یک گروه کوانتومی موضعاًفشرده ارائه خواهیم داد.

لازم به ذکر است که در این پایان نامه همه تعریف‌ها، لم‌ها، قضایا، ملاحظه‌ها و نتایج، شماره متوالی دارند. بعنوان مثال، در بخش ۳ از فصل اول، چهارمین عنوان دارای شماره ۱-۳-۴ می‌باشد.

فصل ۱

پیش‌نیازها

۱ - ۱ مقدماتی از فضاهای باناخ

در سرتاسر این پایان‌نامه فرض بر ناصفر بودن فضای برداری مورد نظر که روی $\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R}$ تعریف شده است، می‌باشد. ابتدا اشاره‌ای کوتاه به مفاهیم و نمادهای مورد نیاز می‌کنیم. برای مطالعه‌ی بیشتر، خواننده می‌تواند به [۲۶] رجوع کند.

تعریف ۱ - ۱ - ۱. فضای نرمدار X را یک فضای باناخ می‌نامیم هرگاه با متر القاء شده از نرمش کامل باشد.

تعریف و نمادگذاری ۱ - ۱ - ۲. مجموعه‌ی تمام نگاشت‌های خطی کراندار (پیوسته) از فضای نرم‌دار X به فضای نرم‌دار Y را با $\mathcal{B}(X,Y)$ نمایش می‌دهیم. می‌دانیم برای فضای باناخ X، فضای $\mathcal{B}(X,X)=\mathcal{B}(X)$ با نرم عملگری، یک فضای باناخ است. برای فضای نرم‌دار X، $\mathcal{B}(X,\mathbb{C})$ را با X^* نمایش داده و دوگان X می‌نامیم. هر عضو X^* یک تابعک خطی کراندار روی X نامیده می‌شود. X^* نیز با نرم عملگری، یک فضای باناخ است. بعلاوه X^* نقاط X را جدا می‌کند.

نمادگذاری ۱ - ۱ - ۳. برای هر زیرمجموعه‌ی X از یک فضای باناخ E، فضای خطی تولید شده توسط X را با $\langle X\rangle$ و فضای خطی بسته‌ی تولید شده توسط X را با $[X]$ نمایش می‌دهیم.

۱ - ۲ جبرهای باناخ

در این بخش برخی از مفاهیم و مقدمات مورد نیاز در مورد جبرهای باناخ بیان خواهد شد. برای مطالعه‌ی بیشتر، مراجع [۲۶] و [۴] می‌تواند مفید باشد.

تعریف ۱ - ۲ - ۱. زیرمجموعه‌ی J از جبر A را ایده‌آل چپ نامیم هرگاه

۱. J زیرفضایی از A (به مفهوم فضای برداری) بوده، و

۲. اگر $x\in A$ و $y\in J$، آنگاه $xy\in J$.

اگر $J\neq A$، J یک ایده‌آل حقیقی است. ایده‌آل‌های ماکزیمال، ایده‌آل‌هایی حقیقی هستند که مشمول در هیچ ایده‌آل حقیقی بزرگتر نیستند.

تعریف ۱ - ۲ - ۲. یک همریختی (مختلط) یا تابعک خطی ضربی روی جبر A، تابعک خطی ناصفری مانند φ است به طوریکه برای هر $a,b\in A$، $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$. مجموعه‌ی همه‌ی همریختی‌های مختلط روی A را با $\mathfrak{M}(A)=\mathfrak{M}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱-۲-۳. جبر A را یک جبر باناخ می‌نامیم هرگاه همراه با نرمی مانند $\|.\|$ یک فضای باناخ بوده و بعلاوه برای هر $x,y \in A$، $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$.

به عنوان مثال هرگاه Ω یک فضای موضعاًفشرده‌ی هاسدورف باشد، $C_{\circ}(\Omega)$ همراه با عمل جمع و ضرب نقطه‌ای و نرم سوپریمم، یک جبر باناخ است. همچنین $\mathcal{B}(X)$ که در آن X یک فضای باناخ است، با عمل جمع و ضرب اسکالر معمولی و عمل ترکیب به عنوان ضرب، همراه با نرم عملگری یک جبر باناخ است.

قضیه ۱-۲-۴. [قضیه ۳-۱۶؛[۴]] فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد و $\varphi \in \mathfrak{M}$، آنگاه φ پیوسته است و $\|\varphi\| \leq 1$. بعلاوه اگر A یکه داشته باشد $\|\varphi\| = 1$.

