بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه
بخش ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

حل عددی مسائل غیرخطی حساب تغییرات با استفاده از پایه های موجکی

استاد راهنما:
جناب آقای دکتر محمدعلی ولی

استاد مشاور:
جناب آقای دکتر عطاءالله عسکری همّت

مؤلف:
مرضیه ارسلانی

شهریورماه ۸۹

دانشگاه شهید باهنر کرمان

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی – دانشکده ریاضی و رایانه

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود .

دانشجو : مرضیه ارسلانی

استاد راهنما : دکترمحمدعلی ولی

استادمشاور: دکترعطااله عسکری همت

داور ۱ : دکتراکبرنظری

داور ۲ : دکترمحمدرضا مولایی

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه : دکترسید ناصر حسینی

تقدیم به :

اسوه صبر و بردباری پدر ومادر عزیزم ،

بر دستانتان بوسه می زنم و

تا نفس می کشم مدیون محبت های بی دریغتان هستم . . .

تشکر وقدردانی

الهی ادای شکر ترا هیچ زبانی نیست ودریای فضل ترا هیچ کرانی نیست و سر حقیقت تـو بـر هـیچ کس عیان نیست، هدایت بر ما رهی که بهتر ازآن نیست.

سپاس بی کران آفریدگاری را که زیور خرد بر تن آدمی ارزانی داشت تا حصول بـه راه شـریف آدمیت را سهل نماید وستایش، ذات مقدس الهی را که علم و معرفت بخشیده و شکر به درگاهش که به ما توفیق ادامه تحصیل عطا فرمود.

رسم است قدردانی از عزیزانی که از ابتدا یاریگر و همراه من بودنـد و راه‌هـای سـخت را بـر مـن هموار کردنداما نه قلم قادر به نگارش است و نه زبان قادر به بیان. با این حـال، بـا تمـام وجـودم از سخاوت ومهربانی،گذشت و همراهی، صبر واستقامت پدر ومادرعزیزم قدردانی می‌کنم. امیدوارم روزی به زودی این همه را جبران نمایم هر چند می دانم، بردباری آنها را نمی توانم پاسخ دهم.

در پی جملاتی بودم برای تقدیر از کسی کـه دسـتان هـدایتگرش سـایه ای بـود کنـار مـن، در پـی رسیدن به آنچه به اختیار برگزیده ام واو راهنمایم شد. شاید که نه، قطعا نیـاموختم آنچـه را کـه در شأن او بود، اما امروز با همه آنچه در توان دارم زحمات استاد ارجمندم جناب آقای دکتـر ولـی را ارج می نهم، به امید آنکه همیشه سلامت واستوار باشند.

بر خود واجب می دانم که از رهنمودهای بی دریغ استاد مشاورم، جناب آقای دکتر عسکری همت کمال تشکر وقدر دانی نمایم.

ازآقایان دکتر محمد رضا مولایی و دکتر اکبر نظری که داوری این پایان‌نامه راپذیرفتند، صمیمانه متشکرم.

همچنین ازحمایت‌های قطب جبر خطی و بهینه سازی دانشگاه شهید باهنر کرمان سپاسگزارم.

چکیده

یک موجک، تابع $\Psi \in L_2(R)$ با میانگین صفر است، خانواده متشکل از انتقال‌ها واتساع‌های یک موجک، خانواده‌ای از توابع متعامد می باشد، توابع متعامد برای حل مسائل متنوعی ازسیستم های دینا میکی به کاربرده می شوند.

سه دسته از توابع متعامد که کاربرد وسیعی دارند، وجود دارد. اولین دسته شامل مجموعه توابع پایه تکه‌ای ثابت است (مانند والش ، بلاک- پالس و . . .)، دومین دسته شامل مجموعه چند جمله ای‌های متعامد است (مانند لاگور، لژاندر، چبیشف و . . .) و دسته سوم که به طور وسیعی استفاده می شوند، توابع سینوس ـ کسینوس در سری فوریه می‌باشند.

