بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور

مرکز شیراز

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته آمارریاضی

دانشکده علوم

گروه علمی آمار

عنوان پایان نامه:

برآورد کمترین مربعات و آنالیز واریانس برای سریهای زمانی همبسته متناوب

استاد راهنما:

دکتر علیرضا نعمت اللهی

استاد مشاور:

دکتر نرگس عباسی

نگارش:

وحیده گرگین

بهمن ۸۹

تقدیم به شمس و قمر آسمان زندگانیم

پدر و مادر عزیزم

که وجودم همه برایشان رنج بود، و وجودشان

برایم همه مهر،

آرام نگرفتند تا آرام بگیرم

و مویشان سفیدی گرفت تا رویم سپید بماند.

به شکرانه بیکرانگی لطف استاد بزرگوارم

جناب آقای دکتر علیرضا نعمت اللهی

و سرکار خانم دکتر نرگس عباسی

وهمه و همه کسانی که به قدمی، قلمی، نگاهی، اندیشه ای، کلامی و حتی تبسمی در روئیدن، سبزه های تلاشم را مدد رسان بوده اند.

چکیده

معمولادر ساختار کواریانس داده‌های سریهای زمانی مربوط به اقلیم‌شناسی، آب‌شناسی، جامعه‌شناسی، علوم طبیعی، مهندسی‌برق و علوم‌اقتصاد و ... رفتار تناوبی مشاهده می‌شود، از این رواستفاده از سریهای زمانی همبسته متناوب در ده سال گذشته توجه گسترده‌ای را به خود جلب نموده‌اند. با توجه به اینکه روشهای آنالیزواریانس اغلب برای مقایسه میانگین‌های چند جامعه با نمونه‌های تصادفی هم‌توزیع و مستقل به کار برده می‌شوند، بنابراین در سریهای زمانی همبسته متناوب با وجود تغییر واریانس از فصلی به فصل دیگر و وجود همبستگی در سرتاسر این سریها، نتیجه‌ی حاصله با بکار بردن آزمون F-کلاسیک می‌تواند گمراه کننده باشد. از این رو در این پایان تحلیل واریانس و استنباط در مورد ساختار میانگین سریهای زمانی همبسته متناوب را نیز ارائه خواهیم داد.

هدف از نگارش این پایان نامه مطالعه و بررسی خصوصیات و ویژگی‌های اینگونه سریهای زمانی است. ابتدا تعاریف و مفاهیم اساسی سریهای زمانی را ارائه داده سپس به مطالعه، بررسی خواص و روشهای تشخیص سریهای زمانی همبسته متناوب می‌پردازیم. رفتار مجانبی برآوردگرها و آزمون اثرات فصلی برای این سریها را نیز مطالعه می‌کنیم.

فهرست مطالب

عنوان صفحه

مقدمه...... ۱

فصل اول : مقدمه و مفاهیم اساسی سریهای زمانی

۱ -۱- تعریف سریهای زمانی و فرآیندهای تصادفی...... ۳

۱-۲- مثالهایی از سریهای زمانی...... ٤

۱-۳-مدلهای ساده‌ای از سریهای زمانی...... ٦

۱-٤- میانگین و کواریانس‌ها...... ۸

۱-٥- مفهوم ایستایی...... ۱۰

۱-٦- الگوهای سریهای زمانی ایستا...... ۱۳

۱-۷- طیف و خواص آن...... ۲۷

۱-۸- نمایش طیفی توابع اتوکواریانس...... ۲۹

۱-۹- نمایش طیفی فرآیندهای ایستا...... ۳۰

۱-۱۰- روش یافتن دوره تناوب نهفته...... ۳۳

فصل دوم : سریهای زمانی همبسته متناوب

۲-۱- مقدمه...... ٤۱

۲-۲- خواص سریهای زمانی همبسته متناوب...... ٤۲

۲-۳- مثالهایی از سریهای همبسته متناوب...... ٤٤

۲-٤- مدلهای سریهای زمانی همبسته متناوب......... ٤٦

۲-٥- روشهای تشخیص همبسته متناوب بودن یک سری زمانی......... ٥۲

فصل سوم : برآورد کمترین مربعات و آنالیزواریانس برای سریهای زمانی خودبازگشتی متناوب

۳-۱- مقدمه......... ٥۸

۳-۲- یافتن جواب کازال برای الگوی خودبازگشتی-میانگین متحرک متناوب......... ٦۰

۳-۳- بررسی رفتار مجانبی برآوردگرها برای پارامترهای مدل خودبازگشتی همبسته متناوب......... ٦۲