بنابراین برای جبر باناخ A، $\mathfrak{M}(A) \subseteq A^*$.

تذکر ۱-۲-۵. اگر J یک ایده‌آل بسته‌ی جبر باناخ A باشد در این صورت $\frac{A}{J}$ با نرم خارج قسمتی و ضربی که به طور طبیعی تعریف می‌شود، یک جبر باناخ است.

قضیه ۱-۲-۶. فرض کنید A یک جبر باناخ تعویض‌پذیر بوده و $\mathfrak{M}$ مجموعه‌ی تمام همریختی‌های مختلط روی A باشد. آنگاه احکام زیر برقرارند:

۱. هر ایده‌آل ماکزیمال A هسته‌ی یک همریختی مختلط است.

۲. اگر $h \in \mathfrak{M}$، آنگاه هسته‌ی h یک ایده‌آل ماکزیمال A است.

۱-۲-۱ تبدیلات گلفاند

تعریف ۱-۲-۷. فرض کنید $\mathfrak{M}$ مجموعه‌ی تمام همریختی‌های مختلط جبر باناخ تعویض‌پذیر A باشد. رابطه‌ی

$$\hat{x}(h) = h(x) \qquad (h \in \mathfrak{M})$$

به هر $x \in A$ تابعی مانند $\hat{x} : \mathfrak{M} \to \mathbb{C}$ منتسب می‌سازد، $\hat{x}$ را تبدیل گلفاند x می‌نامیم.

فرض کنیم $\hat{A}$ مجموعه‌ی تمام $\hat{x}$ها به ازای $x \in A$ باشد. توپولوژی گلفاند $\mathfrak{M}$، توپولوژی ضعیف القاشده به وسیله‌ی $\hat{A}$ است یعنی ضعیف‌ترین توپولوژیی که هر $\hat{x}$ را پیوسته می‌سازد. در این صورت به وضوح $\hat{A} \subset C(\mathfrak{M})$ یعنی جزء جبر تمام توابع پیوسته‌ی مختلط بر $\mathfrak{M}$. بنا بر قضیه‌ی قبل، چون یک تناظر یک‌به‌یک بین ایده‌آل‌های ماکزیمال A و اعضای $\mathfrak{M}$ وجود دارد، $\mathfrak{M}$ همراه با توپولوژی گلفاند را فضای ایده‌آل ماکزیمال A می‌نامند. اصطلاح "تبدیل گلفاند" در مورد نگاشت $x \to \hat{x}$ از A به روی $\hat{A}$ نیز اطلاق می‌شود.

قضیه ۱-۲-۸. [قضیه ۵-۱۷؛[۴]] فرض کنید A یک جبر باناخ تعویض‌پذیر با $\mathfrak{M}(A) \neq \phi$ باشد، در این صورت:

۱. $\mathfrak{M}(A)$ یک فضای هاسدورف موضعاًفشرده است. بعلاوه اگر A یکدار نیز باشد $\mathfrak{M}(A)$ فشرده خواهد بود.

۲. نگاشت $a \to \hat{a}$ یک همریختی از A به توی $C_\circ(\mathfrak{M})$ است.

تعریف ۱-۲-۹. فرض کنیم A یک جبر نرمدار باشد. شبکه‌ی $\{e_\alpha\}$ را یک واحد تقریبی چپ برای A می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x \in A$، $\|e_\alpha x - x\| \to \circ$. واحد تقریبی راست به طور مشابه تعریف می‌شود. شبکه‌ی $\{e_\alpha\}$ کراندار است اگر ثابت مثبت k چنان موجود باشد که برای هر α، $\|e_\alpha\| \leq k$. منظور از یک واحد تقریبی کراندار یک واحد تقریبی است که کراندار نیز باشد.

۱-۳ C^*-جبرها

برای مطالعه بیشتر به [۱۰] و [۹] و [۲۵] رجوع شود.