در این پایان‌نامه روشی عددی برای حل مسائل حساب تغییرات بیان می‌شود، این روش بر تقریب‌های موجکی بنا نهاده شده است. مشخصه اصلی این روش تبدیل این مسائل به حل دستگاهی از معادلات جبری است که مسئله را بسیار ساده‌تر می کند.

در فصل اول، ضمن بیان مختصری از تاریخچه پیدایش موجک‌ها، برخی مفاهیم و تعاریف اولیه نیز ارائه شده است. درفصل دوم سه موجک لژاندر، لژاندر خطی و Sine-Cosine وخواص آن‌ها معرفی شده‌اندکه در ادامه روند برای بررسی روش تقریبی مورد استفاده قرار می گیرند، درفصل سوم به بیان ماتریس عملگر انتگرال نظیر سه موجک معرفی شده در فصل دوم می‌پردازیم، فصل چهارم را به بیان مسئله واستفاده از ماتریس عملگر انتگرال درحالت کلی اختصاص داده‌ایم.

در فصل پنجم، با بررسی مثال‌هایی دقت وکارآیی روش بیان شده را نشان خواهیم داد، در آخر نیز نتیجه حاصل از این فرایند تقریبی را بیان می کنیم.

در این پایان‌نامه از نرم‌افزار Matlab برای محاسبات عددی استفاده شده است.

واژه‌های کلیدی: حساب تغییرات، ماتریس عمگر انتگرال، موجک لژاندر، موجک لژاندر خطی، موجک Sine-Cosine

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل چهارم:

فصـل اول:

مقدمـه

آنالیز موجک یکی از دستاوردهای نسبتاً جدید و هیجان‌انگیز ریاضیات محض می‌باشد که مبتنی بر چندین دهه پژوهش در آنالیز هارمونیک است و امروزه کاربردهای مهمی در بسیاری از رشته‌های علوم و مهندسی پیدا کرده است.

در آنالیز موجک نیز مانند آنالیز فوریه با بسط توابع سر و کار داریم، ولی این بسط بر حسب پایه‌های موجکی انجام می‌شود.

۱ـ۱. تاریخچه پیدایش موجک

ایده نمایش یک تابع بر حسب مجموعه کاملی از توابع اولین بار توسط ژوزف فوریه، ریاضیدان و فیزیکدان، بین سال‌های ۱۸۰۶ـ۱۸۰۲ طی رساله‌ای در آکادمی علوم راجع به انتشار حرارت برای نمایش توابع به کار گرفته شد، فوریه نشان داد که یک تابع $f(x)$ را می‌توان با حاصل جمع بی‌نهایت تابع سینوسی و کسینوسی به شکل $Sin(ax)$ و $Cos(ax)$ نمایش داد. پایه‌های فوریه به صورت ابزارهایی اساسی، با کاربردی فوق‌العاده و متواتر در علوم درآمده‌اند.

با گذشت زمان ضعف پایه‌های فوریه، نمایان شد. مثلاً دانشمندان پی بردند که پایه‌های فوریه و نمایش توابع سینوسی در مورد سیگنال‌های پیچیده پردازش تصاویر، نه تنها ایده‌آل نیستند بلکه از شرایط مطلوب دورند.

در مقایسه با تبدیل فوریه می‌توان گفت که تبدیل موجک دارای خصوصیت موضعی سازی بسیار خوبی است، چرا که توابع پایه تبدیل فوریه توابع سینوسی و کسینوسی هستند که دامنه‌ی آن‌ها در کل بازه ثابت است در حالی که توابع موجک، توابعی هستند که بیشتر انرژی آنها در بازه کوچکی متمرکز شده است و به سرعت میرا می‌شوند.