۳-٤- آزمون اثرات فصلی......... ٦۸

۳-٥- کاربرد نتایج......... ۷۰

۳-٦- تعمیم نتایج......... ۷٤

فهرست منابع......... ۷٦

واژنامه فارسی- انگلیسی......... ۷۸

واژنامه انگلیسی- فارسی......... ۸۱

پیوستها

پیوست الف : برنامه کامپیوتری برای تشخیص همبسته متناوب بودن یک سری......... ۸۳

فهرست شکلها و جداول

عنوان **صفحه**

شکل شماره ۱- نمودار فروش یک نوع نوشابه استرالیایی مثال۱-۲-۱...٤

شکل شماره ۲- نمودار داده های مرگ های تصادفی مثال ۱-۲-۲..۵

شکل شماره ۳- نمودار جمعیت ایالت متحده آمریکا مثال ۱-۲-۳..٦

شکل شماره ٤- نمودار داده های تعداد لکه های خورشیدی..۳۸

شکل شماره ۵- نمودار برآورد چگالی طیفی برای داده های لکه های خورشیدی.....................................۳۸

شکل شماره ٦- نمودار برآورد چگالی طیفی برای داده های لکه های خورشیدی باوزنهای$\frac{1}{3}$.....................۳۹

شکل شماره ۷- نمودار برآورد چگالی طیفی برای داده های لکه های خورشیدی باوزنهای متفاوت...........۳۹

شکل شماره ۸- نمودار داده های طغیان رود اسوتین کریک...۷۱

شکل شماره ۹- نمودار پراکنش داده های طغیان رود اسوتین کریک...۷۲

شکل شماره ۱۰- نمودارمیانگین مجذورات انسجام داده های طغیان رود اسوتین کریک.............................۷۲

شکل شماره ۱۱- نمودار باقی مانده های داده های طغیان رود اسوتین کریک...۷۳

جدول۱- جدول آنالیز واریانس برای داده های طغیان رود اسوتین کریک..۷٤

جدول۲- جدول آنالیز واریانس برای داده های طغیان رود اسوتین کریک در حالت تعمیم یافته..............۷۵

مقدمه

در بعضی از سریهای‌زمانی، تناوب به صورت ذاتی در این سریها وجود دارد، یعنی ساختار خودهمبستگی بین تمام فصلهای مختلف یکسان نمی‌باشد، بنابراین با حذف مؤلفه‌ی فصلی و روند، نیز نمی‌توان سری را به یک سری ایستا تبدیل نمود. بنابراین برای مدل‌بندی این نوع سریهای زمانی، سریهای زمانی همبسته متناوب معرفی شدند، که ساختار توابع میانگین و خودکواریانس آنها متناوب می‌باشند. نکته جالب این قبیل فرآیندها آن است که هر چند این فرآیندها ناایستا می‌باشند ولی بسیاری از خواص فرآیندهای ایستا را می‌توان به این سریها تعمیم داد. در حقیقت بسیاری از محققان فرآیندهای همبسته متناوب را پلی بین فرآیندهای ایستا و ناایستا می‌دانند. لازم به ذکر است که سریهای زمانی همبسته متناوب در صورتیکه که دوره تناوب آنها برابر یک باشد به سریهای زمانی ایستا تبدیل می‌شوند ولی تناوب در گشتاور دوم به وسیله‌ی تبدیلات نمی‌تواند حذف شود.

از آنجایی که در سریهای زمانی همبسته متناوب واریانس از فصلی به فصل دیگر تغییر می‌کندو همبستگی نیز در سرتاسر این سریها وجود دارد، بنابراین در این پایان‌نامه روش آزمونی را معرفی می‌کنیم که می‌تواند در مواردی که ناهمگنی و وابستگی به صورت همزمان وجود دارد و خطاها نیز شامل یک سری متناوب است، به کار برده شود.

این پایان‌نامه به مطالعه و بررسی سریهای زمانی همبسته متناوب اختصاص دارد، به ویژه به بررسی ویژگی‌های حدی برآوردگرهای کمترین مربعات کلی و یافتن جواب کازال برای سریهای همبسته متناوب پرداخته و تحلیل واریانس را برای سریهای زمانی همبسته متناوب شرح خواهیم داد و نتایج بدست آمده را روی داده‌های واقعی بکار خواهیم برد.

فصل اول

مقدمه

و مروری بر مفاهیم اساسی سریهای زمانی

در این فصل برخی مفاهیم اساسی در سریهای زمانی، از جمله فرآیندهای تصادفی، توابع خودهمبستگی، خودهمبستگیهای جزئی، مفهوم اغتشاشهای خالص را معرفی می‌کنیم.

۱-۱- تعریف سریهای زمانی و فرآیندهای تصادفی

یک سری زمانی مجموعه‌ای از مشاهدات متوالی است که بر حسب زمان مرتب شده‌اند و این مشاهدات به ندرت از یک‌دیگر مستقل‌اند.

