چکیده: خواص اپتکی و الکترونیکی بلورهای مایع در سال های اخیر توجه بسیاری از دانشمندان را به خود جلب کرده است. به علت خواص دوگانه ی بلورهای مایع می توان پدیده های جالبی را در بلورهای مایع مشاهده و ایجاد نمود. یکی از این پدیده ها، پدیده ی مارانگونی است که در آن جرم به علت گرادیان کشش سطحی جابه جا می شود. برای ایجاد گرادیان کشش سطحی از گرادیان دما که توسط لیزری با پروفایل گاوسی ایجاد می شود، استفاده نموده ایم. در نتیجه ی ایجاد گرادیان کشش سطحی، ماده جابه جا شده و جریان در محیط ایجاد می شود. در اینجا با بلورهای مایع کار می کنیم که اعمال نیرو به محیط سبب بازچرخش محور هادی آن ها می شود که مقدار این بازچرخش توسط معادله ی تعادل گشتاوری به دست می آید. بلور مایع نماتیک مورد نظر ما به صورت هموتروپ چیده شده است یعنی مولکول های میله ای شکل بلور مایع عمود برسطح شیشه قرار دارند. سطح بالای سلول مورد نظر باز بوده و در تماس با هوا می باشد. با نوشتن معادله ی گرما در محیط ناهمسانگرد و حل آن تابع تغییرات دما به دست می آید. سپس با حل معادله ی نویر–استوکس جریان حاصل از تغییرات دما محاسبه می شود. در این حالت اگر یک میدان مغناطیسی به محیط اعمال شود مشاهده می شود که آستانه ی فردریکز کاهش یافته و با اعمال یک میدان نه چندان قوی در مقایسه با حالت عادی مولکول ها شروع به بازچرخش می نمایند. میزان بازچرخش در محیط در حدود یک درجه است که می تواند شیفت فاز قابل توجهی در نور عبوری ایجاد نماید.

کلید واژه ها: پدیده ی مارانگونی(Marangoni effect)، بلور مایع(Liquid crystal)، پروفایل گاوسی(Gaussian profile)، گرادیان کشش سطحی، معادله ی نویر- استوکس (Navier-Stokes equation)، معادله ی گرما، معادله ی تعادل گشتاوری، چینش هموتروپ(Homeotropic alignment)، گذار فردریکز(Fredrik’s transition)، میدان مغناطیسی.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول: پیشینه و مفاهیم اصلی

۱-۱بلورهای مایع..... ۳

۱ ۱ ۱ تاریخچه..... ۳

۱ ۱ ۲ معرفی و دسته بندی..... ۴

۱ ۱ ۳ خواص اپتیکی و الکترونیکی..... ۹

۱ ۱ ۴ جبر تانسوری..... ۱۱

۱ ۱ ۵ ضرایب کشسانی و انرژی های آزاد..... ۱۳

۱ ۲ هیدرودینامیک..... ۱۵

۱ ۲ ۱ هیدرودینامیک بلورهای مایع ۱۷

۱ ۳ انتشار گرما..... ۱۹

۱ ۳ ۱ تقریب بوسینسک..... ۲۰

۱ ۴ گذار فردریکز..... ۲۰

۱ ۵ اثر مارانگونی..... ۲۲

۱ ۵ ۱ تاریخچه..... ۲۲

۱ ۵ ۲ معرفی و دسته بندی..... ۲۳

۱ ۶ لیزر..... ۲۵

۱ ۶ ۱ پروفایل گاوسی.....۲۶

۱ ۷ برهمکنش لیزر و بلورهای مایع.....۲۸

فصل دوم: شرح مسئله و محاسبات

۲ ۱ شرایط حاکم و تقریب ها.....۳۱

۲-۱-۱ شرح مسئله.....۳۱

۲-۱-۲ دستگاه مختصات مورد استفاده.....۳۳

۲-۱-۳ خطی سازی.....۳۴

۲ ۲ معادله ی گرما.....۳۴

۲ ۲ ۱ شرایط مرزی.....۳۷

۲ ۳ معادله ی نویر- استوکس.....۳۷

۲ ۳ ۱ شرایط مرزی.....۴۱

۲ ۴ معادله ی تعادل گشتاوری.....۴۱

۲ ۴ ۱ شرایط مرزی.....۴۶

۲ ۵ گذار فردریکز.....۵۰

فصل سوم: بررسی نتایج

۳ ۱ معادله ی گرما.....۵۲

۳ ۲ معادله ی نویر- استوکس.....۵۴

۳ ۲ ۱ حل معادلات.....۵۴

۳ ۲ ۲ نمودار تغییرات.....۵۵

۳ ۳ تعادل گشتاوری.....۵۸

۳ ۳ ۱ حل معادله..... ۵۹
۳ ۳ ۲ نمودار تغییرات..... ۵۹
۳ ۳ ۳ اثر میدان مغناطیسی در بازچرخش..... ۶۰
۳ ۴ نتیجه گیری..... ۶۴
۳ ۵ پیشنهادها..... ۶۵
فهرست منابع..... ۶۸
چکیده انگلیسی..... ۷۰

