بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش جبر

ایده‌آل‌های اول فازی و رادیکال‌های فازی در نیم‌گروه‌های مرتب

نگارش

سمیه حدادی

استاد راهنما

دکتر محسن اصغری لاریمی

استاد مشاور

دکتر سید مصطفی طاهری

تیرماه ۱۳۹۰

تعهدنامه پژوهشی

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان‌نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه گلستان مبین بخشی از فعالیت‌های علمی- پژوهشی بوده و هم‌چنین با استفاده از اعتبارات دانشگاه انجام می‌شود، بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش‌آموختگان این دانشگاه نسبت به موارد ذیل متعهد می‌شوند:

۱) قبل از چاپ پایان‌نامه (رساله) خود، مراتب را قبلا بطور کتبی به مدیریت تحصیلات تکمیلی دانشگاه اطلاع داده و کسب اجازه نمایند.

۲) در انتشار نتایج پایان‌نامه (رساله) در قالب مقاله، همایش، اختراع و اکتشاف و سایر موارد ذکر نام دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی گرگان الزامی است.

۳) انتشار نتایج پایان‌نامه (رساله) باید با اطلاع و کسب اجازه از استاد راهنما صورت گیرد.

اینجانب **سمیه حدادی** دانشجوی **رشته ریاضی محض گرایش جبر** مقطع **کارشناسی‌ارشد** تعهدات فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده و به آن ملتزم می‌شوم.

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

که بهار زندگی خود را وقفم نمودند

تقدیر و تشکر

در اینجا لازم می‌دانم که از راهنمایی‌ها و کوشش‌های فراوان استاد راهنمای دلسوزم جناب آقای

دکتر محسن اصغری لاریمی

و هم‌چنین از راهنمایی‌های خوب استاد مشاور جناب آقای

دکتر سید مصطفی طاهری

که در تدوین و نگارش پایان‌نامه مساعدت فراوانی داشتند، تشکر و قدردانی نمایم.

سمیه حدادی

تیرماه ۱۳۹۰

چکیده

این پایان‌نامه در پنج فصل تنظیم گردیده است که در آن نیم‌گروه‌های مرتب، ایده‌آل‌های فازی اول و رادیکال‌های فازی مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد.

در فصل اول، تعاریف و پیش‌نیازهای مورد نیاز برای فصل‌های آتی ارائه گردیده است.

در فصل دوم، چند دسته از نیم‌گروه‌های مرتب را با استفاده از ایده‌آل‌ها، دو–ایده‌آل‌ها، ایده‌آل‌های فازی و دو–ایده‌آل‌های فازی مشخص می‌کنیم.

در فصل سوم، ابتدا نقطه فازی مرتب و زیرمجموعه فازی قویاً محدب را معرفی کرده و نشان می‌دهیم که هر زیرمجموعه فازی قویاً محدب A را می‌توان به صورت اجتماع تمام نقاط فازی مرتب متعلق به A نوشت. سپس، گزاره‌ای که به مشخص‌سازی ایده‌آل‌های فازی تولید شده توسط نقاط فازی مرتب می‌پردازد را ارائه می‌دهیم.

در فصل چهارم، چند دسته از ایده‌آل‌های فازی مانند ایده‌آل فازی اول، کاملاً اول، کاملاً و ضعیفاً اول و ایده‌آل فازی کاملاً نیمه‌اول را معرفی و سپس روابط بین آن‌ها را بیان می‌کنیم.

سرانجام در فصل پنجم، رادیکال‌های فازی را معرفی کرده و نتایج متعددی در ارتباط با این مفهوم ارائه می‌کنیم.