سریهای زمانی زمان‌گسسته، سریهایی هستند که در آنها مجموعه اندیس‌گذار زمان (زمانهایی که مشاهدات از آن بدست آمده‌اند) گسسته است و سری زمانی پیوسته‌زمان هنگامی بدست می‌آید که مشاهدات به طور پیوسته در بازه زمانی ثبت شده باشند. در مطالعه سریهای زمانی اهداف مختلفی وجود دارد که این اهداف شامل درک و بیان مکانیسم تولیدی، پیش‌بینی مقادیر آینده و کنترل بهینه یک سیستم می‌شود. ویژگی ذاتی یک سری زمانی وابسته یا همبسته بودن مشاهدات آن است و بنابر این ترتیب مشاهدات دارای اهمیت است و روشها و متون آماری که مبتنی بر فرض مستقل بودن است را عمدتا در تحلیل سریهای زمانی نمی‌توان بکار برد.

خانواده‌ای از متغیرهای تصادفی را که بر حسب یک مجموعه اندیس‌گذار، مرتب شده‌اند را فرآیندهای تصادفی نامند که به صورت زیر نمایش داده می‌شوند :

$$\{X(t,\omega) = X_t(\omega), t\epsilon T, \omega\epsilon\ \Omega\}$$

که به ازای t ثابت، $X(t,\omega)$ یک متغیرتصادفی است و برایω معلوم $X(t,\omega)$ به عنوان تابعی از t، یک تابع نمونه‌ای نامیده می‌شود. بنابر این یک سری زمانی یک تابع نمونه‌ای از یک فرآیند تصادفی معین است. عمدتا یک سری زمانی را به صورت $\{X_t, t \epsilon T\}$ نشان می‌دهیم، که معرف مشاهدات یک فرآیند تصادفی $\{X_t\ , t \epsilon T\}$ می‌باشد.

یک روش معمول در تحلیل سریهای زمانی تجزیه سری $\{X_t\}$ به صورت $X_t = m_t + S_t + \varepsilon_t$ است که در آنS_t نشانگر مؤلفه فصلی، m_t نشانگر روند و ε_t نشانگر خطای‌تصادفی می‌باشد. اولین قدم در تحلیل سریهای زمانی رسم نمودار سری و بررسی ویژگی‌های اصلی نمودار به ویژه موارد زیر می‌باشد :

۱–وجود هرگونه روند در سری (بدین مفهوم که سری حول و حوش یک تابع ریاضی در نوسان است)