کاربرد اصلی موجک‌ها در پردازش و انتقال اطلاعات و خصوصاً فشرده‌سازی تصاویر است برای این کار تاکنون از تبدیل‌های فوریه و به ویژه تبدیل سریع فوریه استفاده می‌شد ولی اکنون تبدیل‌های موجکی در حال رقابت با آن‌ها هستند و در مواردی نیز برتری خود را نشان داده‌اند. ضعف تبدیل‌های فوریه از آنجا ناشی می‌شود که توابع سینوسی و کسینوسی علی‌رغم اینکه پایه‌ای برای فضای $L_2[0,2\pi]$ هستند، به $L_2(R)$ تعلق ندارند، بنابراین برای برطرف نمودن این نقص باید به دنبال پایه‌ای بود که $L_2(R)$ را تولید کند و ترجیح می‌دهیم که اینکار تنها توسط یک تابع انجام شود، تابعی که به فضای $L_2(R)$ تعلق داشته باشد و سریعاً به سمت صفر میل کند که با انتقال‌های تابع موردنظر روی R، تمام فضای $L_2(R)$ را تولید می‌کند و موجک‌ها این خصوصیت را دارند. در سال ۱۹۰۹ هاراولین کسی بود که به موجک‌ها اشاره کرد، در سال ۱۹۳۰ ریاضیدانان به قصد

تحلیل ساختارهای تکین موضعی به فکر اصلاح پایه‌های فوریه افتادند و بعد از آن در سال ۱۹۷۰ یک ژئوفیزیکدان فرانسوی به نام ژان مورلت متوجه شد که پایه‌های فوریه بهترین ابزار ممکن در اکتشافات زیرزمین نیستند، این موضوع در آزمایشگاهی متعلق به الف آکیلن منجر به یکی از اکتشافات تبدیل موجک‌ها گردید.

در سال ۱۹۸۰ ایومیر ریاضیدان فرانسوی، نخستین پایه‌های موجکی متعامد را کشف کرد. (تعامد نوعی از ویژگی‌ها را بیان می‌کند که موجب تسهیلات فراوانی در استدلال و محاسبه می‌شود، پایه‌های فوریه نیز متعامدند.)

در همین سال‌ها مورلت مفهوم موجک و تبدیل موجک را به عنوان ابزاری برای آنالیز سیگنال زمین لرزه وارد کرد و گراسمان، فیزیکدان نظری فرانسه نیز فرمول وارونی را برای تبدیل موجک بدست آورد.

در سال ۱۹۷۶ میرومالات توانستند با استفاده از پایه‌های موجک متعامد بحث آنالیز چند ریزه‌سازی (MRA) را بنا کنند و مالات تجزیه موجک‌ها و الگوریتم‌های بازسازی را با بکار بردن آنالیز چند ریزه سازی (MRA) به وجود آورد.

در سال ۱۹۹۰ مورنزی همراه با آنتوان موجک‌ها را به دو بعد و سپس به فضاهایی با بعد بالاتر گسترش دادند و بدین ترتیب آنالیز موجکی پایه‌گذاری گردید.

آنالیز موجک حاصل ۵۰ سال کار ریاضی (نظریه‌ی لیتلوود ـ پیلی و کالدرون ـ زیگموند) است که طی آن با توجه به مشکلاتی که در پاسخ دادن به ساده‌ترین پرسش‌های مربوط به تبدیل فوریه وجود داشت، جانشین‌های انعطاف‌پذیر ساده‌تری از طریق آنالیز هارمونیک ارائه شدند.

۱ـ۲. کاربردها

آنالیز موجک همراه با تبدیل سریع فوریه در تحلیل سیگنال‌های گذرایی که سریعاً تغییر می‌کنند، سیگنال‌های صوتی، جریان‌های الکتریکی در مغز، صداهای زیرآبی ضربه‌ای و در کنترل نیروگاه‌های برق از طریق صفحه نمایش کامپیوتر بکار رفته است.

این آنالیز به عنوان ابزاری عددی می‌تواند مانند تبدیل سریع فوریه تا حد زیادی از پیچیدگی محاسبات در مقیاس بزرگ بکاهد، راحتی و سادگی این آنالیز باعث ساختن تراشه‌هایی شده است که قادر به کدگذاری به نحوی بسیار کارا و فشرده‌سازی سیگنال‌ها و تصاویرند.

