بسم الله الرحمن الرحیم

۱۳۷۹ /۷/ ۲۵

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده ریاضی و کامپیوتر - بخش ریاضی

پایان‌نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

تبدیلهای موجکی و حل معادلهٔ اتساع

10219

استاد راهنما :

دکتر مهدی رجبعلی‌پور

مؤلف :

احمد صفاپور

تیرماه ۱۳۷۴

این گردآوری و پژوهش با حمایت مرکز بین‌المللی علوم و تکنولوژی پیشرفته و علوم محیطی انجام شده است

(ب) ۳۳۰۸۸

بسمه تعالی

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز درجه کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی‌شود.

دانشجو: احمد صفاپور

استاد راهنما: آقای دکتر مهدی رجبعلی‌پور

داور ۱: آقای دکتر علی‌اکبر جعفریان

داور ۲: آقای دکتر محمدعلی دهقان

دانشگاه شهید باهنر کرمان اداره تحصیلات تکمیلی

تقدیم به :

همسرم

و فرزندانم :

مهرنوش و کیانوش

سپـاس

اکنون که دورهٔ کارشناسی ارشد را به پایان می‌رسانم وظیفهٔ خود می‌دانم از کلیهٔ عزیزانی که مشوّق و راهنمای من بوده‌اند تشکر و قدردانی نمایم.

به پایان رساندن این دوره و بویژه اتمام این پایان نامه را مرهون زحمات آقای دکتر مهدی رجبعلی‌پور هستم که در نهایت محبت و دلسوزی مرا راهنمائی نمودند و بسیار چیزها از ایشان آموختم. سپاس بیکران خود را تقدیم ایشان می‌نمایم.

از آقایان دکتر علی‌اکبر جعفریان و دکتر محمدعلی دهقان که داوری این رساله را بعهده داشتند و آقایان دکتر حسین محبی و دکتر نصراله گرامی که همواره نسبت به من لطف داشته و از کلاسهای درس‌شان بهره‌مند بوده‌ام، کمال تشکر را دارم.

همچنین مراتب قدردانی و تشکر خود را از کلیه اساتید محترم دانشکده ریاضی و کامپیوتر بالاخص آقای دکتر یوسف بهرامپور و آقای دکتر اسفندیار اسلامی ابراز می‌دارم.

احمد صفاپور
تیرماه ۱۳۷۴

چکیده

نظریه موجکها شاخه‌ای از آنالیز هارمونیک و از پدیده‌های جدید علم ریاضی است که کاربردهای فراوانی در ریاضیات و مخابرات دارد. این نظریه علی‌رغم عمر کوتاه خود به سرعت رشد کرده و تقریباً در هر زمینه‌ای که آنالیز فوریه حضور داشته به رقابت با آن برخاسته است. مهمترین عرصه این رقابت در فشرده‌سازی و مخابره علائم و تصاویر است. ابزار مورد استفاده برای این هدف تبدیلهای موجکی هستند. ما در این پایان‌نامه دو هدف را مدنظر داشته‌ایم: یکی معرفی تبدیلهای موجکی و مقایسه آنها با تبدیلهای فوریه، دیگری بررسی روش ساختن موجکها با استفاده از معادلات اتساع.

در فصل اول ضمن معرفی کوتاهی از نظریه موجکها و تاریخچه آن، برخی مفاهیم و تعاریف اولیه ارائه شده‌اند. چون قصد ما مقایسه تبدیلهای موجکی با تبدیلهای سریع فوریه بوده است فصل دوم به معرفی تبدیلهای سریع فوریه اختصاص دارد. در آنجا با ذکر برخی اعداد و ارقام، اهمیت غیر قابل تردید این تبدیلها نشان داده شده است. در فصل سوم ابتدا یک موجک خاص و تبدیل آنرا بعنوان مثال معرفی کرده و با تبدیل فوریه مقایسه نموده‌ایم. با این مقایسه برتری تبدیل موجکی را نسبت به تبدیل فوریه نشان داده‌ایم.

در فصل چهارم چگونگی ساختن موجکها شرح داده شده و معادله اتساع معرفی گردیده است.

در فصل پنجم دو روش برای حل معادله اتساع ارائه شده است: ۱) حل توسط تبدیل فوریه، ۲) حل توسط ضرب‌های ماتریسی. در حل معادله اتساع توسط ضرب‌های ماتریسی مفهوم شعاع طیفی توأم خانواده‌ای از ماتریسها مطرح گردیده است.

بالاخره در فصل ششم به بررسی معادلات اتساعی که دارای جوابهای پیوسته با محمل فشرده هستند پرداخته و ارتباط بین شعاع طیفی توأم ماتریسها و نمای هلدر پیوستگی مورد بحث قرار گرفته است.

فهـرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل ۱

مقدمه

مقدمه

آنالیز فوریه هم در آنالیز ریاضی محض و هم در آنالیز ریاضی کاربردی از موضوعات اساسی است. روشهای آن نه تنها از موضوعات بنیادی در همه زمینه‌های علم و تکنولوژی است، بلکه هم تبدیل انتگرالی فوریه و هم سری فوریه دارای تعابیر مشخص فیزیکی هستند. بعلاوه جنبه محاسباتی سریهای فوریه نیز بسیار جذابند. این جاذبه عمدتاً به دلیل خاصیت تعامد سریها و نیز بیان ساده‌شان تنها بر اساس دو تابع سینوس و کسینوس است.

اخیراً موضوع "آنالیز موجکی" مورد توجه زیاد ریاضیدانان و مهندسان قرار گرفته است. برخی به آن بعنوان پایه‌ای جدید برای نمایش توابع می‌نگرند، عده‌ای آنرا بعنوان تکنیکی برای آنالیز زمان-بسامدی به حساب می‌آورند و گروهی دیگر نیز آنرا یک موضوع جدید ریاضی می‌دانند. البته همه آنها حق دارند، زیرا "موجکها" ابزاری قابل انعطاف با محتوای غنی ریاضی و توانایی سطح بالای کاربردی هستند. همانند آنالیز فوریه، در آنالیز موجکی نیز دو ابزار مهم ریاضی وجود دارد: "تبدیل انتگرالی موجکی" و "سری موجکی". در این پایان‌نامه هر جا که از تبدیل موجکی نام می‌بریم منظور تبدیل گسسته موجکی (DWT) است.

تبدیل موجکی همانند تبدیل سریع فوریه (FFT) یک عملگر خطی است. این عملگر روی برداری

از داده‌ها که طول آن توان صحیحی از ۲ است اثر می‌کند و آنرا به بردار دیگری با همان طول و با مقادیر عددی متفاوت تبدیل می‌کند. همچنین تبدیل موجکی همانند تبدیل سریع فوریه معکوس‌پذیر و در واقع متعامد است. معکوس آن، زمانی که آنرا بعنوان یک ماتریس بزرگ (یا یک عملگر خطی) در نظر بگیریم، ترانهادهٔ تبدیل است.

کاربرد اصلی موجکها در پردازش و انتقال اطلاعات و خصوصاً در فشرده‌سازی تصاویر است. برای اینکار تاکنون از تبدیلهای فوریه و بویژه تبدیل سریع فوریه استفاده می‌شده ولی اکنون تبدیلهای موجکی در حال رقابت با آنها هستند و حتی در مواردی نظیر انگشت نگاری برتری خود را نشان داده‌اند. ضعف تبدیلهای فوریه از آنجا ناشی می‌شود که توابع سینوسی و کسینوسی علیرغم اینکه پایه‌ای برای فضای $L^{۲}([\circ, ۲\pi])$ هستند به $L^{۲}(R)$ تعلق ندارند. بنابراین برای برطرف کردن این نقیصه باید بدنبال پایه‌ای بود که $L^{۲}(R)$ را تولید کند و ترجیح می‌دهیم که اینکار تنها توسط یک تابع انجام شود. تابعی که به فضای $L^{۲}(R)$ تعلق داشته باشد باید سریعاً به سمت صفر میل کند و اینجا این سؤال بیش می‌آید که تابعی که سریعاً به سمت صفر میل می‌کند چگونه می‌تواند تمام فضای $L^{۲}(R)$ را تولید کند. پاسخ این است که کار مزبور توسط انتقالهای تابع مورد نظر روی R انجام می‌گیرد. سوال بعدی که پیش می‌آید این است که آیا چنین خانواده‌ای از توابع واقعاً پایه‌ای برای $L^{۲}(R)$ تشکیل می‌دهند؟ بعبارت صریح‌تر آیا عناصر این خانواده بر یکدیگر عمود هستند؟ این مسئله‌ای بود که مدتها ذهن کسانی را که در زمینه نظریه موجکها کار می‌کردند به خود مشغول کرده بود. آنها بدنبال خانواده‌ای از توابع بودند که دارای محمل فشرده بوده و بر یکدیگر نیز عمود باشند و توأم شدن این دو خاصیت بدیهی بنظر نمی‌رسید. اینکار بالاخره توسط اینگرید دابیچیز انجام شد

و اودر [۸] که در سال ۱۹۸۸ انتشار یافت نشان داد که چنین خانواده‌ای از توابع را می‌توان ساخت. این اساسی‌ترین مقاله در نظریه موجکهاست و راهگشای تحقیقات و مطالعات بعدی در این زمینه شده است.

نام‌گذاری موجکها به پیروی از گراسمان و مورلت در [۱۷] انجام شده است. از دیگر محققان برجسته این نظریه می‌توان از س.مالات ، ی.لُماریه، ج.لاگاریاز، س.ک.چوی ، گ.استرانگ، ک.هِیل، و د.کولِلا نام برد.

در اینجا چند تعریف را که در ادامه مطالب بطور ضمنی یا صریح به آنها نیاز پیدا خواهیم کرد می‌آوریم.

