بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی

(گرایش کاربردی)

حل دستگاه معادلات انتگرال ولترا با روش تکرار وردشی

از:

ساجده زارعی

استاد راهنما:

دکتر جعفر بی آزار

استاد مشاور:

دکتر زینب آیاتی

بهمن‌ماه ۱۳۹۲

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

تقدیر و تشکر

«کسی که حمد خالصانه خود را به سوی خدا فرستد پروردگار بزرگ، برترین مصلحت را به سویش فرو خواهد فرستاد.»

حضرت زهرا(س)

حمد و سپاس بیکران یزدان یکتا و بخشنده را که در زیر سایه محبت های بی دریغش قادر به اتمام این کار شدم. در این جا بر خود واجب می دانم مراتب قدردانی و سپاس خود را از تمام کسانی که در این راه مرا مورد لطف و عنایت خود قرار دادند اعلام دارم.

از استاد راهنمای عزیز و گرانقدرم جناب آقای پروفسور جعفر بی آزار که در طول سال های به یاد ماندنی شاگردی شان با راهنمایی های مفید و سودمند یاری ام کردند و تجربیات ارزشمند خود را در اختیارم نهادند صمیمانه سپاس گزارم.

از اساتید محترم جناب آقایان دکتر نصیر تقی زاده و دکتر حسین امینی خواه که زحمت داوری این پایان نامه را متقبل شدند کمال تشکر را دارم.

از جناب آقای دکتر مازیار صلاحی که به عنوان نماینده تحصیلات تکمیلی در جلسه دفاع حضور داشتند و از مدیر محترم گروه ریاضی کاربردی آقای دکتر محمد رضا یاقوتی، همچنین از سایر اساتید محترم دانشکده علوم ریاضی دانشگاه گیلان که در طول این دوره افتخار شاگردی این بزرگواران را داشتم سپاس گزارم.

از استاد مشاور محترم و ارجمندم خانم دکتر زینب آیاتی که همواره در نهایت مهربانی و حوصله راه گشایم بودند صمیمانه سپاس گزارم.

در پایان از زحمات بی دریغ خانواده عزیزم که در تمام مراحل زندگی حامی من بوده اند و از دوستان بزرگوارم که هریک به نحوی اینجانب را مورد لطف قرار داده اند قدردانی می کنم.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول: تعاریف و مفاهیم اساسی

فصل دوم: معرفی روش تکرار وردشی

فصل سوم: حل معادلات و دستگاه معادلات انتگرال با روش تکرار وردشی

فصل چهارم: کاربرد نرم افزار میپل در حل معادلات

فهرست جدول‌ها

عنوان **صفحه**

فهرست شکل‌ها

عنوان **صفحه**

چکیده

حل دستگاه معادلات انتگرال ولترا با روش تکرار وردشی

ساجده زارعی

در این پایان‌نامه روش تکرار وردشی را که توسط جی-هوان خی در سال ۱۹۹۸ برای حل معادلات تابعی پیشنهاد شده است، معرفی می‌کنیم. در فصل اول پیش‌زمینه‌های کار بیان می‌شود، در فصل دوم به معرفی روش می‌پردازیم، و همگرایی آن نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد. در فصل سوم روش تکرار وردشی برای حل دستگاه معادلات انتگرال تعمیم داده می‌شود. برای نشان دادن قابلیت و کارایی روش مثال‌هایی ارائه می‌شود و نتایج به دست آمده با جواب دقیق معادلات مقایسه می‌شود. در ادامه روش تکرار وردشی ترکیب شده با چندجمله ای های آدومین را برای حل معادلات انتگرال ولترا به کار می‌بریم. در فصل چهارم برنامه‌های نرم‌افزار میپل ۱۵ را برای حل معادلات انتگرال ارائه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: معادلات تابعی، روش تکرار وردشی، ضریب لاگرانژ کلی، تابع تصحیح، دستگاه معادلات انتگرال ولترا، چندجمله‌ای‌های آدومین.