آنالیز موجک امروزه کاربردهای فراوانی پیدا کرده است که از آن جمله می‌توان به کاربرد آن در تصویربرداری پزشکی (MRI)، سی‌تی‌اسکن (CAT)، جداسازی بافت‌های مغزی از

تصاویر تشدید مغناطیس، تحلیل تصاویر طیفی شدید مغناطیسی (MR Spectrorscopy) و عملکردهای تشدید مغناطیسی (F MRI) اشاره کرد.

۱ـ۳. تعاریف و پیشنیازها

در اینجا چند تعریف، که در ادامه مطالب به طور ضمنی یا صریح به آن‌ها نیاز پیدا خواهیم کرد را می‌آوریم.در تعاریف زیر C، نماد مجموعه اعداد مختلط می باشد.

تعریف (۱ـ۱): منظور از یک ضرب داخلی روی فضای برداری مختلط X، تابع مختلط مقدار $< \, , \, > : X \times X \to C$ می‌باشد هرگاه قواعد زیر برقرار باشند:

۱) $< x, y > = \overline{< x, y >}$ (علامت بار نشانگر مزدوج مختلط است).

۲) اگر $x, y, z \in X$، $< x + y, z > = < x, z > + < y, z >$

۳) اگر $x, y \in X \, , \, \alpha \in C$ باشد، $< \alpha x, y > = \alpha < x, y >$

۴) اگر $x, y \in X \, , \, \alpha \in C$ باشد، $< x, \alpha y > = \overline{\alpha} < x, y >$

۵) به ازای هر $x \in X$، $< x, x > \geq 0$

۶) $< x, x > = 0 <=> x = 0$

تعریف (۱ـ۲): اگر X یک فضای برداری مختلط و $<,>$ ضرب داخلی تعریف شده روی X باشد، X را یک فضای ضرب داخلی گویند. در یک فضای ضرب داخلی، نرم بردار $x \in X$ را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\| x \| = \sqrt{< x, x >}$$

قضیه (۱ـ۳) نامساوی شوارتز: فرض کنید که X یک فضای ضرب داخلی باشد، در اینصورت به ازای هر $x, y \in X$،

$$\left| < x, y > \right| < \| x \| \| y \|$$

تعریف (۱ـ۴): فضای ضرب داخلی X را یک فضای هیلبرت گویند، هرگاه X همراه با نرم القا شده توسط ضرب داخلی یک فضای کامل باشد.

قضیه (۱ـ۵): هر فضای هیلبرت دارای پایه‌ای متعامدیکه است، اگر $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ پایه‌ای متعامدیکه برای فضای هیلبرت X باشد آنگاه برای هر $x \in X$ داریم:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} < x, \alpha_n > \alpha_n$$

تعریف (۱ـ۶): فضای تمام توابع انتگرال‌پذیر مربعی روی R(اعداد حقیقی) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم و با $L_2(R)$ نمایش می‌دهیم:

$$L_2(R)=\left\{ f:R\to C \,/\, \int_R |f(x)|^2\, dx<\infty \right\}$$

فرض کنیم که $f,g\in L_2(R)$، بنابراین داریم:

$$<f,g>=\int_R f(x)\overline{g(x)}dx$$

$$\|f\|_2^2=<f,f>=\int_R |f(x)|^2\, dx$$

تعریف (۱ـ۷):

$$\ell_2(N)=\left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \,/\, x_n\in C \;\;,\;\; \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|<\infty \right\}$$

برای هر $\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\in \ell_2(N)$، ضرب داخلی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\left\langle \{x_n\}_{n=1}^{\infty},\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \right\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\overline{y}_n$$

تعریف (۱ـ۸): دو تابع g,f متعلق به $L_2(R)$ را متعامد گویند، هر گاه $<f , g> = 0$.