فهرست شکل ها

شکل ۱-۱ بردار هادی معرف جهت گیری مولکول هاست[۳].....۶

شکل ۱-۲ الف) جهت گیری هموتروپیک بلورهای مایع.....۷

شکل ۱-۲ ب) جهت گیری پلانر بلورهای مایع.....۷

شکل ۱-۲ ج) چینش تویست در بلورهای مایع.....۷

شکل ۱-۲ د) چینش هیبرید بلورمایع.....۷

شکل ۱-۳ الف) دو نوع جهت گیری سمکتیک[۳].....۸

شکل ۱-۳ ب) دو نوع جهت گیری سمکتیک-آ و سمکتیک-ب[۳].....۸

شکل ۱-۴جهت گیری بلورهای مایع به شکل کلستریک.....۹

شکل ۱-۵ اختلاف ضریب شکست عادی و غیرعادی در دمای یکسان[۲].....۱۰

شکل ۱-۶ سه نوع تغییر شکل جهت گیری مولکول ها در اثر نیروی وارده[۳].....۱۴

شکل ۱-۷ ضریب ویسکوزیته با توجه به جهت گیری سرعت و بردار هادی متفاوت است[۲]...۱۷

شکل ۱-۸ بازچرخش مولکول های نمونه ی هموتروپ پس از اعمال میدان خارجی[۳].....۲۱

شکل ۱-۹ مقطع پروفایل گاوسی یک باریکه ی لیزر.....۲۶

شکل ۱-۱۰ یک باریکه ی گاوسی و پارامترهای مشخصه ی آن[۲۰].....۲۷

شکل ۲-۱ تغییرات دمایی و ناهمسانگردی ضریب رسانش گرمایی[۲].....۳۶

شکل ۳-۱ نمودار تغییرات دما در اثر جذب نور لیزر.....۵۳

شکل ۳-۲ تغییرات تابع گرادیان دما.....۵۴

شکل ۳-۳ تغییرات عمقی و سطحی تابع سرعت.....۵۶

شکل ۳-۴ تغییرات سرعت در سطح در مقیاس میکرومتر در ثانیه.....۵۷

شکل ۳-۵ تغییرات سرعت در شعاع ۰,۰۱ سانتی متری از مرکز.....۵۸

شکل ۳-۶ بازچرخش مولکول ها در سطح و عمق در واحد رادیان..... ۶۰
شکل ۳-۷ بازچرخش عمقی در واحد رادیان..... ۶۱
شکل ۳-۸ تابع بازچرخش در اثر اعمال میدان مغناطیسی و جذب نور لیزر..... ۶۲
شکل ۳-۹ تغییرات بازچرخش با افزایش میدان مغناطیسی اعمال شده..... ۶۳
شکل ۳-۱۰ قدر مطلق بازچرخش با افزایش میدان اعمالی..... ۶۴

مقدمه

اگرچه در سال های آغازین کشف بلورهای مایع توجه چندانی به آنها نشد اما به تدریج و با پیشرفت علم، کم کم کاربردهای خارق العاده ای برای این مواد شگفت انگیز کشف شد. تنها توجه به انقلابی که این مواد در دنیای نمایشگرها ایجاد کرده اند می تواند نشان دهد که بلورهای مایع تاچه اندازه برای زندگی بشر مفید واقع شده اند . از آنجا که بلورهای مایع جزء مواد ناهمسانگرد محسوب می شوند مطالعه ی آنها این پیچیده است، دوگونه بودن حالت این مواد پژوهشگر را وادار می کند که با مکانیک سیالات و هیدرودینامیک آشنایی داشته باشد و نیز برای بررسی محیط ناهمسانگرد باید تغییرات اپتیکی خاص محیط را در نظر گرفت. اما پیچیدگی مطالعه ی بلورهای مایع مانع کشف ابعاد جالب این مواد نشده و روزبه روز بر میزان شناخت ما از این مواد افزوده است. فناوری و علم روز به روز کاربردهای بیشتری برای بلورهای مایع کشف کرده و این مواد را بیش از پیش به خدمت بشر وامی دارند. پاسخ های متفاوت این مواد به تغییرات دما و میدان های الکتریکی و مغناطیسی زمینه ی گسترده ای برای ساخت ابزار و وسایل حساس و پیشرفته ایجاد کرده است . با ورود فناوری های نوین به عرصه ی بلورهای مایع زمینه ی مطالعه باز هم گسترده تر می شود. لیزر ابزاری قدرتمند در این راستاست که مطالعات اپتیکی در بلورهای مایع را بسیار تسهیل نموده است . نانو که خود دنیای جدیدی در علم و فناوری است با ورود در زمینه ی بلورهای مایع پنجره ی جدیدی برای پیشرفت در کاربردهای بلورهای مایع می گشاید.

در این پایان نامه تلاش کردیم دیدگاه جدیدی برای کار با بلورهای مایع ایجاد کرده و از زاویه ای دیگر به مطالعه ی این مواد بنگریم. هدف ما ایجاد اثرات گرمایی توسط نور و بررسی آن است که مستلزم درآمیختن اپتیک و هیدرودینامیک است.

فصل اول: پیشینه و مفاهیم اصلی

فصل اول: پیشینه و مفاهیم اصلی

بعد از کشف بلورهای مایع و بیشترشدن روزبه روز شناخت از این مواد کاربرد آنها نیز روزبه روز افزایش یافت. مشخصات جالب و منحصر به فرد بلورها ی مایع، آنها را در کانون توجه دانشمندان وصنعتگران قرار داد. بلورهای مایع ابزار مناسبی برای مطالعه ی اپتیک غ یرخطی هستند، همچنین با استعاده از آنها ابزار منحصربه فردی ساخته شده است که هر لحظه بر تعداد آنها افزوده می شود.

