to print the page number in header 2
[LE,RO] [LO,RE] [C]2 2 related to XePersian package 4

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی گرایش آنالیز

عنوان :

میانگین پذیری و میانگین پذیری ضعیف دوگان دوم جبرهای باناخ

استاد راهنما:

دکتر محمد ابوالقاسمی

نگارش:

مریم معطرپور

اسفند ۱۳۸۹

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

میانگین پذیری و میانگین پذیری ضعیف دوگان دوم جبرهای باناخ

نگارش: مریم معطرپور

در تاریخ توسط هیأت داوران زیر بررسي و با درجه به تصویب نهایي رسید.

استاد راهنما: دکتر محمد ابوالقاسمی با مرتبه علمی امضاء:

استاد ممتحن داخلی: دکترعبدالمجید فتاحی با مرتبه علمی امضاء:

استاد ممتحن خارجی: دکتر حجت اله سامع با مرتبه علمی امضاء:

خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر محمد ابوالقاسمی ، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از برادران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

مریم معطرپور

اسفند۱۳۸۹

تقدیم به

وسعت دستان پدرم که در سایه سار وجودش رشد

کردم ، آموختم و اوج گرفتم

و تقدیم به چشم های همیشه نگران ، محبت های بی دریغ

، الطاف بیکران و وجود سبز مادرم

و تقدیم به برادرانم که حامیان همیشگی زندگی ام هستند.

چکیده

یکی از نظریه هاکه موردعلاقه ریاضیدانان جهت تحقیق و مطالعه در گرایش آنالیز هارمونیک می باشد، نظریه میانگین پذیری جبرهای باناخ است.
اگر A یک جبرباناخ باشد می دانیم A^{**} نیز به همراه دو نوع ضرب به نام ضرب های آرنز اول و آرنز دوم به یک جبر باناخ تبدیل می شود، حال این سوال مطرح می شود که آیا ارتباطی بین میانگین پذیری این دو جبر باناخ هست؟
یعنی اگر A میانگین پذیر باشد، آیا دوگان دوم آن میانگین پذیر است و بالعکس اگر A^{**} میانگین پذیر باشد، آیا A میانگین پذیر است ، در مورد سوال دوم پاسخ با توجه به در نظر گرفتن این موضوع که A ایده آلی از A^{**} باشد در [۲۵] مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است. حال در این پایان نامه مشاهده می کنیم که به طور کلی میانگین پذیری A^{**} ، میانگین پذیری A را ایجاب می کند.
همین طور سوالات مطرح شده در بالا در حالت میانگین پذیری ضعیف نیز مطرح است، که در این پایان نامه این سوالات را نیز تا حدی مورد مطالعه قرار می دهیم.
در انتها ارتباط میانگین پذیری جبرهای باناخ گروهی $L^1(G)$ و $L^1(G)^{**}$ را مطالعه می کنیم. بعنوان مثال اگر G یک گروه فشرده موضعی گسسته باشد به دلیل این که $L^1(G)$ متناهی البعد می شود، $L^1(G)$ و $L^1(G)^{**}$ یکی خواهند بود بنابر این میانگین پذیری آنها معادل با میانگین پذیری G می شود.

کلمات کلیدی: *جبر باناخ ، میانگین پذیری ، میانگین پذیری ضعیف ، دوگان دوم جبر های باناخ*

فهرست مطالب

عنوان	صفحه
۰-۱ پیشگفتار	ب
۱ مفاهیم و تعاریف اولیه	**۱**
۱-۱ پیشنیازهایی از آنالیز تابعی	۲
۱-۲ پیشنیازهایی از آنالیز هارمونیک	۱۰
۲ مفهوم میانگین پذیری	**۲۱**
۲-۱ میانگین پایا روی گروه های فشرده موضعی	۲۲
۲-۲ تعاریف	۲۹
۲-۳ میانگین پذیری جبر های باناخ	۳۳
۲-۴ میانگین پذیری ضعیف جبر های باناخ	۴۵
۳ میانگین پذیری و میانگین پذیری ضعیف دوگان دوم جبر های باناخ	**۴۸**
۳-۱ میانگین پذیری دوگان دوم جبر های باناخ	۴۹
۳-۲ میانگین پذیری ضعیف دوگان دوم جبرهای باناخ	۶۲
منابع و مآخذ	**۶۸**
واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	**۷۱**