تعریف (۱ـ۹): دنباله $\{f_n\}_{n\in Z}$ از توابع بر $[a,b]$ را نسبت به تابع وزن $\omega(x)$ متعامد گویند هر گاه:

$$\int_a^b \omega(x)f_m(x)f_n(x)dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \alpha>0 & m=n\end{cases}$$

تعریف (۱ـ۱۰): دنباله‌ی $\{f_n\}_{n\in Z}$ از توابع را متعامدیکه گویند، هر گاه $<f_m,f_n>=\delta_{m,n}$ که:

$$\delta_{m,n}=\begin{cases}1 & m=n\\ 0 & m\neq n\end{cases}$$

تعریف (۱ـ۱۱): محمل تابع f که آن را با suppf نمایش می‌دهیم برابر است با:

$$\overline{\{x:f(x)\neq 0\}}$$

(علامت بار نشانگر بستار مجموعه فوق است)

تعریف (۱ـ۱۲): به ازای اعداد حقیقی b,a، عملگرهای انتقال و اتساع روی $L_2(R)$ را به ترتیب چنین تعریف می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
&T_a : L_2(R) \to L_2(R) \\
&(T_a f)(x) = f(x-a)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&D_b : L_2(R) \to L_2(R) \\
&(D_b f)(x) = \sqrt{b}\, f(bx)
\end{aligned}
$$

تعریف (۱ـ۱۳): تابع $\Psi \in L_2(R)$، به قسمی که خانواده $\left\{ \Psi_{m,n} = \sqrt{2^m}\, \Psi(2^m x - n) : m,n \in Z \right\}$ تشکیل پایه‌ای متعامدیکه برای $L_2(R)$ دهد را موجک مادر (یا به طور خلاصه موجک) و خانواده $\{\Psi_{m,n}\}_{m,n \in Z}$ را یک پایه موجکی نامند.

تعریف (۱ـ۱۴): انتگرال‌هایی مانند $J(x) = \int f(t,x,\dot{x})dt$ که به هر تابع $x = x(t)$ یک مقدار عددی نسبت دهد را یک تابعک (تابعی) می گویند.

تعریف (۱ـ۱۵): منظور از یک مسئله حساب تغییرات (بهینه‌سازی انتگرال‌ها) یافتن منحنی $x = x(t)$ است، به قسمی که در شرایط اولیه مسئله صدق کند و تابعک هزینه J را ماکزیمم یا می‌نیمم کند.

فصـل دوم:

آشنائی با موجک‌ها
و
معرفی موجک‌های لژاندر، لژاندر خطی و Sine-Cosine

۲ـ۱. مقدمه

حل مسائل مختلف سیستم‌های دینامیکی و معادلات دیفرانسیل حاکم بر آن‌ها توسط روش‌های موجکی در سال‌های اخیر گسترش زیادی یافته است، حتی با وجود روش‌های عددی متنوع به علت ضعف در همگرایی، احتیاج به روش‌های عددی جدید احساس می‌شود، به دلیل همگرایی خوب در روش موجکی، تنوع زیاد در شکل موجک‌ها و دقت بالا، این روش با موفقیت به کار برده می‌شود. از میان اشکال متنوع موجک‌ها در این فصل به معرفی سه موجک لژاندر، لژاندر خطی و Sine-Cosine و بیان خواص آنها بسنده می‌کنیم تا در فصل‌های آتی جهت معرفی یک روش تقریبی موجکی برای حل مسائل غیرخطی حساب تغییرات از آن‌ها بهره بگیریم.

۲ـ۲. تعریف موجک

موجک‌ها خانواده‌ای متشکل از توابعی هستند که این توابع از انتقال و اتساع یک تابع منحصر بفرد به نام موجک مادر ساخته می‌شوند. موجک مادر را با $\Psi(t)$ نمایش می‌دهیم. فرض کنیم b,a پارامترهایی باشند که به طور پیوسته تغییر می‌کنند، با درنظر گرفتن a به عنوان پارامتر اتساع (فشردگی) و b به عنوان پارامتر انتقال، که وضعیت زمانی موجک را مشخص می‌کند، خانواده‌ی موجک‌های پیوسته به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\Psi_{a,b}(t)=|a|^{-\frac{1}{2}}\,\Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \qquad a,b\in R \quad a\neq 0 \tag{۲ـ۱}$$

اگر $|a|<1$ باشد، محمل موجک داده شده در رابطه (۲ـ۱) در قلمرو زمان کوچکتر می‌شود و حالت فشرده شده موجک مادر حاصل می‌شود.