Abstract

Variational iteration method for solving systems of volterra integral equations

Sajedeh Zarei

In this thesis, Variational iteration method, proposed by Ji-Houan He, in 1998 for solving functional equations, is introduced. In the first chapter background of the method is introduced. In the second chapter the method is introduced and convergence of the method is also investigated. In the third chapter VIM method is extended to solve systems of integral equations and Adomian polynomials are implemented in VIM for finding a solution of Volterra integral equations. To demonstrate the capabilities and the efficiency of this method and to illustrate the method some examples are presented and the results are compared with exact solutions. For computations maple 15 is used.

Keywords: Functional equations, Variational iteration method, General Lagrange multiplier, Correction functional, System of Volterra integral equations, Adomian polynomials.

پیشگفتار

از جمله روش‌هایی که در چند سال اخیر برای حل معادلات تابعی به طور گسترده مورد استفاده قرار می‌گیرد، روش تکرار وردشی است که بر اساس حساب وردش‌ها به دست آمده است. این روش توسط جی- هوان خی در سال ۱۹۹۸ ارائه شد و تا کنون برای حل بسیاری از معادلات تابعی به کار رفته است. در این روش یک معادلهٔ تابعی به یک دنبالهٔ بازگشتی از توابع تبدیل می‌شود و حد این دنباله به عنوان جواب معادلهٔ تابعی در نظر گرفته می‌شود.

در این پایان‌نامه قصد داریم روش تکرار وردشی را برای حل دستگاه معادلات انتگرال و انتگرال- دیفرانسیل به کار ببریم و نتایج حاصل را با جواب دقیق مقایسه کنیم.

این پایان‌نامه از چهار فصل به صورت زیر تشکیل شده است.

در فصل اول برخی از مفاهیم اساسی و تعاریف در معادلات انتگرال ارائه می‌شود.

در فصل دوم به معرفی روش تکرار وردشی پرداخته می‌شود و همگرایی روش نیز با قضیهٔ نقطه ثابت باناخ و ارائهٔ چند مثال مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در فصل سوم به حل معادلات و دستگاه معادلات انتگرال و دستگاه معادلات انتگرال- دیفرانسیل با استفاده از روش تکرار وردشی پرداخته می‌شود و با ارائهٔ مثال‌هایی کارایی روش نشان داده می‌شود و در ادامه روش تکرار وردشی ترکیب شده با چندجمله‌ای‌های آدومین را برای حل معادلات انتگرال ولترا به کار می‌بریم.

در فصل چهارم برنامه‌هایی که با استفاده از امکانات نرم‌افزار میپل به منظور انجام محاسبات تهیه شده است، ارائه می‌شود.

فصل اول

تعاریف و مفاهیم اساسی

۱-۱ مقدمه

یکی از شاخه‌های علم ریاضی که کاربردهای فراوانی در سایر علوم دارد، معادلات انتگرال است. معادلات انتگرال در مباحث بسیاری از قبیل فیزیک، بیولوژی، شیمی، و مهندسی ظاهر می‌شوند [۲,۱]. این معادلات از سال‌ها قبل در ریاضی پدیدار شده بود ولی توسعهٔ نظریه معادلات انتگرال از اواخر قرن نوزده آغاز شد. عبارت معادلات انتگرال برای اولین بار در سال ۱۸۸۸ توسط ریموند به معادلاتی گفته می‌شد که در آن تابع مجهول زیر علامت انتگرال باشد. لاپلاس بدون استفاده از این اسم در سال ۱۷۸۲ تبدیل انتگرالی $f(x)=\int_0^x e^{-sx}u(s)ds$ را برای حل معادلات تفاضلی خطی و معادلات دیفرانسیل به کار برد. در سال ۱۸۲۶ پواسون در مطالعهٔ نظریه مغناطیس به معادله‌هایی به صورت زیر رسید

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_0^x k(x-s)u(s)ds.$$

در حدود سال‌های۱۹۰۳ -۱۹۰۰ بود که یک ریاضی‌دان ایتالیایی به نام ولترا[۱] به بحث جامعی روی معادلات انتگرال پرداخت و همچنین یک ریاضی‌دان سوئدی به نام فردهلم[۲] در همان سال‌ها کارهای مشهور و جالب خود را ارائه کرد. از آن زمان، تا کنون معادلات انتگرال، موضوع تحقیقات ریاضی‌دانان زیادی بوده است، زیرا معادلات انتگرال برای مدل‌سازی ریاضی بسیاری از مسائل طبیعی نظیر مسائل مربوط به زلزله، پزشکی، و مهندسی مورد توجه واقع می‌شوند. همچنین عملگرها، تبدیل‌ها، و معادلات انتگرال ابزار مناسبی برای مطالعه معادلات دیفرانسیل می‌باشند.