اثرات سطحی تاثیر به سزایی در زندگی ما وهمچنین در طبیعت دارند . به عنوان مثال موئینگی که در اثر کشش سطحی پدید می آید سبب تغذیه ی گیاهان در سراسر کره ی زمین می شود . یکی از این اثرات، پدیده ی مارانگونی است که در اثر تغییرات کشش سطحی پدید می آید.

در این پروژه، برآن بودیم تا اثر پدیده ی مارانگونی را در سطح بلورهای مایع بررسی کنیم . نتایج حاصل می تواند تاثیر مهمی در اپتیک غیرخطی داشته باشد.

۱- ۱ بلورهای مایع

۱-۱-۱ تاریخچه

کشف بلورهای مایع توسط رینیتزر[1] انجام گرفت. او زمانی که کلستریل بنزوات را گرم کرد دو نقطه ی ذوب مشاهده نمود، در دمای $145.5^{\circ}C$ این ماده یک مایع مات می شد و با گرم کردن بیشتر وی دید که این مایع مات در دمای $178.5^{\circ}C$ به یک مایع شفاف تبدیل شد. آن مایع مات همان بلور مایع کلستریک بود . او دو نمونه مشاهدات خود را برا ی فیزیکدان آلمانی لمن[2] فرستاد تا وی آن دو

[1] Reinitzer
[2] Lehman

نمونه را بیشتر بررسی نمایند.عبارت بلور سیال[1] اولین با توسط لمن در سال ۱۸۸۹ بر این ماده نام‌گذاری شد و در سال ۱۹۰۰ عبارت بلور مایع[2] ثبت شد[۱].

اما فیزیک بلور مایع در حقیقت از سال ۱۹۲۰ توسط فریدال[3] آغاز شد. جورج فریدال بلورشناس معروف فرانسوی اوایل قرن بیستم اولین کسی بود که پیشنهاد داد بلورهای مایع حالتی از ماده اند که حالتی(فازی) بین سیالات همسانگرد و بلورها هستند . قبل از فریدال، چندین دانشمند در قرن های ۱۹ و۲۰ بلورهای مایع را بدون آنکه بدانند با حالت جدیدی از ماده مواجهند، مشاهده کرده بودند . حالتی که با حالت مایع و بلورجامد که مرزهای مشخصی دارند، متفاوت است . فریدال به این نتیجه رسید که لمن ناقص است و با توجه به خواص مختلف، بلورهای مایع را به نام های نماتیک، کلستریک و سمکتیک نام‌گذاری کرد[۲]. این دوره با پنجاه سال رکود همراه شد تا زمانی که در سال ۱۹۷۰ تحت تاثیر دجنس[4] فیزیک بلور مایع وارد مرحله ی گسترش شد تا به امروز ادامه دارد[۱].

بلورهای مایع کاربردهای بسیاری از جمله ساخت نمایشگرهای بلور مایع، گرماسنجی، ضبط و نمایش تصاویر و ... دارند و با توجه به ساخت شگفت انگیز آنها، روز به روز به کاربرد این مواد افزوده می شود.

فیلترهای قابل تنظیم بلورهای مایع به عنوان ابزار الکترواپتیکی مورد استفاده قرار می گیرند . لیزرهای بلور مایع برای تولید نور لیزری ، محیطی از جنس بلور مایع دارند. با افزودن نانومواد به محیط بلورهای مایع می توان پنجره هایی ساخت که قدرت مات و شفاف شدن با کلید زنی را دارند.

۱-۱-۲ معرفی و دسته بندی

بلورهای مایع مواد شگفت انگیزی هستند. علاوه بر فازهای جامدات بلوری و مایعات، بلورهای مایع فازهای میانه ای را نمایش می دهند، در حالی که مانند مایعات جریان می یابند بعضی از مشخصات خاص جامدات را نیز دارند . موادی که چنین فاز های غیر معمولی را نشان می دهند مزوژن نامیده می شوند و فازهای مختلفی که می توانند داشته باشند مزوفاز نامیده می شوند.

[1] Fluid crystal
[2] Liquid crystal
[3] Freidel.G.
[4] P.G.de Gennes

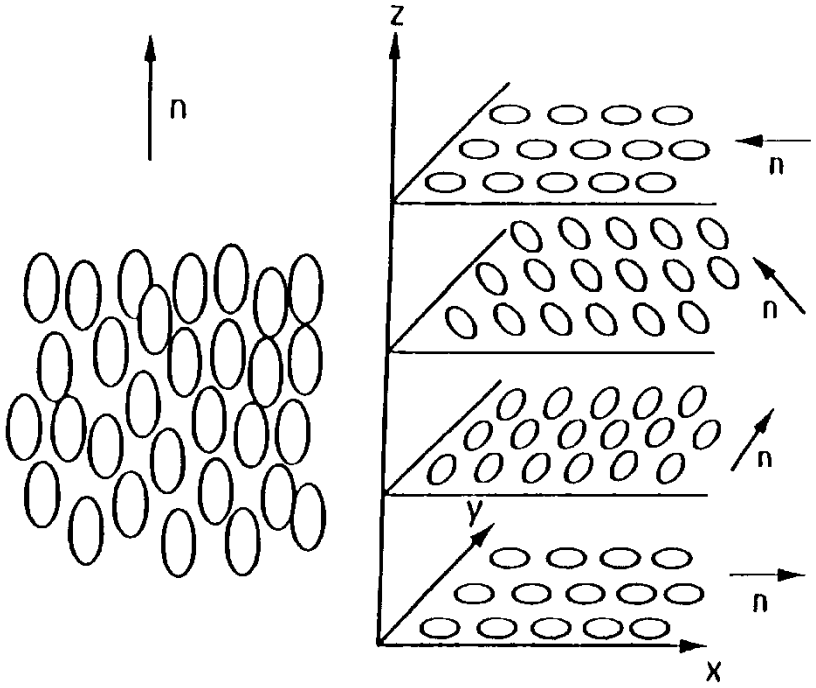
بلورهای مایع با توجه به مشخصات دسته بندی می شوند. میزان حساسیت به تغییر دما، ساختار شیمیایی، چگالی و ... عوامل موثر در دسته بندی آنها می باشد. گروه هایی که بیشتر شناخته شده اند و به طور گسترده ایی مطالعه شده اند شامل ترموتروپیک [1]، پلیمریک [2] و لیوتروپیک [3] ها هستند[۳].