۲– وجود مؤلفه فصلی در سری

۳- بررسی هرگونه تغییر آشکار در رفتار سری

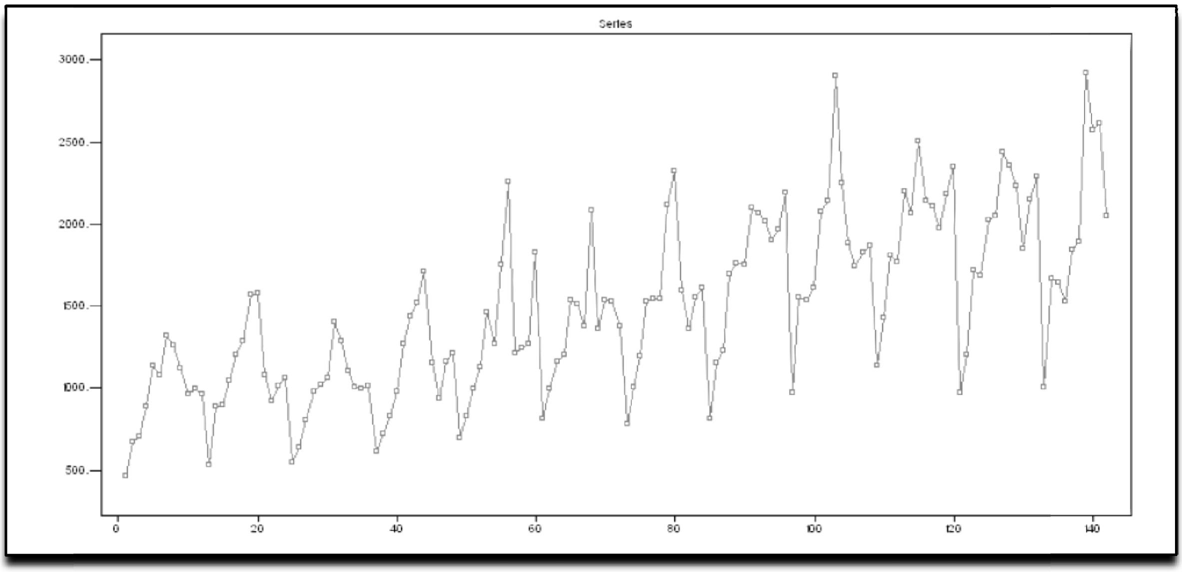
٤- بررسی ناپایداری سری

۵- مشاهده داده پرت

۱-۲- مثالهایی از سریهای زمانی

مثال ۱-۲-۱- فروش یک نوع نوشابه استرالیایی

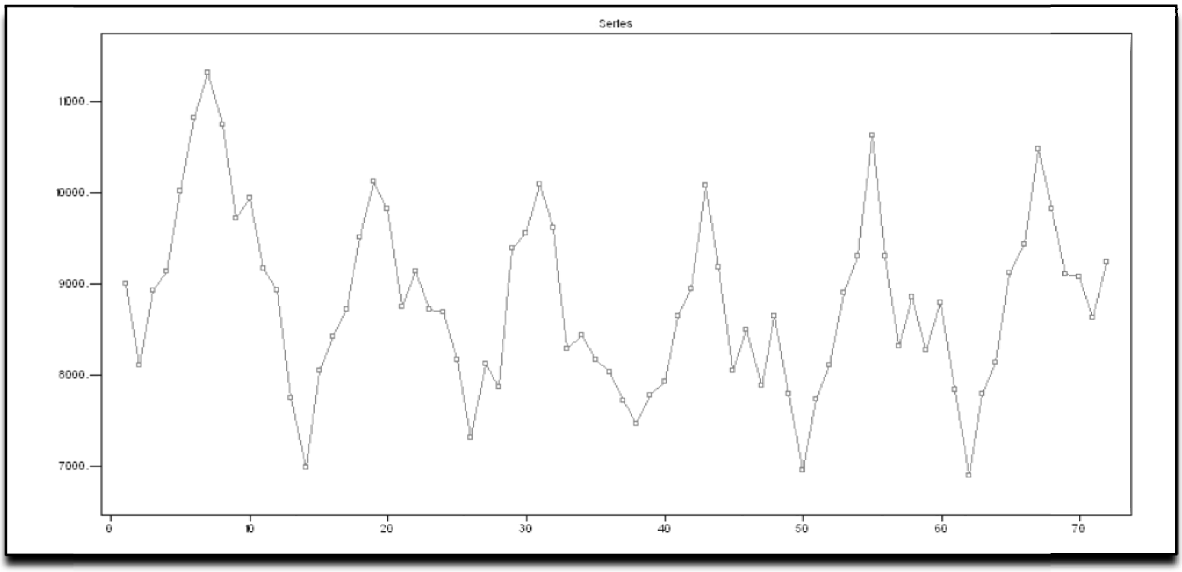
شکل ۱-۱ فروش ماهیانه یک نوع نوشابه استرالیایی را توسط فروشنده‌های استرالیایی از ژانویه ۱۹۸۰ تا اکتبر ۱۹۹۱ نشان می‌دهد. در این مورد مجموعهT شامل ۱٤۲ زمان{(ژانویه ۱۹۸۰)، (فوریه ۱۹۸۰)، ...،(اکتبر ۱۹۹۱)} یعنی مجموعه {۱و۲و...۱٤۲} است. از روی نمودار واضح است که فروشها روند رو به بالا و یک الگوی فصلی دارند که ماکسیمم مقدار در جولای و مینیمم مقدار در ژانویه رخ می‌دهد.



شکل ۱-۱- فروش شراب قرمز استرالیایی

مثال ۱-۲-۲ مرگ و میر ناشی از تصادفات رانندگی ۱۹۷۸- ۱۹۷۳.