۲-۱ تعریف معادله انتگرال

یک معادلهٔ انتگرال[۳] معادله‌ای است که در آن تابع مجهول $u(x)$ زیر علامت انتگرال قرار دارد. نمونه‌ای از یک معادلهٔ انتگرال که در آن $u(x)$ تابعی مجهول است، به صورت زیر می‌باشد

$$u(x)=f(x)+\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)G(u(t))dt. \qquad (۱-۱)$$

[۱]. Volterra
[۲]. Fredholm
[۳]. Integral equation

در معادلهٔ (۱-۱)، $k(x,t)$ هسته معادله انتگرال نامیده می‌شود و $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ حدود انتگرال‌گیری هستند. باید توجه کرد که هستهٔ معادله انتگرال و تابع $f(x)$ از قبل معلوم هستند. هدف از حل یک معادله انتگرال تعیین تابع مجهول $u(x)$ است به گونه‌ای که در رابطه (۱-۱) صدق کند. برای این کار روش‌های گوناگونی به کار برده می‌شود از جمله روش تکرار وردشی[۴]، روش آشفتگی هوموتوپی[۵]، روش تجزیهٔ آدومین[۶] و غیره. به طور کلی همیشه امکان تعیین جواب تحلیلی برای معادلات انتگرال وجود ندارد و در این حالت به دنبال روش‌هایی هستیم که بتوان تقریبی برای جواب به دست آورد[۶-۳].

در مثال زیر بر نحوهٔ تبدیل یک مسئلهٔ مقدار اولیه به یک معادلهٔ انتگرال پرداخته می‌شود.

مثال (۱–۱): مسئله‌ی مقدار اولیهٔ زیر را در نظر بگیرید.

$$u'(x) = 2xu(x), \qquad x \geq 0. \tag{۲-۱}$$

این معادله در شرط اولیهٔ $u(0)=1$ صدق می‌کند.

معادلهٔ (۱-۲) را می‌توان به آسانی با به کارگیری روش جداسازی متغیرها حل نمود. در نهایت جواب این معادله با توجه به شرط اولیه به صورت زیر خواهد بود

$$u(x) = e^{x^2}, \tag{۳-۱}$$

حال اگر از طرفین (۱-۲) انتگرال گرفته و از شرط اولیه استفاده شود، داریم

$$\int_0^x u'(t)dt = \int_0^x 2tu(t)dt, \tag{۴-۱}$$

$$u(x) = 1 + \int_0^x 2tu(t)dt. \tag{۵-۱}$$

از مقایسهٔ طرفین روابط (۱-۱) و (۱-۵) مشخص می‌شود که (۱-۵) یک معادله انتگرال با هستهٔ $k(x,t)=2t$ و تابع $f(x)=1$ است.

[۴]. Variational iteration method
[۵]. Homotopy perturbation method
[۶]. Adomian decomposition method

۱-۲-۱ تعریف

اگر در یک معادله انتگرال تابع مجهول فقط در زیر علامت انتگرال ظاهر شود، آن را معادله انتگرال نوع اول[۷] و اگر تابع مجهول هم در زیر انتگرال و هم در بیرون انتگرال وجود داشته باشد، آن را معادله انتگرال نوع دوم می‌نامند. از دو معادله زیر، اولی معادله انتگرال از نوع اول و دومی معادله انتگرال از نوع دوم است.

$$\int_0^x ((x^2 - t^2 - 1)u(t) + (2x - t)v(t))dt = \frac{2}{15}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2,$$
$$u(x) = \cos x - \sin x + 2\int_0^x \sin(x - t)u(t)dt.$$

۱-۲-۲ تعریف

اگر در یک معادله انتگرال، تابع مجهول زیر علامت انتگرال خطی باشد معادله انتگرال خطی و در غیر این صورت معادله انتگرال را غیرخطی می‌نامند. برای مثال از دو معادله‌ای که در زیر آورده شده‌اند اولی معادله‌ای خطی و دومی غیرخطی است.