بلورهای مایع لیوتروپیک : این دسته از بلورها ی مایع زمانی ایجاد می شوند که چگالی مناسبی از یک ماده در مقدار ی از حلال، حل شده باشد. رایج ترین سیستم ها آنها یی هستند که به وسیله آب و مولکول های آمیفیل تولید شده باشند مانند صابون ها، شوینده ها و چربی ها . در اینجا مهم ترین متغیر کنترل کننده ی وجود فاز بلور مایع مقدار و یا چگالی ماده ی حل شده است.

بلورهای مایع پلیمریک: این دسته اساساً از مولکولهای رشته ای بلند تش کیل می شوند که با توجه به میزان انعطاف پذیری درجه بندی می شوند . عموماً بلورهای مایع پلیمری با گرانروی بسیار بالا شناخته می شوند و به نظر می رسد برای ذخیره ی اپتیکی مناسب باشند.

بلورهای مایع ترموتروپیک : بلورهای مایعی هستند که به طور گسترده استفاده شده اند و به دلیل خواص خطی و غیر خطی اپتیکی، بسیار مطالعه شده اند . این دسته از بلورهای مایع فازهای مختلفی از بلورهای مایع را به صورت تابعی از دما نشان می دهند. اگر چه ساختار مولکولی آنها عموماً بسیار پیچیده است، اما مولکولهای آنها به صورت میله های سخت نشان داده می شوند . این میله ها با هم برهمکنش کرده و ساختارهای منظمی را ایجاد می کنند . مولکولها اگرچه مانند مایعات جایگاه مشخصی نداشته و بر روی هم می لغزند اما به طور کلی جهت گیری مشخصی دارند . این جهت گیری کلی با یک بردار یکه به اتم بردارهای هادی n تعریف می شود که برداری یکه است یعنی $n.n=1$ [۳].

[1] thermotropic
[2] polymeric
[3] lyotropic



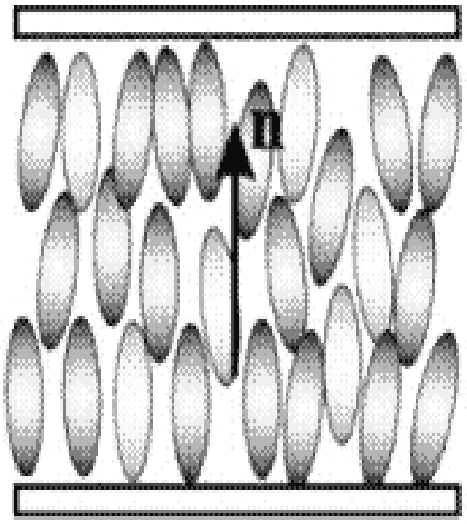
شکل۱-۱.بردار هادی معرف جهت گیری کلی مولکول هاست.[۳]

این دسته از بلورهای مایع خود به سه دسته نماتیک، کلستریک، سمکتیک تقسیم می شوند. عموماً مولکول های نماتیک ها نسبت به مرکز متقارنند و مشخصات فیزیکی آنها نسبت به n+ و n- یکسان است و با توجه به جهت گیری بردار هادی به زیر فازهای هوموتروپیک[۱] ، پلانر[۲] ، هیبریڈ[۳] و توئیست[۴] تقسیم می شوند. کلستریک ها که اغلب بلورهای مایع نماتیک پیچ دار نامیده می شوند، تمام مشخصات نماتیک ها را دارند به جز آنکه تمایل دارند که به شکل پیچشی مرتب شوند، این ساختار با اضافه کردن مولکولهای پیچی در هنگام تولید به یک بلور مایع نماتیک به دست می آید.

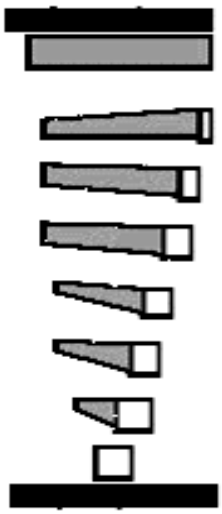
در بلورهای مایع سمکتیک بر خلاف نماتیک جایگاه مولکولها مهم است . زیرفازهای مختلفی از سمکتیک کشف شده اند که براساس جایگیری مولکولها و مشخصات ساختار تقارنی شان متفاوتند از

[1] . homeotropic
[2] .planer
[3] . hybrid
[4] .twist

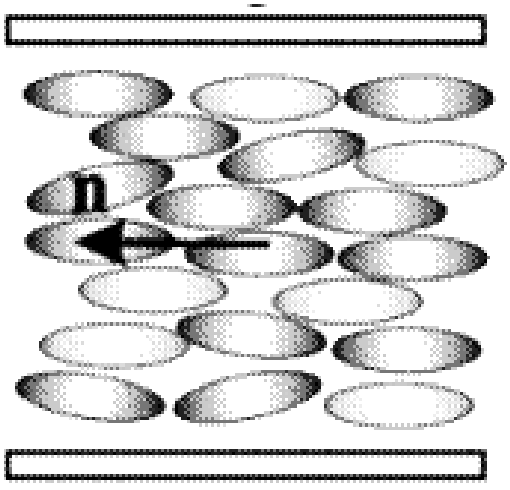
آن جمله می توان به سمکتیک-آ[1] ، سمکتیک-ب[2] ، سمکتیک-سی[3] که فرو الکتریک هستند، اشاره کرد.