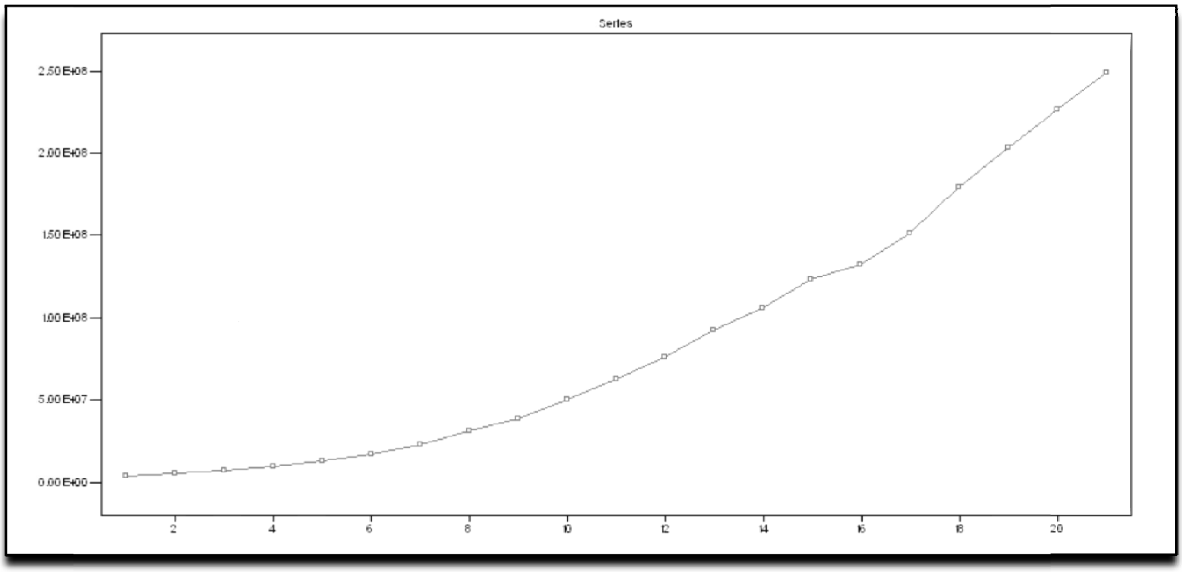
مشابه فروش نوشابه استرالیایی، نمودار مرگ و میر ناشی از تصادفات رانندگی نیز یک الگوی فصلی شدید را نشان می‌دهد، که برای هر سال ماکسیمم در جولای و مینیمم در فوریه رخ می‌دهد، در شکل ۱-۲ روند خیلی کمتر ازفروش نوشابه استرالیایی آشکار است.



شکل ۱-۲- داده های مرگ های تصادفی، ۱۹۷۸-۱۹۷۳

مثال ۱-۲-۳ جمعیت ایالت متحده آمریکا ۱۹۹۰-۱۷۹۰

جمعیت ایالت متحده آمریکا که در بازه زمانی ده‌ساله اندازه گیری شده‌است در شکل ۱-۳ نشان داده شده‌است. با توجه به شکل و یک روند رو به بالاپیشنهاد می‌شود که یک روند نمایی یا درجه دوم به این داده‌ها برازش شود.



شکل ۱-۳- جمعیت ایالت متحده آمریکا، ۱۹۹۰-۱۷۹۰

۱-۳- بعضی از مدلهای ساده سریهای زمانی

قسمت مهمی از آنالیز سریهای زمانی، انتخاب مدل احتمالی مناسب برای داده‌هاست. بنابراین مدل سریهای زمانی برای داده‌های مشاهده شده $\{x_t\}$عبارت است از تعیین توزیع‌های تؤام (یا احتمالا فقط میانگین و کواریانس‌ها)دنباله متغیرهای تصادفی $\{X_t\}$، که طبق فرض $\{x_t\}$ از آنها آمده‌اند.

مدل‌هایی با میانگین صفر

مثال۱-۳-۱-دنباله اغتشاشهای مستقل و هم‌توزیع

شاید ساده‌ترین مدل برای سریهای زمانی، مدلی است که در آن هیچگونه روند یا مؤلفه‌ی‌فصلی وجود ندارد و مشاهدات آن متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع هستند. بنابراین به ازای هر عدد صحیح مثبت n و مقادیرحقیقی $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ داریم :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}[X_1 \le x_1, \dots, X_n \le x_n] &= \mathrm{P}[X_1 \le x_1] \dots \mathrm{P}[X_n \le x_n] \\ &= \mathrm{F}(x_1) \dots \mathrm{F}(x_n) \end{aligned}$$

که F تابع توزیع تجمعی هر متغیر تصادفی هم‌توزیع $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ می‌باشد. در این مدل هیچگونه وابستگی بین مشاهدات وجود ندارد. به طور ویژه‌ای برای هر۱ $\geq h$ و به ازای هر $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ داریم :

$$\mathrm{P}[X_{n+h} \leq x | X_1 = x_1, \dots X_n = x_n] = \mathrm{P}[X_{n+h} \leq x]$$

بنابراین اطلاع در مورد $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ هیچ تأثیری در پیش بینی رفتار X_{n+h} ندارد.

مثال ۱-۳-۲- فرآیندهای دوتایی

مشابه مثال دنباله اغتشاش‌های مستقل و هم‌توزیع، دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع

$\{X_t\,, t = 1,2, \dots\}$ را با

$$\mathrm{P}[X_t = 1] = \mathrm{p}\,,\ \mathrm{P}[X_t = -1]\ =\ 1 -\ \mathrm{p}$$

و ۱/۲ = p را در نظر بگیرید. این مدل می‌تواند توسط پرتاپ مکرر یک سکه و نوشتن ۱ برای هربار شیر آمدن و ۱- برای خط آمدن بدست آید.