اگر $|a|>1$، $\Psi_{a,b}$ نسبت به موجک مادر دارای محمل بزرگتری در قلمرو زمان است.

حال اگر به پارامترهای b,a مقادیر گسسته‌ای را اختصاص دهیم به این ترتیب که $a:=a_0^{-k}$ و $b:=nb_0a_0^{-k}$ به قسمی که $a_0>1$، $b_0>0$، n و k اعداد صحیح مثبتی باشند، ما خانواده‌ای از موجک‌های گسسته را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\Psi_{k,n}(t)=|a_0|^{\frac{k}{2}}\,\Psi(a_0^k t-nb_0) \tag{۲ـ۲}$$

خانواده‌ی $\{\Psi_{k,n}(t)\}_{k,n\in Z^+}$ تشکیل یک پایه موجکی برای فضای $L_2(R)$ می‌دهد[۱۵]. به ویژه اگر $a_0=2$ و $b_0=1$ خانواده‌ی $\{\Psi_{k,n}(t)\}_{k,n\in Z^+}$ پایه‌ای متعامدیکه را برای فضای $L_2(R)$ تشکیل می‌دهد.

برخی از موجک‌ها از آنالیز چند ریزه‌سازی (یاMRA) به وجود می‌آیند، یک آنالیز چند ریزه سازی برای $L_2(R)$، دنباله $\{V_j\}_{j\in Z}$ از زیر فضاهای خطی بسته $L_2(R)$، با تابع مقیاس φ است که در شرایط زیر صدق می کند:

۱) برای هر $j\in Z$، $V_j \subseteq V_{j+1}$.

۲) $\bigcup\limits_{j\in Z} V_j$ در $L_2(R)$ چگال است بدین معنی که $\overline{\bigcup\limits_{j\in Z} V_j} = L_2(R)$.

۳) $\bigcap\limits_{j\in Z} V_j = \{0\}$.

۴) برای هر $j\in Z$، $f(t)\in V_j$ اگر و تنها اگر $f(2t)\in V_{j+1}$.

۵) برای هر $j\in Z$، $f(t)\in V_0$ اگر و تنها اگر $f(t-n)\in V_0$.

۶) $\{\varphi(t-n)\}_{n\in Z}$ یک پایه متعامدیکه برای V_0 است.

در تعریف MRA، $V_j = \overline{\text{span}}\{\varphi_{j,n}\}_{n\in Z}$ می‌باشد، بنابراین دنباله $\left\{2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^j t-n)\right\}_{n\in Z}$ پایه‌ای متعامدیکه برای زیر فضای V_j از $L_2(R)$ تشکیل می‌دهد.

با درنظر گرفتن $\Psi(t)$ به عنوان موجک مادر داریم:

$$\Psi(t) = \sum_{n\in Z} a(n)\,\varphi(2t-n) \qquad (۲\text{-}۳)$$

به قسمی که $\{a(n)\}_{n\in Z} \in \ell_2(Z)$ می‌باشد.

دنباله $\left\{2^{\frac{k}{2}}\Psi(2^k t-n)\right\}_{k,n\in Z}$ پایه‌ای متعامدیکه برای فضای $L_2(R)$ تشکیل می‌دهد.

۲ـ۳. آشنایی با موجک‌های لژاندر و خواص آنها

۲ـ۳ـ۱. موجک لژاندر

متداول ترین مجموعه از چند جمله‌ای‌های متعامد، مجموعه چند جمله‌ای‌های لژاندر است که آن را با دنباله $\{P_m\}_{m\in Z^{\geq 0}}$ نمایش می‌دهیم.

چند جمله‌ای‌های لژاندر بر بازه [۱و۱ـ] نسبت به تابع وزن $\omega(t)=1$ متعامدند، فرمول رادرایگز برای چند جمله‌ای‌های لژاندر به صورت زیر است:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \qquad n=0,1,2,...... \qquad (۲\text{-}۴)$$

رابطه‌ی زیر برای چند جمله‌ای‌های لژاندر برقرار است:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{m,n} \qquad (۵\text{-}۲)$$

($\delta_{m,n}$، دلتای کرونکر می‌باشد.)