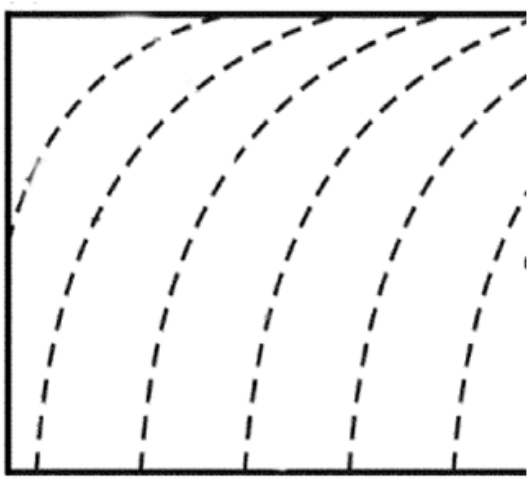
شکل ۱-۲.الف) جهت گیری هوموتروپیک بلورهای مایع[۳].



شکل ۱-۲ ج) چینش تویست در بلورهای مایع

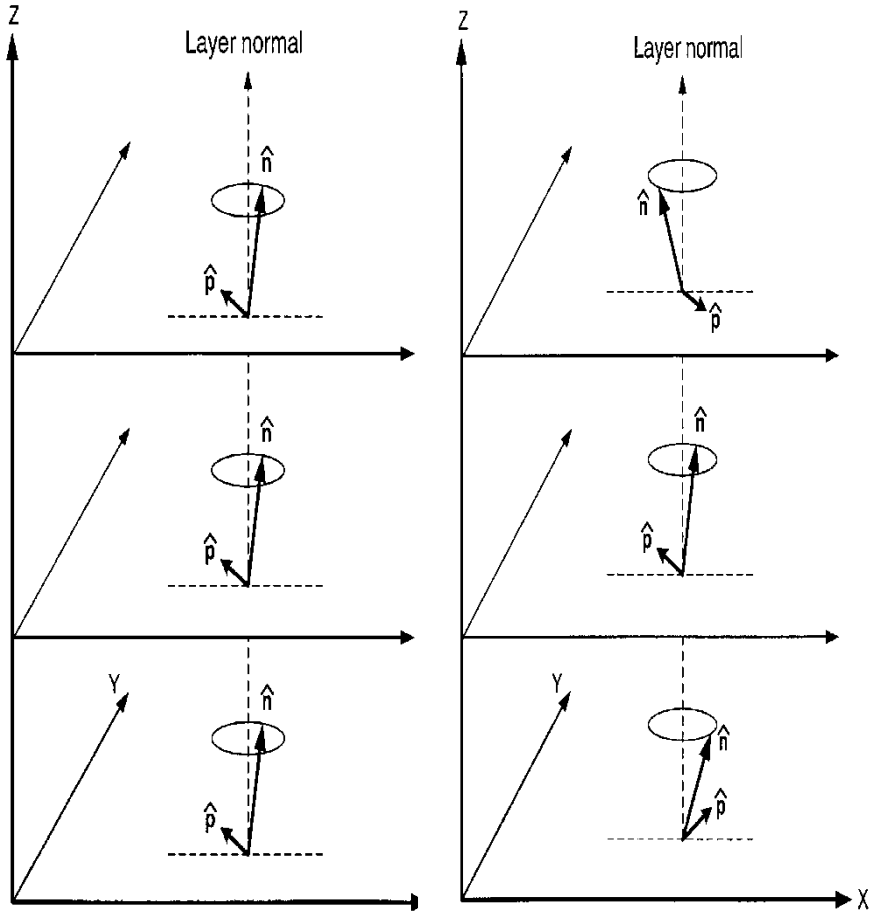


شکل ۱-۲ب) جهت گیری پلانر بلورهای مایع.

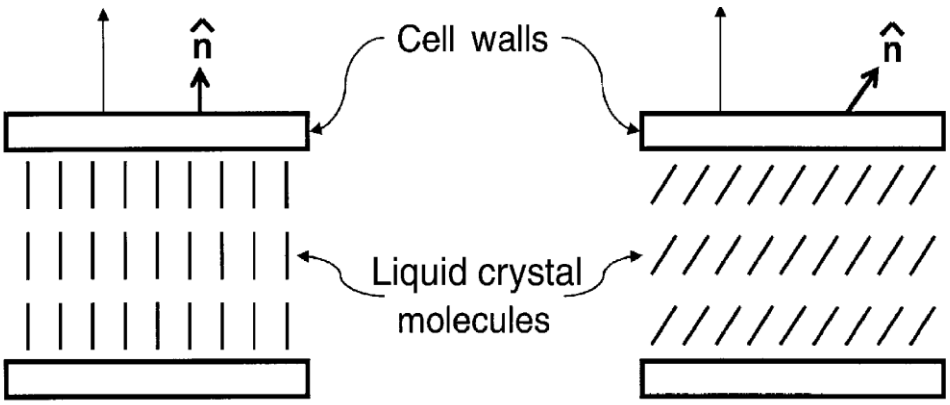


شکل ۱-۲د) چینش هیبرید بلورمایع.