۱-۰ پیشگفتار

مفهوم میانگین پذیری در سال ۱۹۰۴ با طرح این سوال لبگ[1] آغاز شد که آیا تابعی با مجموعه متناهی جمع پذیر که تحت یک عمل معین گروه پایا باشد، وجود دارد؟ در سال ۱۹۲۹ مفهوم میانگین پذیری توسط جان فون نویمن[2] تحت عنوان آلمانی *messbar*، در مورد اندازه های جمع پذیر روی زیر مجموعه های گروه فشرده موضعی G، در رابطه با پارادوکس باناخ-تارسکی[3] ارائه شد و در سال ۱۹۴۹، ماهون ام. دی[4] آن را با عنوان میانگین پذیری در انگلیسی ترجمه کرد.

جبر های باناخ دارای ساختار جبری و توپولوژیکی هستند و ریاضیدان ها علاقه مند به مطالعه روابط بین این دو ساختار می باشند. یکی از راه های حصول موفقیت در مورد جبر های باناخ مطالعه میانگین پذیری آن هاست.

مفهوم میانگین پذیری جبر های باناخ نخستین بار در سال ۱۹۷۲توسط جانسون [5]تعریف و مطالعه شد. یکی از نتایج اساسی که توسط وی بیان و اثبات شد، این بود که برای گروه فشرده موضعی G، جبر گروهی $L^1(G)$ میانگین پذیر است اگر و تنها اگر گروه G میانگین پذیر باشد. با این تعریف میانگین پذیری جبر های باناخ پایه گذاری شد و از آن به بعد وارد شاخه های دیگر ریاضیات مانند جبر های فون نویمن، فضاهای عملگرها و حتی هندسه دیفرانسیل شد. پس از جانسون مفاهیم میانگین پذیری تعمیم یافت به طوری که انواع دیگری از میانگین پذیری ، از جمله میانگین پذیری ضعیف معرفی شد.

بید[6] ، کورتیز[7] و دیلز[8] مفهوم میانگین پذیری ضعیف را در سال ۱۹۸۷ برای جبرهای باناخ جابجایی مطرح کردند و جانسون آن را برای حالت کلی تعمیم داد.

هدف اصلی این پایان نامه بررسی مفهوم میانگین پذیری و میانگین پذیری ضعیف دوگان دوم جبر های باناخ می باشد، که بصورت زیر فصل بندی شده است.

فصل اول این پایان نامه شامل تعاریف و مفاهیم اولیه جهت استفاده در فصل های بعدی است که در آن به بیان مختصری از تعاریف و قضایایی در آنالیز تابعی و آنالیز هارمونیک می پردازیم.

در فصل دوم مفهوم میانگین پذیری در گروه های فشرده موضعی و جبر های باناخ بیان شده و در

[1] Lebesgue

[2] John Von Neumann

[3] Banach-Tarski paradox

[4] Mahlon M. Day

[5] Johnson

[6] Bade

[7] Curtis

[8] Dales

قضیه ای چگونگی ارتباط بین میانگین پذیری گروه های فشرده موضعی و جبر های باناخ آمده است(قضیه جانسون) همچنین به بررسی ارتباط بین میانگین پذیری یک جبر باناخ غیر یکدار و یکدار شده آن می پردازیم. در پایان این فصل نیز مفهوم میانگین پذیری ضعیف جبر های باناخ و قضیه های مهمی از میانگین پذیری ضعیف بیان شده است.

در فصل سوم ابتدا با مفهوم مرکز توپولوژیکی یک جبر باناخ آشنا شده سپس نشان می دهیم اگر G گروهی فشرده موضعی یا نیم گروه حذفی ضعیف باشد با فرض متناهی بودن G ، $L^1(G)^{**}$ میانگین پذیر است و اگر G گروه باشد و $L^1(G)^{**}$ میانگین پذیر باشد آن گاه G متناهی خواهد بود. سپس در قضیه ای چگونگی ارتباط بین میانگین پذیری جبر باناخ A و دوگان دوم آن یعنی A^{**} آمده است. در بخش آخر نیز با این فرض که A یک جبر باناخ باشد، ارتباط بین میانگین پذیری ضعیف A و A^{**} در قضیه ای بررسی شده است. در واقع نشان داده می شود که با میانگین پذیر ضعیف بودن A^{**} و ایده آل چپ بودن $\hat{A}$ در A^{**}، A نیز میانگین پذیر ضعیف خواهد بود.