مثال ۱-۳-۳- قدم زدن تصادفی

قدم‌زدن تصادفی $\{S_t, t = 0,1,2, \dots\}$(شروع از صفر) به وسیله ی مجموع متغیرهای‌تصادفی مستقل و هم‌توزیع بدست می‌آید. $S_0 = 0$ و S_t به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\{S_t = X_1 + X_2 + \dots + X_t\}\,, \qquad \forall\, t = 1,2, \dots$$

که در آن $\{\ X_t\}$ دنباله ی اغتشاش‌های مستقل و هم‌توزیع می‌باشد. اگر $\{\ X_t\}$ یک فرآیند دوتایی باشد، در این صورت $\{S_t, t = 0,1,2, \dots\}$ مدل قدم زدن تصادفی متقارن نامیده می‌شود.

مدلهایی با مؤلفه فصلی و روند

در بخش۱-۲ مثالهایی از سریهای زمانی را که در آنها روند آشکاری در داده‌ها وجود داشت را دیدیم. یک روند افزایشی آشکاری درهردوی فروش نوشابه استرالیایی و جمعیت ایالت متحده آمریکا وجود دارد. که در هر دو مورد مدل با میانگین صفر برای داده‌ها نامناسب است. برای نمودار داده‌های جمعیت، از آنجایی که شامل هیچ مؤلفه‌ی دوره‌ای آشکاری نیست، مدلی به شکل زیر پیشنهاد می‌شود :

$$X_t = m_t + Y_t$$

که در آن m_t مؤلفه‌ی روند و Y_t دارای میانگین صفر است، یک روش مفید برای برآورد مؤلفه‌ی m_t روش حداقل مربعات می‌باشد.

۱-٤- میانگین و کواریانس‌ها

اگر $\{X_t\}$ یک سری زمانی با $E(X_t^2) \leq \infty$ باشد، تابع میانگین $\{X_t\}$ عبارت است از :

$$\mu_X(t) = E(X_t), \qquad \forall t = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots$$

یعنی μ_t دقیقا مقدار مورد انتظار فرآیند در زمان t است.

در حالت کلی μ_t به ازای هر t می‌تواند متفاوت باشد.

تابع اتو کواریانس $\{X_t\}$ به صورت :

$$\gamma(s,t) = cov\ (X_t\ , X_s), \qquad t, s\ = 0,1,\pm 2,\ldots$$

تعریف می‌شود که در آن

$$cov(X_t\ , X_s) = E[(X_t - \mu_t)(X_s - \ \mu_s)] = E(X_t X_s) - \mu_t \mu_s$$

و بالاخره تابع خود همبستگی به صورت زیر داده می‌شود :

$$\rho(s,t) = \mathrm{corr}\ (X_t\ , X_s) \quad (۱-۱)$$

که درآن

$$corr\ (X_t\ , X_s) = \frac{cov\ (X_t\ , X_s)}{\sqrt{var(x_t) var(x_s)}} = \frac{\gamma(s,t)}{\sqrt{\gamma(t,t).\gamma(s,s)}}$$

یادآور می‌شویم که کواریانس و همبستگی هر دو وابستگی (خطی) بین متغیرهای تصادفی را اندازه می‌گیرند ولی تعبیر و تفسیر همبستگی بدون واحد تا اندازه‌ای آسانتر است.

خواص زیر به سادگی قابل تحقیق هستند :

۱- $\gamma(t,t) = var(x_t) \qquad , \rho(t,t) = 1$

۲- $\gamma(s,t) = \gamma(t,s) \qquad , \rho(s,t) = \rho(t,s)$ (۲-۱)

۳- $|\gamma(s,t)| \le \sqrt{\gamma(t,t)\gamma(s,s)} \quad , |\rho(s,t)| \le 1$

مقادیر $\rho(s,t)$ نزدیک به ± 1، وابستگی خطی زیاد را نشان می‌دهد. در صورتی که مقادیر نزدیک به صفر یا هیچگونه وابستگی را نشان نمی‌دهد یا اینکه از همبستگی (خطی) ضعیفی برخوردارند. اگر $\rho(s,t) = 0$، X_t و X_s ناهمبسته و اگر X_t و X_s مستقل باشند، آنگاه $\rho(s,t) = 0$.

برای بررسی خواص کواریانس الگوهای سریهای زمانی مختلف، نتیجه زیرغالبا مورداستفاده قرار می‌گیرد :

۱- اگر $c_1, c_2, \dots, c_m$ و $d_1, d_2, \dots, d_n$ ثابت و $t_1, t_2, \dots, t_m$ و $s_1, s_2, \dots, s_n$ نقاط زمانی باشند، آنگاه

$$cov\left[\sum_{i=1}^{m} c_i X(t_i), \sum_{j=1}^{n} d_j X(s_j)\right] = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_i d_j cov\left(X(t_i), X(s_j)\right) \quad (۱-۳)$$

به بیان دیگر کواریانس بین دو ترکیب خطی، مجموع تمام کواریانس‌ها بین جملات آن ترکیب‌های خطی است.