[1] smectic-A
[2] Smectic-B
[3] Smectic-C

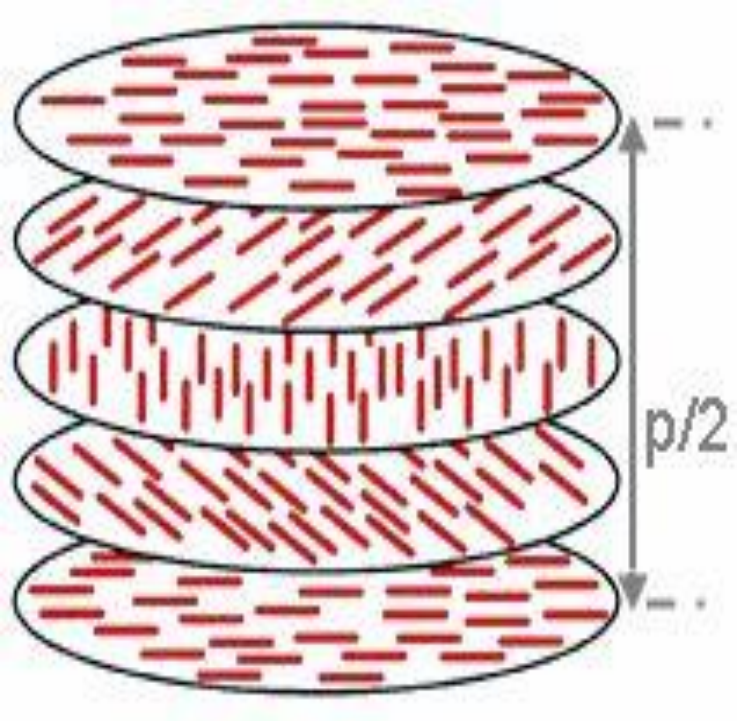


شکل ۱-۳ الف) دو نوع جهت گیری سمکتیک[۳].



شکل ۱-۳ ب) دو نوع جهت گیری سمکتیک-آ و سمکتیک-ب[۳].

بلورهای مایع انواع دیگری نیز دارند که کمتر مطالعه و یا استفاده می شوند . تعداد دیگری نیز با تغییر ساختار و مواد تشکیل دهنده ساخته شده اند . جدیدترین آنها بلورهای مایعی هستند که با نانو موادی مانند C60 تولید می شوند. افزودن مواد رنگی و یا نانو مواد به بلورهای مایع نیز مشخصات اپتیکی و الکترونیکی آنها را تغییر می دهد[۳].



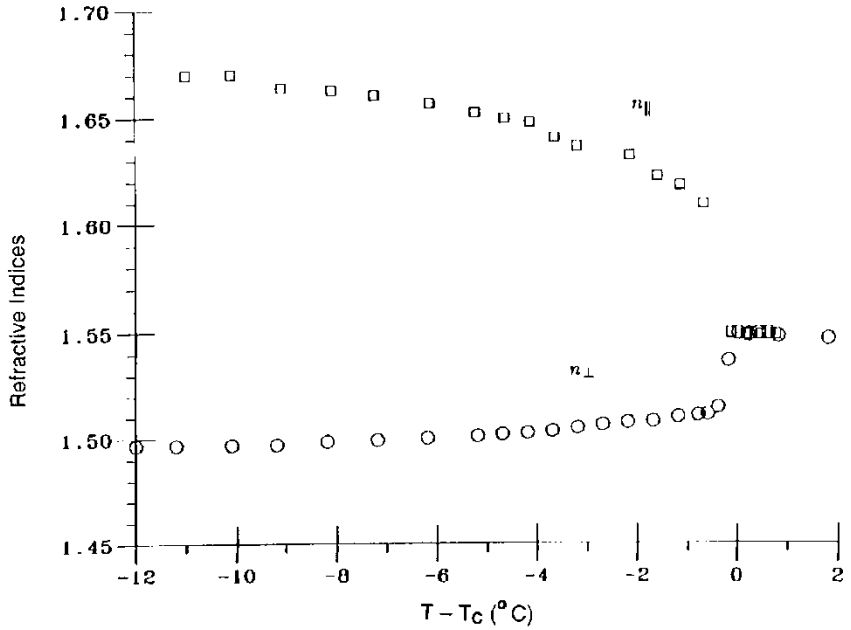
شکل ۱-۴ جهت گیری بلورهای مایع به شکل کلستریک.

۱-۱-۳ خواص اپتیکی و الکترونیکی

در حالت کلی می توان فازهای بلور مایع را به دو دسته منظم و نامنظم دسته بندی کرد . برای فاز منظم، دیدگاه نظری مشخصات بلور مایع بسیار شبیه جامدات است با این وجود حقیقت جالب درباره ی بلورهای مایع آن است که این مواد در این حالت هنوز هم بسیاری از مشخصات مایعات را از خود نشان می دهند . مثلاً مثل مایعات جاری می شوند در حالت نامنظم یا فاز ناهمسانگرد بسیار شبیه سیالات عادی که مولکول های ناهمسانگرد دارند، عمل می کنند.