تعریف ۱-۳-۱. اگر $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد نگاشت $a \to a^*$ از $\mathcal{A}$ به توی خودش را یک برگشت می گوییم اگر برای هر $a, b \in \mathcal{A}$ در شرایط زیر صدق کند:

۱. $(a^*)^* = a$

۲. $(ab)^* = b^*a^*$

۳. $(\alpha a + b)^* = \overline{\alpha} a^* + b^*$

اگر $\mathcal{A}$ یکدار باشد آنگاه $a = (a^*1)^* = (1^*a)^{**} = 1^*a$. بدین ترتیب از یکتایی همانی نتیجه می‌شود $1^* = 1$. همچنین برای هر مضرب همانی نتیجه می‌شود $\alpha^* = \overline{\alpha}$. هر جبری را که عضو همانی داشته باشد یکدار می گوئیم.

تعریف ۱-۳-۲. هر جبر باناخ $\mathcal{A}$ با یک برگشت را یک C^*-جبر می گوییم هرگاه برای هر $a \in \mathcal{A}$ در شرط زیر صدق کند:

$$\|a^*a\| = \|a\|^۲$$

مثال ۱-۳-۳. [مثال ۳-۱؛[۱۰]]

۱. $B = B(H)$، جبر عملگرهای کراندار روی فضای هیلبرت H یک C^*-جبر است، برای هر عملگر A، A^* الحاقی A است.

۲. برای هر فضای هیلبرت H، $B_\circ = B_\circ(H)$، جبر عملگرهای فشرده روی فضای هیلبرت H،یک C^*-جبر است، وقتی H با بعد متناهی نباشد این C^*-جبر فاقد عضو همانی است.

۳. اگر X یک فضای فشرده باشد، $C(X)$، مجموعه تمام توابع پیوسته از X به توی $\mathbb{C}$ ،یک C^*-جبر است اگر برای هر تابع پیوسته f روی X،$f^*(x) = \overline{f(x)}$. در اینجا $C(X)$ یک C^*-جبر جابجایی با عنصر همانی است. در ادامه خواهیم دید که هر C^*-جبر جابجایی با عنصر همانی با C^*-جبری از این نوع یکریخت است.

۴. اگر X یک فضای موضعا فشرده باشد اما فشرده نباشد،آنگاه $C_\circ(X)$، جبر توابع پیوسته بر X که در بی‌نهایت به صفر میل می‌کنند، یک C^*-جبر فاقد عنصر همانی است. در ادامه خواهیم دید هر C^*-جبر جابجایی فاقد عنصر همانی با C^*-جبری از این نوع یکریخت است.

قضیه ۱-۳-۴. (گلفاند[۱]- نیمارک[۲]) فرض کنید $\mathcal{A}$ یک C^*جبر جابه‌جایی با فضای ایده‌آل ماکزیمال $\mathfrak{M}$ باشد. در این صورت تبدیل گلفاند یک یکریختی طولپا از $\mathcal{A}$ به روی $C(\mathfrak{M})$ است که خاصیت اضافی

$$h(x^*) = \overline{h(x)}, \qquad (x \in \mathcal{A}, h \in \mathfrak{M})$$

یا به طور معادل،

$$\hat{(x^*)} = \overline{\hat{x}} \quad (x \in \mathcal{A})$$

را دارد.

یادآوری می‌کنیم برای هر فضای باناخ X،منظور از $ballX$ گوی واحد بسته X است.

گزاره ۱-۳-۵. [گزاره ۴-۱؛[۱۰]] اگر $a \in \mathcal{A}$، آنگاه

۱. $\|a^*\| = \|a\|$

۲. $\|aa^*\| = \|a\|^2$

۳. $\|a\| = sup\{\|ax\| : x \in ball\mathcal{A}\} = sup\{\|xa\| : x \in ball\mathcal{A}\}$

زمانی که $\mathcal{A}$ یک C^*-جبر بدون یکه باشد به طریق یکتایی می‌توان به آن یکه اضافه کرد تا یک C^*-جبر یکدار حاصل شود، که در اینجا بیان نمی‌شود. اگر $\mathcal{A}$ و C دو C^*-جبر باشند، نگاشت $\rho : \mathcal{A} \to C$ را یک $*$-همریختی یا همریختی می گوییم اگر ρ یک همریختی جبری باشد بطوریکه برای هر $a \in \mathcal{A}$ داشته باشیم $\rho(a^*) = \rho(a)^*$. یک $*$-یکریختی یا یکریختی بین C^*-جبرها، یک $*$-همریختی دوسویی است.