در حالات خاص نتیجه معروف زیر را داریم :

$$\mathrm{var}\left[\sum_{i=1}^{n} c_i X(t_i)\right] = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 var\left[X(t_j)\right] + 2\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} c_i c_j cov\left[X(t_i), X(t_j)\right] \quad (۱-٤)$$

علاوه بر خودهمبستگی بین X_t و X_{t+k} در بعضی حالات می‌خواهیم همبستگی بین X_t و X_{t+k} را بعد از حذف اثر متغیرهای X_{t+1}،X_{t+2}،...،X_{t+k-1} محاسبه نماییم. که منظور از این همبستگی، همبستگی شرطی زیر است که در تحلیل سریهای زمانی خودهمبستگی جزئی نامیده می‌شود وبا ϕ_{kk} نمایش می‌دهند.

$$\phi_{kk} = corr(X_t, X_{t+k} | X_{t+1}, \dots, X_{t+k-1}) \quad (۱-٥)$$

که طبق قرارداد $\phi_{11} = \rho_1$ است. به عنوان تابعی از k معمولا تابع خودهمبستگی جزئی، $PACF$ نامیده می‌شود.

این تابع برای شناسایی الگوهای AR مرتبه p که در بخش بعدی تعریف می‌شوند، مفید می‌باشد.

با استفاده از دستور کرامر و معادلات یول‌والکر می‌توان ϕ_{kk} را تا جایی که لازم باشد به طریق عددی محاسبه نماییم.

$$\phi_{11} = \rho_1, \phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}, \phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}, \dots, \phi_{kk} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & \rho_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \cdots & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix}}$$

۱-۵- مفهوم ایستایی

سری زمانی $\{X_t\}$ را ایستای قوی گوییم هرگاه به ازای هرانتخاب دلخواه k و $t_1, t_2, \dots, t_k$ داشته باشیم :

$$\left(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k}\right) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \left(X_{t_{1+h}}, X_{t_{2+h}}, \dots, X_{t_{k+h}}\right) \quad , \forall\ h \in \mathbb{Z} \quad (۱-۶)$$

بنابر این در یک سری زمانی ایستا رفتار احتمالی سری با رفتاراحتمالی سری انتقال یافته به اندازه‌ی h واحد مشابه می‌باشد.

به بیان دیگر قوانین احتمالی حاکم بر فرآیند با گذشت زمان تغییر نمی‌کند. معمولا به دلیل اینکه به ندرت تابع توزیع یک سری زمانی در دسترس است، بررسی تساوی زیر :

$$F_{X_{t_1} \dots X_{t_k}}\ (x_1, \dots, x_k\ ) = F_{X_{t_{1+h}} \dots X_{t_{k+h}}}(x_1, \dots, x_k)$$

امکان‌پذیر نیست و به جای این مفهوم با یک مفهوم ضعیف‌تر به نام ایستای‌ضعیف کار می‌کنیم که در آن به جای استفاده از تابع توزیع تنها از گشتاورهای مرتبه‌ی اول و دوم استفاده می‌شود. هرچند با استفاده از گشتاورها اطلاعات معینی از دست می‌رود، ولی در تئوری پیش بینی خطی فقط به همین خواص گشتاوری مرتبه اول و دوم نیاز پیدا خواهیم کرد. همچنین اگر همه‌ی توزیع‌های تؤام، نرمال چند متغیره باشند گشتاورهای اول و دوم می‌توانند توزیع را کاملا شناسایی کنند.

سری زمانی $\{X_t\}$ را ایستای ضعیف گوییم هرگاه

۱) $E(X_t) = \mu_t = \mu \qquad \forall\ t$

یعنی فرآیند حول یک مقدار ثابت μ نوسان می‌کند.

۲) $cov(X_{t+k}, X_t) = E(X_{t+k}, X_t) - E(X_{t+k}) \cdot E(X_t) = \gamma(k)$

یعنی کواریانس بین دو مشاهده نه به نقطه شروع و نه به نقطه پایان بستگی نداشته باشد و فقط تابعی از طول زمان باشد.

توجه کنید که با قرار دادن $k = 0$ در شرط دوم داریم :

$$var(X_t) = \gamma(0)\,, \qquad\qquad \forall\ t$$

یعنی واریانس سری نیز به t بستگی ندارد.

لازم به ذکر است که ایستای قوی ایستای ضعیف را نتیجه می‌دهد ولی عکس آن صحیح نمی‌باشد.