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف اولیه

۱ - ۱ پیشنیازهایی از آنالیز تابعی

در این فصل تعاریف ، مفاهیم و قضایای مورد نیاز در آنالیز تابعی و آنالیز هارمونیک که در فصل های بعدی از آنها استفاده می کنیم را به اختصار بیان می نماییم .

تعریف ۱ - ۱ - ۱. فضای برداری مختلط X را یک **فضای خطی نرم دار** [۱] می نامیم اگر به هر $x \in X$ عددی حقیقی و نامنفی مانند $\|x\|$ به نام نرم x چنان مربوط شده باشد که :

الف) به ازای هر x و y در X ، $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

ب) اگر $x \in X$ و α اسکالر باشد ، $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

ج) $\|x\| = ۰$ تساوی $x = ۰$ را ایجاب نماید.

فضای نرم دار X را یک **فضای باناخ** [۲] می نامیم ، هرگاه نسبت به متر تولید شده بوسیله نرم ، فضایی کامل باشد. به عبارت دیگر، X یک فضای باناخ است هرگاه به ازای هر دنباله کشی مانند $\{x_n\}$ در X عنصری مانند $x \in X$ ، موجود باشد که $lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = ۰$.

تعریف ۱ - ۱ - ۲. گیریم X و Y دو فضای برداری روی میدان F باشند. تابع $T : X \to Y$ را یک **عملگر خطی** [۳] از X به Y گوییم ، هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ و هر $\alpha, \beta \in F$ داشته باشیم :

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

هر عملگر خطی از فضای برداری X به توی فضای اعداد مختلط را یک **تابعک خطی** [۴] می نامیم.
فرض کنیم X و Y دو فضای نرم دار باشند و $T : X \to Y$ یک عملگر خطی باشد . T را **عملگر کران دار** [۵] گوییم ، اگر عدد ثابتی مانند M وجود داشته باشد که به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم :

$$\|T(x)\| \leq M \|x\|.$$

---

[۱] Normed linear space

[۲] Banach space

[۳] Linear operation

[۴] Linear fanctional

[۵] Bounded operation

کوچکترین عدد M را که در این خاصیت صدق کند نرم T نامیده و با $\|T\|$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in X, \|x\| \leq ۱\}.$$

اگر T یک نگاشت کران دار باشد ، **نرم یکنواخت** T [۶] را با نماد $\|T\|_\infty$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\|T\|_\infty = \sup\{\|T(x)\| : x \in X\}$$

مجموعه تمام عملگر های خطی کران دار از X به Y را با $B(X,Y)$ نمایش می دهیم .

تعریف ۱-۱-۳. برای هر فضای خطی نرم دار X و Y ، یک **یکریختی خطی طولپا** [۷] از X بروی Y ، یک نگاشت خطی T از X بروی Y است به طوری که برای هر $x \in X$، $\|T(x)\| = \|x\|$.

توضیح : توجه داریم که یک عملگر T از فضای نرم دار X به فضای نرم دار Y ، پیوسته است اگر برای هر دنباله $\{x_n\}$ در X که $x_n \to x$ آنگاه $Tx_n \to Tx$.

گزاره ۱-۱-۴. *فرض کنید X و Y دو فضای نرم دار بوده و $T : X \to Y$ خطی باشد . آنگاه شرایط زیر هم ارزند:*

الف) *T پیوسته است .*

ب) *T کران دار است .*

پ) *هرگاه $x_n \to ۰$ آن گاه $T(x_n) \to ۰$.*

اثبات . رجوع کنید به [۲۴] .

قضیه ۱-۱-۵. (اصل کرانداری یکنواخت): فرض کنیم X و Y فضاهای خطی ، X فضایی باناخ و $F = \{T : T : X \longrightarrow Y\}$ مجموعه ای از تبدیلات خطی باشد. اگر برای هر $T \in F$ و $x \in X$ ، M_x ای موجود باشد که $\|Tx\| \leq M_x$ آنگاه M ای وجود دارد که به ازای هر T، $\|Tx\| \leq M$.

اثبات . رجوع کنید به [۲۴] .