[۱]Gelfand [۲]Naimark

تعریف ۱-۳-۶. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک C^*-جبر و $a \in \mathcal{A}$ باشد، در این صورت:

۱. اگر $a^* = a$، آنگاه a را هرمیتی یا خودالحاق می گوییم. مجموعه‌ی همه‌ی اعضای هرمیتی $\mathcal{A}$ را با $Re\ \mathcal{A}$ نمایش می‌دهیم.

۲. اگر $aa^* = a^*a$، آنگاه a را نرمال می گوییم.

۳. فرض کنید $\mathcal{A}$ یکدار باشد، در این صورت اگر $a^*a = aa^* = ۱$، آنگاه a را یکانی می گوییم.

هر عضو از یک C^*-جبر جابجایی، نرمال است. اگر $\mathcal{A}$ یک C^*-جبر و a یک عضو نرمال آن باشد، آنگاه C^*-جبر تولیدشده توسط a، جابجایی است.

گزاره ۱-۳-۷. [گزاره ۷-۱؛[۱۰]]

اگر $a \in \mathcal{A}$ باشد، احکام زیر برقرار است:

۱. اگر a معکوس‌پذیر باشد، آنگاه a^* نیز معکوس‌پذیر است و $(a^{-۱})^* = (a^*)^{-۱}$.

۲. $a = x + iy$، که در آن x و y اعضای خودالحاق $\mathcal{A}$ هستند.

۳. اگر u در $\mathcal{A}$ یکانی باشد، آنگاه $\|u\| = ۱$ است.

۴. اگر a خودالحاق باشد، آنگاه $r(a) = \|a\|$، ($r(a)$ شعاع طیفی a است).

۵. اگر B یک C^*-جبر دیگر باشد و $\rho : \mathcal{A} \to B$ یک $*$-همریختی باشد، آنگاه برای هر $a \in \mathcal{A}$، $\|\rho(a)\| \leq \|a\|$ است.

از آنجائیکه معکوس یک $*$-همریختی، خود یک $*$-همریختی است، نتیجه زیر را بلافاصله می‌آوریم.

نتیجه ۱-۳-۸. اگر $\mathcal{A}$ و B دو C^*-جبر و $\rho : \mathcal{A} \to B$ یک $*$-یکریختی باشند، آنگاه ρ طولپا است.

می‌توانیم بگوییم $Re\ \mathcal{A}$ یک فضای باناخ حقیقی است.

گزاره ۱-۳-۹. [گزاره ۹-۱؛[۱۰]] اگر $h : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ یک همریختی جبری باشد، آنگاه احکام زیر برقرارند:

۱. اگر $a \in Re\ \mathcal{A}$ باشد، آنگاه $h(a) \in \mathbb{R}$ است.

۲. برای هر عضو دلخواه a از A، $h(a^*) = \overline{h(a)}$ است.

۳. برای هر $a \in \mathcal{A}$، $h(a^*a) \geq ۰$ است.

۴. اگر $\mathcal{A}$ یکدار و $u \in \mathcal{A}$ یکانی باشد، آنگاه $|h(u)| = ۱$ است.

نتیجه ۱-۳-۱۰. هر همریختی جبری از یک C^*-جبر به توی اعداد حقیقی، یک $*$-همریختی است.

قضیه ۱-۳-۱۱. [قضیه ۶-۸-VII؛ [۹]] فرض کنید $\mathcal{A}$ یک C^*-جبر جابجایی و $a \in \mathcal{A}$ باشد، در این صورت طیف a، برابر است با:

$$\sigma(a) = \{h(a) \ : \ \text{یک همریختی است } h : \mathcal{A} \to \mathbb{C}\}$$

نتیجه ۱-۳-۱۲. اگر $a \in Re\ \mathcal{A}$ باشد، آنگاه $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ است.

۱-۳-۱ C^*-جبرهای جابجایی و حسابان تابعی

نمادها و مفاهیم ذکر شده در (۱-۲-۱) را در نظر بگیرید، احکام بیشتری برقرار است که در ذیل می‌آید. همان طور که از قبل می‌دانیم هر C^*-جبر جابجایی یکدار با $C(\mathfrak{M})$ یکریخت است. حال نتیجه‌ی زیر را بیان می کنیم:

نتیجه ۱-۳-۱۳. [نتیجه ۲-۲؛[۱۰]] اگر $\mathcal{A}$ یک C^*-جبر بدون یکه و $\mathfrak{M}$ فضای ایده‌آل ماکسیمال آن باشد، آنگاه تبدیل گلفاند $\gamma : \mathcal{A} \to C_\circ(\mathfrak{M})$ یک $*$-یکریختی است.