$$u(x) = x + \int_0^x xtu(t)dt,$$
$$u(x) = f(x) + \int_0^1 x^3 t^5 u^2(t)dt.$$

۱-۲-۳ تعریف

معادله انتگرال (۱-۱) را در نظر می‌گیریم. اگر برای این معادله انتگرال داشته باشیم $f(x) = 0$، آن‌گاه معادلهٔ حاصل را یک معادله انتگرال همگن[۸] و در غیر این صورت آن را غیرهمگن می‌نامند. بر این اساس معادله زیر همگن می‌باشد.

$$u(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)u(t)dt.$$

۱-۳ هسته‌های انتگرالی متداول

در این قسمت به معرفی برخی از هسته‌های انتگرالی که معمولاً در معادله‌های مختلف ظاهر می‌شوند، پرداخته می‌شود.

[۷] . Integral equation of the first kind
[۸] . Homogeneous

۱-۳-۱ هسته متقارن

هستهٔ متقارن[۹] هسته‌ای است که جابه‌جایی متغیرها در آن هسته جدیدی نمی‌سازد. به عبارت دیگر داریم

$$k(x,t)=k(t,x).$$

مانند معادله انتگرال زیر

$$u(x)=x+\int_0^x xtu(t)dt.$$

۲-۳-۱ هسته جداپذیر

اگر برای هستهٔ $k(x,t)$، داشته باشیم

$$k(x,t)=\sum_{k=1}^{n} g_k(x)h_k(t),$$

در این صورت هسته را جداپذیر[۱۰] می‌نامند. مانند معادلهٔ زیر

$$x(s)=y(s)+\int_0^1 \sin st\, x(t)dt,$$
$$\bar{x}(s)=y(s)+\int_0^1 (st-\frac{s^3t^3}{6})\bar{x}(t)dt.$$

۳-۳-۱ هستهٔ متعلق به فضای L^2

هستهٔ $k(x,t)$ را متعلق به فضای L^2 می‌گوییم و می‌نویسیم $k(x,t)\in L^2(a,b)$، در صورتی که

۱) $\int_a^b\int_a^b |k(x,t)|^2\, dtdx<\infty,$

۲) $\forall x \int_a^b |k(x,t)|^2\, dt<\infty,$

۳) $\forall t \int_a^b |k(x,t)|^2\, dt<\infty.$

---

۹ .Symmetric
۱۰ .Degenerate

۱-۳-۴ هسته حلال

پارامتری چون λ را که ممکن است یک متغیر مختلط هم باشد، در نظر بگیرید.

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,t)u(t)dt.$$

قرار می‌دهیم

$$K(u(x))=\int_a^b k(x,t)u(t)dt.$$

در این صورت داریم

$$u(x)=f(x)+\lambda K(u(x)),$$

و یا

$$(I-\lambda K)u(x)=f(x).$$

با جای‌گذاری $L=I-\lambda K$، داریم

$$L^{-1}=(I-\lambda K)^{-1}=I+\lambda H.$$

که در این رابطه به عملگر H عملگر حلال می‌گویند. به طور معادل می‌توان تعریف کرد

$$H-K=\lambda KH=\lambda HK.$$

همچنین عملگر H را می‌توان به صورت زیر با سری نیومن نشان داد.

$$L^{-1}=(I-\lambda K)^{-1}=\frac{1}{I-\lambda K}=I+\lambda K+\lambda^2K^2+\ldots+\lambda^nK^n+\ldots=I+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^nK^n.$$

بنابراین

$$\lambda H=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^nK^n.$$

در نتیجه رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$\lambda HK = K\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n K^n,$$

در نتیجه

$$H = K + K\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n K^n.$$

از عبارت اخیر نتایج زیر حاصل می‌شود.

۱) $\lim_{\lambda\to 0} H_\lambda = K,$

۲) $H_i \equiv \lambda^i K^{i+1}.$

پس عملگر حلال دارای یک هستهٔ متناظر است که به آن هستهٔ حلال می‌گویند و با $H_\lambda(x,t)$ نشان داده می‌شود[۷].