---

[۶] Uniformly norm

[۷] Isomorphism linear isometrically

تعریف ۱-۱-۶. فرض کنید X یک فضای برداری باشد. نگاشت خطی $P : X \to X$ را **تصویر** [۸] گوییم ، در صورتی که $P^۲ = P$.
بعبارت دیگر برای هر $x \in X$ داشته باشیم :

$$P(P(x)) = P(x)$$

مثال ۱-۱-۷. *تابع $P : R^۲ \longrightarrow R^۲$ با ضابطه های $P(x,y) = ۰$ و $P(x,y) = x + iy$ یک تصویر می باشد.*

تعریف ۱-۱-۸. فرض کنیم X یک فضای برداری باشد. مجموعه ی $C \subset X$ محدب است اگر

$$tC + (۱-t)C \subset C \qquad (۰ \leq t \leq ۱)$$

به عبارتی اگر $x \in X$ و $y \in C$ و $(۰ \leq t \leq ۱)$ ، باید C شامل $tx + (۱-t)y$ باشد.

تعریف ۱-۱-۹. فرض کنید X فضایی برداری و N زیر فضایی از آن باشد. **فضای خارج قسمتی** [۹] X به پیمانه N را به صورت $X/N = \{\pi(x) : x \in X\}$ تعریف می کنیم. که در آن ،

$$\pi(x) = x + N = \{x + y : y \in N\}$$

X/N با جمع و ضرب اسکالر

$$\pi(x) + \pi(y) = \pi(x+y) \qquad , \qquad \alpha\pi(x) = \pi(\alpha x)$$

یک فضای برداری است.
صفر فضای X/Nبرابر $N = \pi(۰)$ است. نگاشت $\pi : X \to X/N$ که X را به $\pi(x)$ می نگارد، **نگاشت خارج قسمتی** [۱۰] و بعد ، X/N **هم بعد** [۱۱] N در X گفته می شود.

فرض کنید N زیر فضایی بسته از فضای نرم دار X باشد. در این صورت ، X/N با نرم

$$\|\pi(x)\| = \inf\{\|x - z\| : z \in N\}$$

فضایی نرم دار است. همچنین، توجه داریم که اگر X باناخ باشد ، X/N هم فضایی باناخ است .

تعریف ۱-۱-۱۰. فرض کنیم M زیر فضایی بسته از فضای نرم دار X باشد. هرگاه زیرفضای بسته‌ای مانند N از X وجود داشته باشد که $X = M + N$ و $M \bigcap N = \{۰\}$، آنگاه گوییم M در X **کامل شده**

---

[۸] Projection

[۹] Quotient space

[۱۰] Quotient mapping

[۱۱] Codimension

[12] است. در این حالت گوییم X جمع مستقیم N, M است و از نماد $X = M \bigoplus N$ استفاده می کنیم.

تعریف ۱-۱-۱۱. فضای ضرب داخلی : [13]
فضای برداری مختلط H را یک فضای ضرب داخلی نامیم اگر به هر زوج مرتب از بردارهای x و y در H یک عدد مختلط مانند (x,y) به نام حاصل ضرب داخلی یا حاصل ضرب اسکالر x و y چنان مربوط شده باشد که قواعد زیر برقرار باشند:

۱. $\overline{(x,y)} = (y,x)$.

۲. $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$.

۳. اگر $x \in H$، $y \in H$ و $\alpha \in C$، $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$.

۴. به ازای هر $x \in H$ ، $(x,x) \geq 0$.

واضح است که در هر فضای ضرب داخلی H :

$$x = 0 \Leftrightarrow (x,x) = 0.$$

به وضوح می توان دید با قرار دادن : $\forall x \in H : \|x\| = (x,x)^{\frac{1}{2}}$ ، H یک فضای نرم دار می شود. حال اگر H با این نرم یک فضای کامل باشد، آن را یک فضای هیلبرت [14] می نامیم .
به عنوان مثال ، $L^2(R)$ یک فضای هیلبرت است.

تعریف ۱-۱-۱۲. فضای پوچ : [15] گیریم $T : X \to F$ یک نگاشت خطی باشد، آنگاه مجموعه

$$T^{-1}\{0\} = \{x \in X : Tx = 0\} = N(T)$$

زیرفضایی از X است که فضای پوچ T نامیده می شود.

تعریف ۱-۱-۱۳. نگاشت فشرده: [16] فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ و U گوی یکه باز در X باشد. گوییم نگاشت خطی $T : X \to Y$ ،فشرده است اگر $\overline{T(U)}$ در Y فشرده باشد.