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

مقدمه .... ج

فصل اول. پیش‌نیازها ۱

۱-۱ نیم‌گروه‌های مرتب ۲

۱-۲ ایده‌آل‌ها ٤

۱-۳ ایده‌آل‌های فازی ۸

فصل دوم. مشخص‌سازی چند دسته از نیم‌گروه‌های مرتب بر حسب ایده‌آل‌های فازی ۲۳

۲-۱ مشخص‌سازی نیم‌گروه مرتب منظم ۲٤

۲-۲ مشخص‌سازی نیم‌گروه مرتب درون منظم ۳۲

۲-۳ مشخص‌سازی نیم‌گروه مرتب منظم و درون منظم ۳٦

۲-٤ مشخص‌سازی نیم‌گروه مرتب ضعیفاً منظم راست ۳۷

فصل سوم. ایده‌آل فازی تولید شده توسط نقطه فازی مرتب ٤۷

۳-۱ زیرمجموعه فازی قویاً محدب ٤۹

۳-۲ مشخص‌سازی ایده‌آل‌های فازی تولیدشده توسط نقاط فازی مرتب ۵۹

فصل چهارم. انواع ایده‌آل‌های فازی ٦۷

٤-۱ ایده‌آل فازی اول ٦۸

٤-۲ ایده‌آل فازی ضعیفاً اول ۷۹

٤-۳ ایده‌آل فازی کاملاً اول ۸۵

٤-٤ ایده‌آل فازی کاملاً و ضعیفاً اول ۸٦

٤-۵ ایده‌آل فازی کاملاً نیمه‌اول ۸۸

٤-٦ روابط بین ایده‌آل‌های فازی ۹۱

فصل پنجم. رادیکال‌های فازی ۹۷

فهرست منابع ۱۰۷

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۱۰۹

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۱۱۲

چکیده به انگلیسی ۱۱۵

مقدمه

یکی از رویکردهای غیرکلاسیک به ساختارهای ریاضی نظریه فازی آنهاست. ساخت و چیدن دوباره آن‌ها بر مبنای نظریه فازی ممکن است بسیار متنوع باشد. این تنوع در چیدن و دوباره ساختن مفاهیم در نظریه فازی از تنوع در سلیقه‌ها ناشی می‌شود. قدرتمند بودن این ساخت‌ها از روی زیبایی و عمقی که در نتایج غیرکلاسیکی که از آن بدست می‌آید فهمیده می‌شود.

نظریه فازی در سال ۱۹٦۵ توسط پروفسور لطفی عسکرزاده با مقاله‌ای روی مجموعه‌های فازی شروع شد. پس از آن ریاضیات فازی شکل گرفت و واژه فازی در شاخه‌های مختلف ریاضیات اهمیت ویژه‌ای پیدا کرد.

در سال ۱۹۷۱ زیرگروه فازی توسط روسن فلد[1] معرفی شد، [۱۸]. در ادامه کارهای روسن‌فلد، محققان زیادی به توسعه دادن مفاهیم و نتایج جبر محض در محیط فازی پرداختند.

کروکی[2] در [۱۳-۱۰] بعضی از ویژگی‌های ایده‌آل‌های فازی، دو- ایده‌آل‌های فازی و دو- ایده‌آل‌های تعمیم یافته فازی در یک نیم‌گروه (بدون ترتیب) را مورد مطالعه و بررسی قرار داده است. از دیگر کارهای وی می‌توان به مشخص کردن نیم‌گروه منظم با استفاده از ایده‌آل‌های فازی اشاره نمود.

خی[3] در [۲۲,۲۳] مفاهیم ایده‌آل‌های فازی ضعیفاً اول، کاملاً اول و ایده‌آل‌های فازی کاملاً و ضعیفاً اول نیم‌گروه S را معرفی نموده و روابط بین این ایده‌آل‌ها را نشان داده است. ایده‌آل‌های فازی نیمه‌اول در نیم‌گروه‌ها توسط کروکی در [۱۳] و ایده‌آل‌های فازی اول توسط کهایوپلو[4] در [۱] مورد مطالعه قرار گرفته است.

از جمله منابعی که در آن توسعه نظریه مجموعه‌های فازی روی نیم‌گروه‌های مرتب را نشان می‌دهند می‌توان به [۹-۲] اشاره نمود.

در فصل اول این پایان‌نامه تعاریف و پیش‌نیازهای مورد نیاز در فصل‌های آتی را ارائه داده‌ایم.

---

1 - Rosenfeld
2 - Kuroki
3 - Xie
4 - Kehayopulu

در فصل دوم، به مشخص‌سازی چند دسته از نیم‌گروه‌های مرتب با استفاده از ایده‌آل‌های فازی پرداخته‌ایم.

در فصل سوم، ابتدا نقطه فازی مرتب و زیرمجموعه فازی قویاً محدب را تعریف کرده، سپس با بیان گزاره‌ای ایده‌آل فازی تولید شده توسط نقطه فازی مرتب را مشخص می‌کنیم.

در فصل چهارم، به طور مفصل به مطالعه چند دسته از ایده‌آل‌های فازی در نیم‌گروه مرتب S پرداخته‌ایم. در این فصل نشان می‌دهیم که ایده‌آل فازی P از نیم‌گروه مرتب S، اول است اگر و فقط اگر:

(۱) $\left|\mathrm{Im}(P)\right| \leq ۲$

(۲) $P_۱ \neq \varnothing$ و $P_۱$ ایده‌آل اول S باشد.