بلور مایع به علت داشتن ساختار ناهمسانگرد دارای خاصیت دوشکستی هستند (تک محورند). از دیدگاه اپتیکی وقتی نور غیر قطبیده ای وارد بلور مایع می شوند دو ضریب شکست را احساس می کند که ضریب شکست عادی و غیرعادی نامیده می شوند.

$$\Delta n = n_{e(\perp)} - n_{o(||)} \qquad (۱-۱)$$



شکل ۱-۵ اختلاف ضریب شکست عادی و غیرعادی در دمای یکسان [۳]

این ناهمسانگردی درباره ی گذردهی الکتریکی و تراوایی مغناطیسی هم صدق می کند.

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{||} \qquad (۱-۲)$$

$$\Delta\chi = \chi_{\perp} - \chi_{||} \qquad (۱-۳)$$

به عبارت دیگر گذردهی الکتریکی (مغناطیسی) بسته به اینکه میدان الکتریکی (مغناطیسی) موازی محور هادی باشد و یا عمود بر آن باشد متفاوت است[۳].

مشخصات و فرایندها ی الکترونیکی که در بلورها ی مایع رخ م ی دهد، توسط مشخصات الکترونیکی مولکول ها ی تشکیل دهنده معین م ی شود. به دلیل بزرگی مولکول ها ی سازنده ی بلورهای مایع، ساختار سطوح انرژی آنها کمی پیچیده است.

از آنجا که بلورها ی مایع مواد آروماتیک هستند، یک یا چند حلقه ی آروماتیک دارند که سطوح انرژی یا اربیتال ها ی آنها نقش مهمی در تعیین سطوح انرژ ی بلورهای مایع دارند. عموما گذارهای مربوط به سطوح انرژی آروماتیک ها به جذب نور در محدوده ی فرابنفش نزدیک ، مربوط می شود. عموما مشاهده م ی شود که بلورها ی مایع در محدوده ی فرابنفش مثل همه ی مولکول ها ی آلی، کاملا جاذب هستند. در محدوده ی مرئی و فروسرخ نزدیک، بلورهای مایع خطوط جذبی کمتری دارند و بنابراین در این محدوده ها کاملا شفافند . با افزایش طول م وج، گذارهای نوسانی غالب می شوند و چون سطوح انرژ ی نوسانی در همه ی مولکول های بزرگ وجود دارند بلورها ی مایع در محدوده ی فروسرخ نیز کاملا جاذبند [۳].

۱-۱-۴ جبر تانسوری

پیش از آنکه بحث درباره ی بلورهای مایع ادامه بدهیم باید با ابزار ریاضی متناسب با این محیط ناهمسانگرد آشنا شویم.

باید توجه داشته باشیم که قوانین عمومی و اولیه ی فیزیک که با آن آشنا یی داریم برا ی محیط های همسانگرد و با تقارن بالا نوشته شده است . اگر بخواه یم قوانین فیزیک را برا ی محیط ها ی ناهمسانگرد به کار ببریم باید شکل کلی تر آنها را که به شکل تانسوری نوشته می شوند به کار ببریم.

محاسبه ی تانسوری، توسعه ی محاسبه ی برداری است[۴]. تانسورها ابزاری هندسی هستند که شکل کلی تر مفاهیمی مثل اسکالر، بردار و... و روابط خطی بین آنها را بیان می کنند. یک تانسور م ی تواند با آرایه ای چندبعدی از اعداد نشان داده شود. مرتبه یا درجه ی یک تانسور بعد آرا یه ای است که برای نمایش ان لازم است . به عنوان مثال یک نقشه ی دو بعدی باید با یک ماتر یس یعنی یک آرایه ی دوبعدی نشان داده شود یعنی یک تانسور مرتبه ی دوم است، یک بردار م ی تواند با یک آرا یه

ی یک بعد ی نشان داده شود پس یک تانسور مرتبه ی یک است، بنابرا ین یک مقدار عدد ی یک تانسور مرتبه ی صفر است.

برای نوشتن مختصات یک بردار آن را به شکل زی نمایش می ده یم:

$$\vec{a} = a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2 + a_3\hat{e}_3 \qquad (۴-۱)$$

ولی می توان آن را به شکل زی و ساده تر نوشت:

$$\vec{a} = a_i e_i. \qquad (۵-۱)$$

هرگاه یک اند یس در یک عبارت بیش از یک بار استفاده شده باشد نشان دهنده ی جمع روی آن اندیس است که قانون انیشتین نام دارد . اندیس تکرار شونده اند یس آزاد نامیده م ی شود که مقدار ی متناه ی دارد. نمادهایی مثل دلتای کرونکر و نماد لو یچی- ویتا محاسبات تانسور ی را ساده تر م ی کنند. مثلا از نماد لو یچی – ویتا (e_{ijk}) به این شکل استفاده م ی شود که اگر اند یس ها تکرار ی باشند مساوی صفر می شود اگر تعداد جابه جا یی اندیس ها فرد باشد برابر منفی و اگر تعداد جابه جایی اندیس ها زوج باشد برابر مثبت یک می شود[۵].