تعریف ۱-۱-۱۴. مجموعه φ را به وسیله رابطه دوتایی $\leq$ **جزئی مرتب** گوییم ، اگر

۱. $a \leq b$ و $b \leq c$ ایجاب کنند که $a \leq c$.

---

[12] Complemented

[13] Inner product space

[14] Hilbert space

[15] Nilpotent space

[16] Compact mapping

۲. به ازای هر $a \in \varphi$ ، $a \leq a$.

۳. $a \leq b$ و $b \leq a$ ایجاب کنند که $a = b$.

تعریف ۱-۱-۱۵. گیریم Aیک جبر نرم دار باشد. یک **مجموعه جهت دار** ، یک مجموعه جزئی مرتب Λ است اگربرای $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ ، $\lambda \in \Lambda$ با این شرط که $\lambda_k \leq \lambda$ $(k = 1, 2)$ وجود داشته باشد.

تعریف ۱-۱-۱۶. یک **تور** [17] در یک فضای توپولوژیکی E ، یک نگاشت از یک مجموعه جهت دار به توی E است. همگرایی تور $\{x(\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$در E ، به $x \in E$ به صورت $x(\lambda) \to x$ نمایش داده می شود .

و $x(\lambda) \to x$ هرگاه یک همسایگی U از x وجود داشته باشد که برای $\lambda_0 \in \Lambda$ با این شرط که $(\lambda \geq \lambda_0)$ داشته باشیم : $x(\lambda) \in U$

تعریف ۱-۱-۱۷. یک **زیر تور** [18] از تور $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ، توری مانند $\{y_\beta\}_{\beta \in B}$ به همراه نگاشتی مانند $\beta \to \alpha_\beta$ از A به B است به طوری که :

۱. به ازای هر $\alpha_0 \in A$ عضوی چون β_0 از B وجود داشته باشد به طوری که اگر $\beta \geq \beta_0$ باشد، آنگاه $\alpha_\beta \geq \alpha_0$.

۲. $y_\beta = x_{\alpha\beta}$.

نکته ۱-۱-۱۸. *اگر $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ به نقطه ای مانند x همگرا باشد، آنگاه هر زیر تور مانند $\{x_{\alpha_\beta}\}$ نیز به x همگراست.*

تعریف ۱-۱-۱۹. گیریم X یک فضای توپولوژیک خطی باشد. مجموعه متشکل از تابعک های خطی و پیوسته از X به R را با X^* نشان می دهیم و آنرا **فضای دوگان** X [19] می نامیم .

توضیح : اگر روی X^* جمع و ضرب اسکالر نقطه وار تعریف کنیم آنگاه یک فضای خطی خواهد شد.

بعلاوه اگر X یک فضای نرم دار باشد و برای هر $\Lambda \in X^*$ قرار دهیم:

$$\|\Lambda\| = \sup\{\|\Lambda(x)\| : \|x\| \leq 1\}$$

---

[17] Net

[18] Subnet

[19] Dual space

آنگاه X^* با نرم تعریف شده فوق ، یک فضای باناخ می شود.

تذکر : گیریم X فضایی نرم دار و X^* دوگان آن باشد چون X^* یک فضای نرم دار (حتی باناخ) است، بنابراین می توان دوگان X^* یعنی $(X^*)^*$ که آنرا با X^{**} نشان می دهیم، یک فضای باناخ در نظر گرفت و مورد مطالعه قرار داد.

توضیح : (نشاننده طبیعی) [20] گیریم X فضایی نرم دار باشد. در این صورت هر $x \in X$ تابعک خطی مانند F_x را القا می کند که $\|F_x\| = \|x\|$ و به ازای هر $f \in X^*$ ، $F_x(f) = f(x)$. نگاشت $J : X \to X^{**}$ که به ازای هر $x \in X$ ، $J(x) = F_x$ یک همریختی طولپا یا یک نشاننده طبیعی از X به X^{**} خواهد بود.

فضای نرم دار X را انعکاسی گویند هرگاه نگاشت خطی و حافظ نرم زیر پوشا باشد

$$\Phi : X \to X^{**} \qquad \Phi(x) = \hat{x}$$

که در آن ،

$$\hat{x} : X^* \to F \qquad \hat{x}(\Lambda) = \Lambda(x)$$

به عبارت دیگر X انعکاسی است هرگاه $\Phi(X) = X^{**}$.