اگر (X, Ω, μ) یک فضای اندازه‌ی σ-متناهی باشد، آنگاه $L^\infty(\mu)$ یک C^*-جبر جابه‌جایی است. در نتیجه $L^\infty(\mu)$ با $C(\mathfrak{M})$ یعنی جبر تمام توابع پیوسته روی فضای ایده‌آل ماکسیمال $L^\infty(\mu)$، $*$-یکریخت است.

تعریف ۱-۳-۱۴. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک C^*-جبر جابه‌جایی باشد و $S \subseteq \mathcal{A}$، در این صورت منظور از C^*-جبر تولید شده توسط مجموعه‌ی S، اشتراک همه‌ی C^*-جبرهای مشمول در $\mathcal{A}$ و شامل مجموعه‌ی S می‌باشد که آن را با $C^*_\circ(S)$ نشان می‌دهیم.

در تعریف بالا ممکن است C^*-جبر $C^*_\circ(S)$ بدون یکه باشد. لذا $C^*(S)$ را به صورت $C^*_\circ(S \cup \{۱\})$ تعریف می کنیم. به ویژه، اگر $a \in \mathcal{A}$ آنگاه $C^*(a)$ بستار همه‌ی چندجمله‌ای‌ها برحسب a و a^* و ۱ می‌باشد.

گزاره ۱-۳-۱۵. [گزاره ۶-۲؛[۱۰]] فرض کنید (X, Ω, μ) یک فضای اندازه‌ی σ-متناهی باشد، در این صورت برای هر $\varphi \in L^\infty(\mu)$، نگاشت M_φ را روی $L^۲(\mu)$ به عنوان ضرب توسط φ تعریف می کنیم. یعنی

$$L^\infty(\mu) \hookrightarrow B(L^۲(\mu))$$

$$\varphi \to M_\varphi$$

که در آن منظور از M_φ، عملگر ضرب در φ می‌باشد. اگر $\varphi \in L^\infty(\mu)$، آنگاه احکام زیر برقرارند:

۱. عملگر M_φ نرمال است و $M^*_\varphi = M_{\overline{\varphi}}$.

۲. نگاشت $\varphi \to M_\varphi$ یک $*$-همریختی از $L^\infty(\mu)$ به $B(L^2(\mu))$ می‌باشد.

۳. $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$.

با توجه به قضیه‌ی بالا، در واقع $L^\infty(\mu)$ در $B(L^2(\mu))$ می‌نشیند.

۱-۳-۲ عناصر مثبت در یک C^*-جبر

تعریف ۱-۳-۱۶. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک C^*-جبر باشد، در این صورت عنصر $a \in \mathcal{A}$ مثبت است هرگاه $a \in Re\,\mathcal{A}$ و $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$(منظور از $\mathbb{R}_+$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی نامنفی است) و می‌نویسیم $a \geq 0$ و مجموعه‌ی همه‌ی عناصر مثبت $\mathcal{A}$ را با $\mathcal{A}_+$ نشان می‌دهیم. همچنین عنصر a را منفی گوییم هرگاه $-a \in \mathcal{A}_+$ و می‌نویسیم $a \leq 0$.

مثال ۱-۳-۱۷. تابع f در C^*-جبر $C(X)$ را مثبت گوییم اگر و تنها اگر برای هر $x \in X$، $f(x) \geq 0$. همچنین تابع φ در $L^\infty(\mu)$ مثبت است اگر و تنها اگر نسبت به اندازه‌ی μ و تقریباً همه جا داشته باشیم $\varphi(x) \geq 0$.

گزاره ۱-۳-۱۸. [گزاره ۲-۳؛[۱۰]] اگر $a \in Re\mathcal{A}$، آنگاه عناصر مثبت منحصر بفرد u و v در $\mathcal{A}$ موجودند به طوریکه $a = u - v$ و $uv = vu = 0$.