برای اثبات رابطه‌ی (۲ـ۵) دو حالت درنظر می‌گیریم:

حالت اول: فرض کنیم $n \neq m$ باشد، بدون کم شدن از کلیت $n > m$ درنظر می‌گیریم، چون P_m ترکیب خطی از x^kهاییست که $k < n$ لذا برای بررسی تعامد P_n بر P_m کافی است نشان دهیم که برای هر $k < n$ رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\int_{-1}^{1} x^k P_n(x) dx = 0$$

با توجه به اینکه $(x^2-1)^n = (x-1)^n (x+1)^n$ می‌باشد، $(x^2-1)^n$ و همه مشتق‌های از مرتبه کمتر یا مساوی (n-1)ام آن در نقاط ± 1 صفر هستند، بنابراین با k بار انتگرال‌گیری جز به جز به صورت زیر داریم:

$$\int_{-1}^{1} x^k P_n(x) dx = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{1} x^k \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n dx = \frac{1}{(2^n n!)} x^k \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2-1)^n \Big|_{-1}^{1}$$

$$- \frac{k}{2^n n!} \int_{-1}^{1} x^{k-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2-1)^n dx =$$

$$\vdots$$

$$= \frac{(-1)^k k!}{(2^n n!)} \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x^2-1)^n dx = \frac{(-1)^k k!}{(2^n n!)} \frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}} (x^2-1)^n \Big|_{-1}^{1} = 0$$

حالت دوم: فرض کنیم $n = m$ باشد.

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx = \frac{1}{(2^n n!)^2} \int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n dx$$

حال با توجه به اینکه مشتقات از مرتبه کمتر یا مساوی (n-1)ام $(x^2-1)^n$ در نقاط (± 1) صفر هستند، با استفاده از n بار انتگرال‌گیری جز به جز داریم:

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x) dx = \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (x^2-1)^n dx = \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n (2n!) dx$$

$$=\frac{(-1)^n(2n!)}{(2^n n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx=\frac{(2n!)}{(2^n n!)^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx$$

با انتگرال‌گیری جز به جز برای انتگرال اخیر داریم:

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx=\int_{-1}^{1}(1-x)^n(1+x)^n dx=\frac{(1-x)^n(1+x)^{n+1}}{(n+1)}\Bigg|_{-1}^{1}=0$$

$$+\int_{-1}^{1}n(1-x)^{n-1}\frac{(1+x)^{n+1}}{(n+1)}dx=\frac{n}{(n+1)}\int_{-1}^{1}(1-x)^{n-1}(1+x)^{n+1}dx$$

$$=\frac{n}{n+1}(1-x)^{n-1}\frac{(1+x)^{n+2}}{(n+2)}\Bigg|_{-1}^{1}+\frac{n}{n+1}\int_{-1}^{1}(n-1)(1-x)^{n-2}\frac{(1+x)^{n+2}}{(n+2)}dx=$$

$$\vdots$$

$$=\frac{n!}{(n+1)\times\ldots\times(2n)}\int_{-1}^{1}(1+x)^{2n}dx=\frac{(n!)^2}{(2n)!}\frac{(1+x)^{2n+1}}{(2n+1)}\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)}$$

پس داریم:

$$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx=\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\times\frac{(n!)^2\times 2^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)}=\frac{2}{2n+1}$$

چند جمله‌ای‌های لژاندر در رابطه بازگشتی زیر صدق می‌کند:

$$\begin{aligned}&P_0(x)=1 \qquad P_1(x)=x\\&P_{(n+1)}(x)=(\frac{2n+1}{n+1})xP_n(x)-(\frac{n}{n+1})P_{n-1}(x)\qquad n=1\,,\,2\,,\ldots\end{aligned}\qquad (۶\_۲)$$

حال با استفاده از چند جمله‌ای‌های لژاندر به معرفی موجک‌های لژاندر می‌پردازیم.