هم‌چنین، ایده‌آل‌های فازی ضعیفاً اول، کاملاً اول، کاملاً نیمه‌اول و ایده‌آل‌های فازی کاملاً و ضعیفاً اول را معرفی کرده و روابط بین آن‌ها را نشان می‌دهیم. بعلاوه، ایده‌آل‌های فازی ضعیفاً اول، کاملاً نیمه‌اول و ایده‌آل‌های فازی کاملاً و ضعیفاً اول را توسط مجموعه ترازشان مشخص می‌کنیم.

سرانجام در فصل پنجم رادیکال‌های فازی نیم‌گروه مرتب S را مورد مطالعه و بررسی قرار داده و ثابت می‌کنیم که رادیکال فازی هر ایده‌آل فازی کاملاً نیمه‌اول f را می‌توان به صورت اشتراک تمام ایده‌آل‌های فازی کاملاً و ضعیفاً اول شامل f نوشت و به عنوان یک نتیجه، قضیه رادیکال اول فازی را بدست می‌آوریم.

به عنوان یک کاربرد از نتایج این پایان‌نامه می‌توان به تشابه این نتایج در نیم‌گروه‌ها (بدون ترتیب) اشاره نمود.

فصل اول

پیش نیازها

در این فصل تعاریف و پیش‌نیازهایی که در فصل‌های آتی مورد استفاده قرار خواهند گرفت ارائه می‌گردد.

۱-۱ نیم‌گروه‌های مرتب

۱-۱-۱ تعریف. فرض کنید S یک مجموعه غیرتهی و $\cdot : S\times S\to S$ یک عمل روی S باشد. در این صورت $(S,\cdot)$ را یک نیم‌گروه می‌نامیم هرگاه برای هر $x,y,z\in S$ داشته باشیم:

$$x.(y.z)=(x.y).z$$

۱-۱-۲ تعریف. نیم‌گروه $(S,\cdot)$ یک نیم‌گروه مرتب است هرگاه دارای یک رابطه ترتیب "$\le$" باشد، به طوری که برای هر $x,a,b\in S$،

اگر $a\le b$ آن‌گاه $x.a\le x.b$ و $a.x\le b.x$.

۱-۱-۳ مثال. مجموعه $S=\{a,b,c,d,e\}$ به همراه عمل و رابطه ترتیب تعریف شده در جدول زیر یک نیم‌گروه مرتب است.

.	a	b	c	d	e
a	a	d	a	d	d
b	a	b	a	d	d
c	a	d	c	d	e
d	a	d	a	d	d
e	a	d	c	d	e

$$\le:=\{(a,a),(a,c),(a,d),(a,e),(b,b),(b,d),(b,e),(c,c),(c,e),(d,d),(d,e),(e,e)\}$$

۱-۱-٤ تعریف. فرض کنید S یک نیم‌گروه مرتب باشد. برای $H \subseteq S$، نماد $(H]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(H] := \{t \in S \mid \exists h \in H; t \leq h\}$$

۱-۱-۵ تعریف. اگر $A, B \subseteq S$ آن‌گاه AB را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$AB := \{ab \mid a \in A, b \in B\}$$

۱-۱-٦ لم. برای زیرمجموعه‌های A و B از نیم‌گروه مرتب S داریم:

(الف) $A \subseteq (A]$ و $(A] = ((A]]$.

(ب) اگر $A \subseteq B$ آن‌گاه $(A] \subseteq (B]$.

(ج) $(A](B] \subseteq (AB]$.

(د) $((A](B]] = (AB]$.

اثبات. (الف) [قسمت اول] فرض کنید $t \in A$. در این صورت، با توجه به تعریف $(A]$ و این که $t \leq t$ نتیجه می‌شود که $t \in (A]$. بنابراین، $A \subseteq (A]$.

[قسمت دوم]

$$\begin{aligned} ((A]] &= \{t \in S \mid \exists h \in (A]; t \leq h\} \\ &= \{t \in S \mid \exists a \in A ; t \leq h \leq a\} \\ &= \{t \in S \mid \exists a \in A ; t \leq a\} = (A] \end{aligned}$$

(ب) فرض کنید $A \subseteq B$. در این صورت، با استفاده از تعریف داریم:

$$\begin{aligned} (A] &= \{t \in S \mid \exists h \in A ; t \leq h\} \\ &\subseteq \{t \in S \mid \exists h' \in B ; t \leq h'\} = (B] \end{aligned}$$

(ج) از تعریف ۱-۱-٤ و ۱-۱-۵ داریم:

$$(A](B] = \{ab \in S \mid a \in (A], b \in (B]\}$$
$$= \{ab \mid a,b \in S; \exists a' \in A, \exists b' \in B; a \le a', b \le b'\}$$
$$\subseteq \{ab \mid a,b \in S; \exists a' \in A, \exists b' \in B; ab \le a'b' \in AB\} = (AB]$$

لذا، $(A](B] \subseteq (AB]$.