عناصر u و v در گزاره‌ی قبل را به ترتیب قسمت‌های مثبت و منفی عنصر الحاقی a می گوییم و آن‌ها را توسط $u = a_+$ و $v = a_-$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱-۳-۱۹. [قضیه ۴-۳؛[۱۰]] فرض کنید $\mathcal{A}$ یک C^*-جبر باشد، در این صورت احکام زیر معادلند:

۱. $a \geq 0$

۲. $b \in \mathcal{A}_+$ وجود دارد به طوریکه $a = b^2$.

۳. $x \in \mathcal{A}$ وجود دارد به طوریکه $a = x^*x$.

گزاره ۱-۳-۲۰. [گزاره ۵-۳؛[۱۰]] $\mathcal{A}_+$ یک مخروط بسته در $\mathcal{A}$ است.

مخروط بودن $\mathcal{A}_+$ یعنی برای هر $a, b \in \mathcal{A}_+$ و $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$، $a+b$ و ra به $\mathcal{A}_+$ تعلق دارند.

لذا $Re\,\mathcal{A}$ یک فضای برداری مرتب حقیقی خواهد بود. اگر $a, b \in Re\,\mathcal{A}$ آنگاه می گوییم $a \leq b$ اگر داشته باشیم $b - a \geq 0$.

همچنین اگر $a \in Re\,\mathcal{A}$، آنگاه $-\|a\|1 \leq a \leq \|a\|1$. به ویژه برای هر عضو a در $\mathcal{A}$، $0 \leq a^*a \leq \|a\|^2 1$.

گزاره ۱-۳-۲۱. [گزاره ۹-۲؛[۲۵]] فرض کنید $\mathcal{A}$ یک C^*-جبر (یکدار) باشد. در این صورت اگر $0 \leq a \leq b$، آنگاه برای هر $c \in \mathcal{A}$، $0 \leq c^*ac \leq c^*bc$.

گزاره ۱-۳-۲۲. [گزاره ۶-۳؛[۱۰]] فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد و $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$، در این صورت T مثبت است اگر و تنها اگر برای هر بردار h، $0 \geq \langle Th, h \rangle$.

قضیه ۱-۳-۲۳. [قضیه ۲۵-۲؛[۲۵]] فرض کنید $\mathcal{A}$ یک C^*-جبر یکدار و $\mathcal{B}$ یک C^*-زیرجبر آن باشد. در این صورت اگر T یک تابعک خطی مثبت روی $\mathcal{B}$ باشد، آنگاه قابل توسیع به یک تابعک خطی مثبت روی $\mathcal{A}$ است.

تعریف ۱-۳-۲۴. عملگر W روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ را که برای هر بردار h در $(ker\ W)^\perp$، در رابطه‌ی $\|Wh\| = \|h\|$ صادق است، طولپایی جزئی گوییم.

فضای $(ker\ W)^\perp$ را فضای آغازین W و برد W را فضای پایانی آن می‌نامیم.

۱-۳-۳ نمایش‌های یک C^*-جبر

یک نمایش، فقط یک $*$-همریختی با یک برد خاص است.

تعریف ۱-۳-۲۵. [تعریف ۱-۶؛[۱۰]] فرض کنید $\mathcal{A}$ یک C^*-جبر باشد، در این صورت دوتایی $(\pi, \mathcal{H})$ را که در آن $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت و $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ نیز یک $*$-همریختی می‌باشد، یک نمایش از $\mathcal{A}$ روی $\mathcal{H}$ می‌نامیم.

اگر $\mathcal{A}$ یکدار باشد، آنگاه انتظار داریم $\pi(1) = 1$.

برای سادگی، معمولاً یک نمایش را فقط با نماد π نشان می‌دهیم.

اگر $\mathcal{A}$ یکدار نباشد و $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} + \mathbb{C}$ نمایشگر C^*-جبر یکدار شده‌ی $\mathcal{A}$ باشد و $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ یک نمایش باشد، آنگاه می‌توان π را به $\tilde{\pi} : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ با تعریف $\tilde{\pi}(a + \alpha) = \pi(a) + \alpha$ توسیع داد که در آن $a \in \mathcal{A}$ و $\alpha \in \mathbb{C}$.

مثال ۱-۳-۲۶. [مثال ۲-۶؛[۱۰]]

۱. اگر $\mathcal{A}$ یک C^*-زیرجبر $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ باشد، آنگاه نگاشت شمول $\mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ یک نمایش است.