۱ـ۱ تعریف: فرض کنید $\{\varphi_n\}$ خانواده‌ای از توابع در یک فضای هیلبرت باشد. این خانواده را *متعامد* گوییم هر گاه $\forall n \neq m \quad <\varphi_n, \varphi_m> = 0$. (منظور از $<\varphi_n, \varphi_m>$ ضرب داخلی این دو تابع است).

۱ـ۲ تعریف: یک خانواده متعامد $\{\varphi_n\}$ را *یکامتعامد* گوئیم هر گاه $\forall n \quad \|\varphi_n\| = 1$.

۱ـ۳ تعریف : فرض کنیم $S = \{\varphi_n\}$ خانواده شمارش‌پذیری از توابع یکامتعامد بر بازه‌ای مانند I باشد و $f \in L^2(I)$. در اینصورت سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \tag{1-1}$$

را که در آن

$$c_n = < f, \varphi_n > = \int_I f(x)\overline{\varphi_n(x)}dx \tag{1-2}$$

سری فوریه f نسبت به خانواده S می‌نامند.[۳۳]

۱ـ۴ تعریف: اگر f تابعی متناوب با دوره تناوب ۲π باشد و $f \in L^{۲}([۰,۲\pi])$ آنگاه سری

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \qquad (۱-۳)$$

را سری فوریه تابع f گویند.

۱ـ۵ تعریف: به ازای هر عدد صحیح k، $f(x-k)$ را انتقال صحیح (یا به طور خلاصه *انتقال*) تابع f گویند.

۱ـ۶ تعریف: به ازای هر عدد صحیح j تابع $f(۲^{j}x)$ را یک *اتساع* تابع $f(x)$ گویند. (گرچه تابع f در حالت $j < ۰$ منقبض می‌شود ولی متداول است که بر همه حالات نام کلی اتساع اطلاق می‌شود.)

۱ـ۷ تعریف: هر معادله تابعی به شکل کلی

$$f(x) = \sum_{k=۰}^{N} c_k f(\alpha_x - \beta_k), \qquad (۱-۴)$$

که در آن $\alpha > ۱$ و $\beta_۰ < \beta_۱ < \cdots < \beta_N$ اعداد ثابت حقیقی بوده و c_nها اعداد ثابت مختلط هستند یک معادله *تفاضلی دو مقیاسی* یا یک *معادله اتساع* نامیده می‌شود.

در این پایان‌نامه با حالت خاص اینگونه معادلات سر و کار داریم یعنی وقتی که $\alpha = ۲^{j}, j$ عدد صحیح، $\beta_k = k$ و c_kها اعداد حقیقی هستند.

۱ـ۸ تعریف: هر جواب ناصفر معادله

$$f(x) = \sum_{k=۰}^{N} c_k f(۲x-k) \qquad (۱-۵)$$

را یک تابع پیمایشی گویند. توابع جعبه‌ای و کلاهک دو تا از جوابهای غیر صفر این معادله هستند که به این ترتیب معرفی می‌شوند:

$$\text{(تابع جعبه‌ای)}\quad \varphi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1. \\ 0, & \text{جاهای دیگر}. \end{cases} \tag{۱ − ۶}$$

$$\text{(تابع کلاهک)}\quad \varphi(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x < 2, \\ 0, & \text{جاهای دیگر}. \end{cases} \tag{۱ − ۷}$$

این رساله مشتمل بر شش فصل است. در فصل دوم تبدیل گسسته فوریه در حالتهای یک و دو بعدی و الگوریتم‌های سریع برای کار آمدتر شدن آنها معرفی می‌شوند. در فصل سوم ابتدا یک موجک خاص و تبدیل آن را به عنوان مثال تعریف کرده و با تبدیل فوریه مقایسه می‌کنیم. سپس این مقایسه را به حالات کلی‌تر تعمیم می‌دهیم. فصل چهارم به چگونگی ساختن موجکها اختصاص دارد. در این فصل ابتدا آنالیز چند مقیاسی را معرفی کرده و به کمک آن به معادلهٔ اتساع دست می‌یابیم. برای یافتن توابع پیمایشی به حل معادلهٔ اتساع رهنمون می‌شویم. در فصل پنجم دو روش برای حل معادلهٔ اتساع معرفی می‌شوند: ۱) حل توسط تبدیل فوریه ۲) حل توسط ضربهای ماتریسی.

در حل معادله توسط ضربهای ماتریسی مفهوم شعاع طیفی توأم خانواده‌ای از ماتریسها مطرح گردیده و رابطهٔ آن با نمای هلدر پیوستگی بررسی می‌شود. بالاخره در فصل ششم به مشخص‌سازی آن دسته از معادلات اتساع که دارای جوابهای پیوسته با محمل فشرده هستند می‌پردازیم.

فصل ۲

تبدیل گسسته فوریه (ت.گ.ف.) و تبدیل سریع فوریه (ت.س.ف.)