در فرآیندهای گوسی (که توزیع‌های متناهی البعد آن نرمال چندمتغیره می‌باشد)ایستای‌ضعیف، ایستای‌قوی را نیز نتیجه می‌دهد. بنابراین در فرآیندهای گوسی این دو مفهوم یکی می‌باشند.

بصورت شهودی سریهای زمانی که حول سطح ثابتی تغییر کنند، سریهای ایستا در میانگین و سریهای زمانی که حول سطح ثابتی تغییر نمی‌کنند و علاوه بر آن با اضافه شدن سطح سری واریانس آن نیز افزایش یا کاهش می‌یابد، ناایستا در میانگین و کواریانس می‌باشند. سریهای زمانی که تغییرات فصلی را در بر می‌گیرند، سریهای فصلی نامند. سریهای ناایستا را می‌توان با تبدیلات مناسبی به سری ایستا تبدیل نمود. مطالعه سریهای زمانی با توجه به الگوهای پارامتری که از توابع خودهمبستگی و خودهمبستگی‌جزئی استفاده می‌کند، تحلیل در قلمرو زمان نامند. در این بخش سریهای زمانی را از قلمرو زمان مورد بررسی قرار می‌دهیم.

سری‌زمانی ایستا به وسیله‌ی میانگین(μ)، واریانس(σ^2)، خودهمبستگی(ρ_k)وخودهمبستگی‌های‌جزئی‌اش (ϕ_{kk}) شناسایی می‌شود.

اگر $\{X_t\}$ یک سری زمانی ایستا باشد، تابع اتوکواریانس (ACVF) در تأخیرk به صورت زیر :

$$\gamma_X(k) = cov(X_{t+k}, X_t) \quad (۷-۱)$$

تعریف می‌شود.

وتابع خودهمبستگی (ACF) در تأخیرk نیز به صورت :

$$\rho_X(k) = \frac{\gamma_X(k)}{\gamma_X(0)} = corr(X_{t+k}, X_t) \quad (۸-۱)$$

می‌باشد.

به سهولت می‌توان دید که برای یک فرآیند ایستا، تابع اتوکواریانس $\gamma_X(k)$ و تابع خودهمبستگی $\rho_X(k)$ دارای خواص زیر هستند :

۱- $\gamma(0) = var(X_t) \geq 0, \rho_0 = 1$

۲- $|\gamma(k)| \leq \gamma(0), \quad |\rho_k| \leq 1 \quad (۹-۱)$

۳- $\gamma(k) = \gamma(-k), \quad \rho_k = \rho_{-k}$

ویژگی سوم به این موضوع اشاره دارد که $\gamma(k)$ و ρ_k توابعی زوج هستند و لذا نسبت به مبدأ زمان $\mathrm{k} = 0$ متقارن می‌باشند.

خاصیت مهم دیگر تابع اتوکواریانس $\gamma(k)$ و تابع خودهمبستگی ρ_k نیمه معین مثبت بودن آنهاست، بدین مفهوم که برای هر مجموعه از نقاط زمانی $t_1, t_2, \ldots, t_n$ و مجموعه اعداد حقیقی $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ داشته باشیم :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j\gamma\left|t_i - t_j\right| \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j\rho\left|t_i - t_j\right| \geq 0$$

بنابر این هر تابع دلخواهی که در خواص ۱ تا ۳ صدق کند، می‌تواند یک تابع اتوکواریانس فرآیند باشد.

همچنین شرط لازم برای اینکه تابعی، تابع اتوکواریانس یا خودهمبستگی یک فرآیند باشد این است که نیمه معین مثبت باشد.

بنابراین می‌توان گفت تابع حقیقی مقدار تعریف شده روی اعداد صحیح تابع اتوکواریانس سری زمانی ایستاست اگر وفقط اگر زوج و معین نامنفی باشد.

مثالی از فرآیندهای ایستا

فرآیند $\{z_t\}$ را اغتشاش خالص (سفید) می‌نامند، هرگاه دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی ناهمبسته از توزیعی ثابت با میانگین ثابت $E(z_t) = \mu$ که معمولا صفر فرض می‌شود و واریانس ثابت $var(z_t) = \sigma_a^2$ باشد و به ازای هر $k \neq 0$، $\gamma(k) = cov(z_t, z_{t+k}) = 0$ باشد.

بنا برتعریف گفته می‌شود که فرآیند اغتشاش خالص $\{z_t\}$ ایستاست و می‌نویسیم :

$$Z_t \sim WN(0, \sigma_a^2)$$

با تابع اتوکواریانس

$$\gamma(k) = \begin{cases} \sigma_a^2 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

و تابع خودهمبستگی