موجک‌های لژاندر را با $\Psi_{n,m}(t)=\Psi(k,\hat{n},m,t)$ نمایش می‌دهیم که دارای چهار مؤلفه می‌باشد:

$\hat{n}=2n-1$ و $n=1,2,3,......,2^{k-1}$ و k نیز یک عدد صحیح مثبت درنظر گرفته می‌شود، m نیز مرتبه چند جمله‌ای لژاندر و t زمان نرمال شده می‌باشد.

موجک‌های لژاندر روی بازه $[0\,,\,1)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\Psi_{n,m}(t)=\begin{cases}\sqrt{m+\frac{1}{2}}\;2^{\frac{k}{2}}P_m(2^k t-\hat{n}) & \frac{\hat{n}-1}{2^k}\le t<\frac{\hat{n}+1}{2^k}\\ 0 & 0.w\end{cases}\qquad (۷\_۲)$$

ضریب $\sqrt{m+\frac{1}{2}}$ در معاله (۲ـ۷) برای نرمال‌سازی درنظر گرفته می‌شود. در این معادله پارامتر اتساع $a=2^{-k}$ و پارامتر انتقال $b=\hat{n}\,2^{-k}$ است و $P_m(t)$ چند جمله‌ای لژاندر از مرتبه m می‌باشد.

خانواده موجک‌های لژاندر متعامدیکه می‌باشند، یعنی:

$$(\Psi_{n,m},\Psi_{n',m'})=\int_0^1\Psi_{n,m}(t)\Psi_{n',m'}(t)dt=\begin{cases}1 & n=n',\ m=m'\\ 0 & n\neq n' \text{ یا } m\neq m'\end{cases} \qquad (۲ـ۸)$$

اثبات:

$$m\neq m' \ \Rightarrow \ \operatorname{supp}\Psi_{n,m}(t)=\operatorname{supp}\Psi_{n',m'}=\left[\frac{\hat{n}-1}{2^k},\frac{\hat{n}+1}{2^k}\right]$$

$$\hat{n}=2n-1 \Rightarrow \left(\Psi_{n,m}(t),\Psi_{n',m'}(t)\right)=\int_0^1\sqrt{m+\tfrac{1}{2}}\,2^{\frac{k}{2}}P_m(2^k t-\hat{n})\sqrt{m'+\tfrac{1}{2}}\,2^{\frac{k}{2}}P_{m'}(2^k t-\hat{n})dt$$

$$=\sqrt{(m+\tfrac{1}{2})(m'+\tfrac{1}{2})}\int_{\frac{\hat{n}-1}{2^k}}^{\frac{\hat{n}+1}{2^k}}2^k P_m(2^k t-\hat{n})P_{m'}(2^k t-\hat{n})dt$$

$$=\sqrt{(m+\tfrac{1}{2})(m'+\tfrac{1}{2})}\int_{-1}^{1}P_m(\tau)P_{m'}(\tau)d\tau=0$$

تذکر: $\frac{\hat{n}-1}{2^k}\leq t<\frac{\hat{n}+1}{2^k}\Rightarrow \hat{n}-1\leq 2^k t<\hat{n}+1\Rightarrow -1\leq 2^k t-\hat{n}<1$

در انتگرال‌گیری فوق جانشانی $\tau=2^k t-\hat{n}$ را اعمال کرده‌ایم.

حال اگر $n\neq n'$ باشد داریم:

$$\left[\frac{2n-2}{2^k},\ \frac{2n}{2^k}\right)\cap\left[\frac{2n'-2}{2^k},\ \frac{2n'}{2^k}\right)=\phi$$

$$\Rightarrow\left(\Psi_{n,m}(t),\Psi_{n',m}(t)\right)=0$$

در بهترین حالت اگر بدون کم شدن از کلیت $n'=n+1$ درنظر بگیریم، داریم:

$$\left[\frac{2n-2}{2^k},\frac{2n}{2^k}\right)\cap\left[\frac{2n}{2^k},\ \frac{2n+2}{2^k}\right)=\phi$$

پس برای هر $n\neq n'$، $(\Psi_{n,m},\Psi_{n',m})=0$ است.

همچنین،