(د) بنا به تعریف ۱-۱-٤ داریم:

$$((A](B]] = \{x \in S \mid \exists h \in (A](B]; x \le h\}$$

حال بنا به قسمت (ج) قضیه چون $(A](B] \subseteq (AB]$ می‌توان نوشت:

$$((A](B]] = \{x \in S \mid \exists h' \in (AB]; x \le h'\} = ((AB]] = (AB]$$

و بدین ترتیب اثبات لم کامل می‌شود. ■

۱-۲ ایده‌آل‌های نیم‌گروه مرتب

۱-۲-۱ تعریف. فرض کنید S یک نیم‌گروه مرتب باشد. $\varnothing \neq A \subseteq S$ را ایده‌آل راست (چپ) S می‌نامیم هرگاه شرایط زیر را داشته باشد:

(۱) $AS \subseteq A$، ($SA \subseteq A$).

(۲) اگر $a \in A$ و $S \ni b \le a$ آن‌گاه $b \in A$.

اگر A هم ایده‌آل چپ و هم ایده‌آل راست S باشد ایده‌آل (ایده‌آل دوطرفه) S نامیده می‌شود.

۱-۲-۲ تعریف. فرض کنید S یک نیم‌گروه مرتب باشد و $\varnothing \neq A \subseteq S$. اگر $A^{2} \subseteq A$ آن‌گاه A را زیرنیم‌گروه S می‌نامیم.

۱-۲-۳ تعریف. فرض کنید S یک نیم‌گروه مرتب باشد. زیرنیم‌گروه B از S را دو- ایده‌آل آن می‌نامیم هرگاه شرایط زیر را داشته باشد:

(۱) $BSB \subseteq B$.

(۲) اگر $a \in B$ و $S \ni b \leq a$ آن‌گاه $b \in B$.

۱-۲-٤ تعریف. فرض کنید S یک نیم‌گروه مرتب باشد. $\varnothing \neq Q \subseteq S$ را شبه ایده‌آل S می‌نامیم هرگاه شرایط زیر را داشته باشد:

(۱) $(QS] \cap (SQ] \subseteq Q$.

(۲) اگر $a \in Q$ و $S \ni b \leq a$ آن‌گاه $b \in Q$.

۱-۲-۵ لم. فرض کنید S نیم‌گروه مرتب باشد. در این صورت، هر شبه ایده‌آل Q از S یک دو- ایده‌آل آن است.

اثبات. فرض کنید Q یک شبه ایده‌آل S باشد. ثابت می‌کنیم که

(۱) Q یک زیرنیم‌گروه S است.

(۲) $QSQ \subseteq Q$.

(۳) اگر $a \in Q$ و $S \ni b \leq a$ آن‌گاه $b \in Q$.

اثبات (۱)

$$Q^{2} = Q.Q \subseteq QS \cap SQ \subseteq (QS] \cap (SQ] \subseteq Q$$

اثبات (۲)

$$QSQ \subseteq QS \cap SQ \subseteq (QS] \cap (SQ] \subseteq Q$$

اثبات (۳) به وضوح از تعریف شبه ایده‌آل بدست می‌آید. ■

۱-۲-٦ تعریف[۵]. ایده‌آل چپ، راست، دوطرفه و دو- ایده‌آل تولیدشده توسط $a \in S$ را به ترتیب با $L(a)$، $R(a)$، $I(a)$ و $B(a)$ نشان داده و داریم:

$$L(a) = (a \cup Sa]$$
$$R(a) = (a \cup aS]$$
$$I(a) = (a \cup Sa \cup aS \cup SaS]$$
$$B(a) = (a \cup a^2 \cup aSa]$$

۱-۲-۷ تعریف. ایده‌آل I از نیم‌گروه مرتب S را ایده‌آل اول می‌نامیم هرگاه برای ایده‌آل‌های A و B از S، اگر $AB \subseteq I$ آن‌گاه $A \subseteq I$ یا $B \subseteq I$.

۱-۲-۸ تعریف. ایده‌آل I از نیم‌گروه مرتب S را ایده‌آل کاملاً اول می‌نامیم هرگاه برای عناصر a و b از S، اگر $ab \in I$ آن‌گاه $a \in I$ یا $b \in I$.

۱-۲-۹ تعریف. ایده‌آل I از نیم‌گروه مرتب S را ایده‌آل کاملاً نیمه‌اول می‌نامیم هرگاه برای هر عنصر a از S، اگر $a^2 \in I$ آن‌گاه $a \in I$.

۱-۲-۱۰ لم. (الف) برای هر ایده‌آل چپ (راست، دو- ایده‌آل) T از S داریم:

$$(T] = T$$