فرض کنیم X یک فضای نرم دار و X^* فضای دوگان X باشد. توپولوژی تولید شده به وسیله X^* روی X، یعنی ضعیف ترین توپولوژی τ روی X به طوری که هر $\Lambda \in X^*$ نسبت به τ پیوسته باشد را **توپولوژی ضعیف** [21] (w - توپولوژی)روی X گویند و آنرا با $\sigma(X, X^*)$ نشان می دهند یا اگر دنباله $\{x_n\}$ در X نسبت به توپولوژی ضعیف همگرا به x باشد و می نویسیم $x_n \xrightarrow{w} x$ ($w - \lim x_n = x$) و داریم :

$$x_n \xrightarrow{w} x \equiv \forall f \in X^*, f(x_n) \to f(x).$$

ملاحظه : اگر دنباله $\{x_n\}$ در X نسبت به توپولوژی اولیه (قوی) همگرا به X باشد، می نویسیم $x_n \to x$ هرگاه

$$\|x_n - x\| \longrightarrow 0$$

تعریف ۱ - ۱ - ۲۰. اگر X یک فضای نرم دار و X^* فضای دوگان آن باشد آنگاه توپولوژی $\sigma(X^*, X^{**})$ توپولوژی ضعیف روی X^* است به عبارت دیگر ضعیف ترین توپولوژی τ روی X^* است به طوری که هر

---
[20] Natural embedding

[21] Weak topology

$\Lambda \in X^{**}$ نسبت به τ پیوسته باشد.

حال یک توپولوژی روی X^* تعریف می کنیم : برای هر $x \in X$ نگاشت $\hat{x} : X^* \to R$ با ضابطه $\hat{x}(f) = f(x)$ را در نظر می گیریم . هرگاه x در X تغییر کند یک خانواده ازتابعک های $\{\hat{x}\}_{x \in X}$ بر X^* داریم .

کوچکترین توپولوژی روی X^* که نسبت به آن به ازای هر $x \in X$ ، $\{\hat{x}\}_{x \in X}$ پیوسته می گردد را با $\sigma(X, X^*)$ نشان داده و آنرا **توپولوژی ضعیف** * [22] (w^*- توپولوژی) روی X^* می نامیم. به سادگی می توان دید که توپولوژی ضعیف * ، ضعیف تر از توپولوژی ضعیف روی X^* است . برای دنباله $\{f_n\}$ در X^* همگرایی f_n به سمت f در توپولوژی $\sigma(X^*, X)$ را با نماد $f_n \overset{w^*}{\to} f$ ($w^*-\lim f_n = f$) نشان می دهیم .

قضیه ۱-۱-۲۱. (باناخ آلاغلو) [23] اگر X یک فضای نرم دار باشد، آنگاه گوی یکه بسته $S^* = \{\Lambda \in X^* : \|\Lambda\| \leq ۱\}$ از X^* در توپولوژی ضعیف * ، فشرده است .

اثبات. رجوع کنید به [۲۴] . ■

گزاره ۱-۱-۲۲. *فرض کنیم X ، Y دو فضای نرم دار باشند. به ازای هر $T \in B(X,Y)$ ، نگاشت یکتای $T^* \in B(Y^*, X^*)$ ، به نام* ***الحاقی*** *[24] T ، نظیر می شود که به ازای هر $x \in X$ و هر $y^* \in Y^*$،*

$$< Tx, y^* >=< x, T^*y^* >$$

به علاوه ، شرط $\|T^*\| = \|T\|$ نیز برقرار است .

اثبات. *قضیه* ۴.۱۰ [۲۴] . ■

قضیه ۱-۱-۲۳. (گلدشتاین) [25] :فرض کنیم E یک فضای باناخ باشد، برای هر $\phi \in E^{**}$ توری مانند (x_α) در E هست که برای هر α، $\|x_\alpha\| \leq \|\phi\|$ و $x_\alpha \xrightarrow{w^*} \phi$. به عبارت دیگر E در E^{**} با w^* - توپولوژی، چگال است .

اثبات. *رجوع کنید به* [۲۴] . ■

---

[23] Banach Alaoglu

[24] Adjoint

[25] Goldstine theorem

قضیه ۱-۱-۲۴. (مازور) [۲۶] : فرض کنیم X یک فضای باناخ و E یک زیر مجموعه محدب از X باشد، آنگاه $\overline{A}^{w} = \overline{A}^{\|\cdot\|}$.

اثبات. رجوع کنید به [۲۴] . ■

[۲۶] Mazor theorem