در نوشتار تانسوری وقتی بین دو اندیس علامت ″ ,″ می آید به معنی مشتق است:

$$a_{\mathrm{i,j}} = \frac{\partial \mathrm{a_i}}{\partial \mathrm{x_j}} \qquad (۶-۱)$$

ضرب داخلی به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$a.b = a_i b_i \qquad (۷-۱)$$

دیورژانس به صورت تانسوری به شکل زیر نوشته می شود:

$$\mathrm{B_j} = \frac{\partial B_{ji}}{\partial x_i} \qquad (۸-۱)$$

که B_{ji} یک تانسور مرتبه ی دوم است که پس از مشتق گیری به تانسور مرتبه ی اول تبدیل می شود. این روش را برای دیورژانس گرفتن از یک تانسور مرتبه ی اول نیز می توان استفاده نمود.

برای نشان دادن ضرب خارجی در بلورهای مایع از نماد لوئیچی ویتا استفاده می شود:

$$a \times b = e_{ijk}\, a_i b_j \hat{e}_k \qquad (۹-۱)$$

دلتای کرونکر یک تانسور مرتبه ی صفر بسیار مفید است که در بسیاری از محاسبات تانسوری ظاهر می شود:

$$\delta_{ij} = \begin{matrix} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{matrix} \qquad (۱۰-۱)$$

یکی از مفاهیم مهم و کاربردی دیگر در مورد تانسورها، تعریف تانسور متقارن و پادمتقارن است . تانسور مرتبه ی دوم A_{ij} را متقارن گویند اگر:

$$A_{ij} = A_{ji} \qquad (۱۱-۱)$$

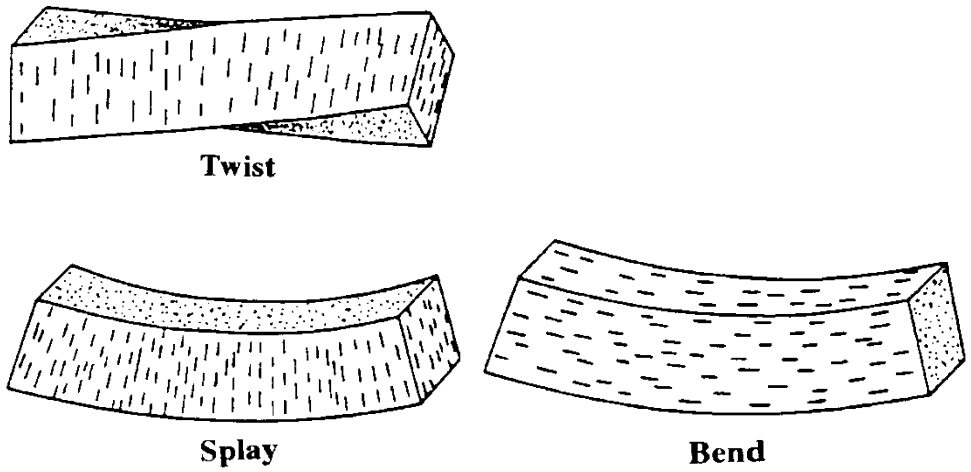
تانسور مرتبه ی دوم پادمتقارن به صورت زیر تعریف می شود[۶]:

$$A_{ij} = -A_{ji} \qquad (۱۲-۱)$$

حال با آشنایی با بعضی از مفاهیم اساسی تانسورها که ابزار ریاضی مطالعه ی محیط های ناهمسانگردی مثل بلورهای مایع هستند، بهتر می توانیم با محیط بلورها ی مایع آشنا شده وقوانین حاکم بر آنها را بشناسیم.

۱-۱-۵ ضرایب کشسانی و انرژی های آزاد

یک بلور مایع نماتیک مانند هر جامد دیگری تحت تاثیر یک میدان اختلالی خارجی، تغییر شکل پیدا می کند. با این وجود یک تفاوت مهم وجود دارد، در جامدات عادی این تغییر شکل می تواند فشار زیادی ایجاد کند زیرا مولکول ها با یک تنش چرخشی جا به جا می شوند. از سوی دیگر این تغییر شکل های چرخشی در بلورهای مایع به علت سیال بودن مولکولها سبب چرخش مولکولها در جهت گشتاور وارد می شود با این دلیل مرکز گرانش مولکولها جا به جایی معنی داری نخواهد داشت و بنابراین انرژی کشسانی حاصله خیلی کوچک خواهد بود.



شکل ۱-۶ سه نوع تغییرشکل جهت گیری مولکول ها در اثرنیروی وارده [۳].

توئیست[1]، اسپلای[2] و بند[3] سه نوع متفاوت تغییر شکل محور هادی در بلورهای مایع نماتیک هستند. از انجا که آنها به تغییرات فضایی $n(r)$ مربوطند پارامترهای اصلی در انرژی های تغییر شکل، شکل های مختلفی از مشتق های فضایی هستند و با پیروی از فرمول نویسی تئوری که اولین با توسط فرانک نوشته شد، چگالی انرژی آزاد این تغییر شکل ها با فرمول های زیر داده می شوند:

اسپلای: $$f_1 = \frac{1}{2}k_1(\nabla.\hat{n})^2 \qquad (۱-۱۳ \text{ الف})$$

توئیست: $$f_2 = \frac{1}{2}k_2(\hat{n}.\nabla\times\hat{n})^2 \qquad (۱-۱۳ \text{ ب})$$

بند: $$f_3 = \frac{1}{2}k_3(\hat{n}\times\nabla\times\hat{n})^2 \qquad (۱-۱۳ \text{ ج})$$

که k_1 ، k_2 و k_3 ضرایب کشسانی فرانک هستند و عموماً از مرتبه ی 10^{-6} دین در دستگاه c.g.s و یا 10^{-11} نیوتن در دستگاه M.K.S هستند.

[1] twist
[2] splay
[3] bend