۱-۳-۵ هسته الحاقی

گاهی میدان کار اعداد مختلط است و بحث هسته‌های الحاقی[۱۱]به میان می‌آید. اگر $k(s,t)$ هسته انتگرال در فضای L^2 باشد، هستهٔ الحاقی آن یعنی $k^*(s,t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$k^*(s,t) = \overline{k(x,t)},$$

که دارای خواص زیر است

۱) $(k^*)^* = k,$

۲) $\|k^*\| = k,$

۳) $(\lambda k)^* = \lambda^* k^*,$

۴) $(k_1 + k_2)^* = k_1^* + k_2^*,$

۵) $(k_1 k_2)^* = k_2^* k_1^*.$

[۱۱]. Adjoint

همچنین اگر $k^*(x,t)=k(x,t)$، در این صورت k را هرمیتی[۱۲] می‌گویند و اگر $-k^*(x,t)=k(x,t)$، k را پادهرمیتی[۱۳] می‌نامند.

۱-۴ تقسیم بندی معادلات انتگرال

معادلات انتگرال خطی و غیر خطی را برحسب ساختار می‌توان به دو گروه زیر دسته بندی کرد

الف) معادلات انتگرال فردهلم

ب) معادلات انتگرال ولترا

در ادامه به شرح هر دسته می پردازیم.

۱-۴-۱ معادلات انتگرال فردهلم

در حالت کلی معادلات انتگرال فردهلم به دو گروه خطی و غیرخطی تقسیم می‌شوند و هر یک از معادلات خطی و غیر خطی نیز به سه نوع مختلف تقسیم بندی می‌شوند.

صورت کلی این دسته از معادلات انتگرال را که در آن‌ها حدود بالا و پایین انتگرال‌گیری به ترتیب اعداد ثابت a و b هستند، می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت.

$$tu(x)=f(x)+\int_a^b k(x,t)u(t)dt, \qquad a\le x\le b. \qquad (۱-۶)$$

برای این معادله انتگرال حالت‌های زیر را داریم

الف) اگر $t=0$، معادله (۱-۶) به معادله انتگرال فردهلم نوع اول تبدیل می‌شود

$$f(x)+\int_a^b k(x,t)u(t)dt=0, \qquad a\le x\le b.$$

[۱۲] . Hermitian
[۱۳]. Anti-Hermitian

ب) اگر $t=1$، معادله (۱- ۶) به معادله انتگرال فردهلم نوع دوم تبدیل می‌شود

$$u(x)=f(x)+\int_a^b k(x,t)u(t)dt, \qquad a\le x\le b.$$

پ) اگر $t=1$ و $f(x)\equiv 0$ آن‌گاه، معادله (۱- ۶) به معادله انتگرال فردهلم نوع سوم تبدیل می‌شود که به آن صورت همگن نیز گفته می‌شود.

$$u(x)=\int_a^b k(x,t)u(t)dt, \qquad a\le x\le b.$$

۱-۴-۲ معادلات انتگرال ولترا

معادلات انتگرال ولترا نیز به دو گروه خطی و غیرخطی تقسیم بندی می‌شود که هر یک از معادله‌های خطی به سه نوع و معادلات انتگرال غیرخطی به دو نوع قابل تقسیم‌اند. در معادلات انتگرال ولترا، حداقل یکی از حدود انتگرال‌گیری به صورت تابعی از متغیر مستقل x است و اغلب حد بالای انتگرال به عنوان متغیر انتخاب می‌شود. در حالت کلی یک معادله انتگرال ولترا، را نیز می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت

$$tu(x)=f(x)+\int_a^x k(x,t)u(t)dt. \qquad (۱- ۷)$$

برای این معادله انتگرال داریم

الف) اگر $t=0$ باشد، معادلهٔ انتگرال ولترای نوع اول به دست می‌آید.

$$f(x)+\int_a^x k(x,t)u(t)dt=0.$$

ب) اگر $t=1$ باشد، معادلهٔ انتگرال ولترای نوع دوم به دست می‌آید.

$$u(x)=f(x)+\int_a^x k(x,t)u(t)dt.$$

باید توجه داشت که معادله انتگرال ولترا را می‌توان به عنوان حالت خاصی از معادله انتگرال فردهلم در نظر گرفت به شرطی که هستهٔ معادله انتگرال فردهلم به صورت زیر در نظر گرفته شود

$$\tilde{k}(x,t)=\begin{cases} k(x,t), & t\le x, \\ 0, & t>x. \end{cases}$$