۲. فرض کنید (X, Ω, μ) یک فضای اندازه‌ی σ-متناهی باشد، در این صورت نگاشت $\pi : L^\infty(\mu) \to B(L^2(\mu))$ تعریف شده توسط $\pi(\varphi) = M_\varphi$ یک نمایش است.

۳. اگر X یک فضای فشرده و μ یک اندازه‌ی بورل مثبت روی X باشد، آنگاه $\pi : C(X) \to B(L^{۲}(\mu))$ تعریف شده توسط $\pi_\mu(f) = M_f$ یک نمایش از $C(X)$ روی $L^{۲}(\mu)$ است.

تعریف ۱-۳-۲۷. دو نمایش $(\pi_۱, \mathcal{H}_۱)$ و $(\pi_۲, \mathcal{H}_۲)$ از C^*-جبر A را هم‌ارز گوییم هرگاه یکریختی $U : \mathcal{H}_۲ \to \mathcal{H}_۱$ چنان موجود باشد که برای هر $a \in \mathcal{A}$، $\pi_۲(a) = U\pi_۱(a)U^{-۱}$ در این صورت می‌نویسیم $\pi_۱ \cong \pi_۲$.

تعریف ۱-۳-۲۸. ۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک C^*-جبر باشد، در این صورت نمایش π را دوری گوییم هرگاه بردار e در $\mathcal{H}$ چنان موجود باشد که مجموعه‌ی $\{\pi(a)e \mid a \in \mathcal{A}\}$ در $\mathcal{H}$ چگال باشد. e را بردار دوری برای π می‌نامیم.

۲. نمایش π را وفادار گوییم هرگاه یک‌به‌یک باشد.

۳. یک زیرنمایش π، نمایشی است به فرم $a \to \pi(a)|_{\mathcal{M}}$ که در آن $\mathcal{M}$ یک زیرفضای بسته‌ی $\mathcal{H}$ می‌باشد.

مثال ۱-۳-۲۹. اگر X یک فضای فشرده و μ یک اندازه‌ی بورل مثبت روی X باشد، آنگاه π_μ تعریف شده در قسمت سوم مثال (۱-۳-۲۶) دوری با بردار دوری آن ۱ است. در واقع هر تابع در $L^{۲}(\mu)$ که روی مجموعه‌ای با اندازه‌ی μ مثبت صفر نشود یک بردار دوری برای این نمایش است. همچنین نمایش همانی $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ دوری است و هر بردار غیرصفر $\mathcal{H}$ برای این نمایش دوری می‌باشد.

تعریف ۱-۳-۳۰. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک C^*-جبر باشد، در این صورت گوییم نمایش $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ناتباهیده است یا به طور ناتباهیده عمل می‌کند هرگاه $[\rho(\mathcal{A})\mathcal{H}] = \mathcal{H}$.

تعریف ۱-۳-۳۱. هر $*$-زیرجبر یکدار $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ که نسبت به توپولوژی عملگری ضعیف $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ بسته باشد را یک جبر فان نویمان می‌گوییم. این توپولوژی در (۱-۴-۱۹) معرفی شده است.

به عنوان مثال $L^\infty(\mathbb{R})$ یک جبر فان نویمان جابه‌جایی و $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ در صورتی‌که فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ دارای بعد حداقل ۲ باشد مثالی از یک جبر فان نویمان ناجابه‌جایی می‌باشد.

۱-۳-۴ GNS-ساختار روی C^*-جبرها

فرض کنید $\mathcal{A}$ یک C^*-جبر یکدار باشد و $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ یک نمایش باشد. حال اگر e بردار یکانی در $\mathcal{H}$ و $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ برای هر $a \in \mathcal{A}$ به این صورت تعریف شده باشدکه $\varphi(a) = \langle \pi(a)e, e\rangle$، آنگاه φ یک تابعک خطی مثبت است یعنی برای هر $a \in \mathcal{A}_+$، $\varphi(a) \geq ۰$. همچنین به دلیل اینکه $\|e\| = ۱$، داریم $\varphi(۱) = ۱$.

تعریف ۱-۳-۳۲. هر تابعک خطی مثبت با نرم ۱ روی یک C^*-جبر را حالت می‌نامیم. $\Sigma = \Sigma(\mathcal{A})$ را مجموعه‌ی همه‌ی حالت‌ها روی $\mathcal{A}$ قرار می‌دهیم. $\Sigma(\mathcal{A})$ فضای حالت A نامیده می‌شود.