بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه آزاد اسلامی

واحد تهران مرکزی

دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد (M.SC)

گرایش: آنالیز عددی

عنوان:

تقریبهای وزن دار شبه-ذوزنقه ای از اعداد فازی

استاد راهنما:

دکتر مجید امیرفخریان

استاد مشاور:

دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی

پژوهشگر:

فرهاد منافیان

زمستان ۱۳۹۱

تقدیم به پیشگاه او، که بر بوم تن رنگ جان بخشید

سه گونه روان، سه گونه نیایش

خداوندگارا، کمانی در دست توام. مرا می کش، مهل تا بپوسم

خداوندگارا، چندانم مکش اما، بشکنم

خداوندگارا، چندانم بکش تا بشکنم، باری چه باك از شکستنم

تشکر و قدردانی:

در تهیه پایان نامه ای که در دست شماست، استاد عزیزم جناب آقای دکتر امیرفخریان با سعه صدر ارشاد و راهنمایی‌ام نموده اند. ضمنا جناب آقای دکتر فریبرزی نیز مشاوره ام نموده اند در اینجا لازم می دانم کمال تشکر و قدردانی را از این دو بزرگوار به عمل بیاورم. از دو استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر رشیدی نیا و جناب آقای دکتر ادیبی که در طول تحصیل در مقطع کارشناسی ارشد زحمات فراوانی را از جانب من قبول کرده اند کمال تشکر را نیز دارم، همچنین تحصیل خود تا این مرحله را مدیون همت والا و کمک های مادی و معنوی پدر و مادر عزیزم هستم و زبانم قاصر از ادای سپاس.

بسمه تعالی

تعهدنامه اصالت پایان نامه کارشناسی ارشد

اینجانب فرهاد منافیان دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی با شماره دانشجویی ۸۹۰۹٤۰۵٦۳۰۰ اعلام می‌نمایم که کلیه مطالب مندرج دراین پایان نامه با عنوان: تقریبهای وزن دار شبه-ذوزنقه ای ازاعداد فازی حاصل کار پژوهشی خود بوده و چنانچه دستاوردهای پژوهشی دیگران را مورد استفاده قرار داده باشم، طبق ضوابط و رویه های جاری، آنرا ارجاع داده و در فهرست منابع و مآخذ ذکر نموده ام. علاوه بر آن تاکید می نماید که این پایان نامه قبلا برای احراز هیچ مدرک هم سطح،پایین تر یا بالاتر ارائه نشده و چنانچه در هر زمان خلاف آن ثابت شود، بدینوسیله متعهد می شوم، در صورت ابطال مدرک تحصیلی‌ام توسط دانشگاه، بدون کوچکترین اعتراض آنرا بپذیرم.

تاریخ و امضا

بسمه تعالی

در تاریخ:۱۳۹۱/۱۱/۲۳

دانشجوی کارشناسی ارشد آقای فرهاد منافیان از پایان نامه خود دفاع نموده و با نمره ۱۷/۵ بحرف هفده و نیم و با درجه بسیار خوب مورد تصویب قرار گرفت.

امضا استاد راهنما

فهرست مطالب

چکیده

اخیرا بسیاری از محققان تقریب های بازه ای، مثلثی و ذوزنقه ای از اعداد فازی را مورد مطالعه قرار می دهند. این مطالعات را می توان به دو گروه، کلاس فاصله اقلیدسی و کلاس فاصله نا اقلیدسی افراز نمود. بسیاری از تقریب ها در کلاس فاصله اقلیدسی را میتوان با فرمول هایی محاسبه کرد،اما محاسبه تقریب ها در کلاس دیگر بسیار پیچیده است. در تحقیق حاضر، ما به مطالعه کلاس خاصی از تقریب های غیر خطی با توجه به یک فاصله وزن دار اقلیدسی می پردازیم و آنها را تقریب های وزن دار شبه–ذوزنقه ای می نامیم. تقریب های مفروض تعمیمی از همه تقریب های اخیر در کلاس فاصله اقلیدسی است. در وهله اول ما اعداد فازی را درون یک فضای هیلبرت تعبیه می کنیم و سپس تقریب های وزن دار شبه–ذوزنقه ای را با استفاده از بهترین تقریب ها در زیر مجموعه بسته محدب از فضای هیلبرت محاسبه می کنیم و *در نهایت ما فرمولهایی از نوع ماتریسی که بسیار واضح و روشن نسبت به موارد قبلی است ارائه می کنیم.*

مقدمه

تئوری مجموعه های فازی اولین بار توسط پرفسور لطفعلی زاده،استاد ایرانی الاصل دانشگاه برکلی کالیفرنیا در سال ۱۹٦۵ در مقاله ای با عنوان " مجموعه های فازی" مطرح شد که سرآغاز یک جهان بینی در عرصه ریاضیات و علوم و همچنین گامی نوین در معرفی دیدگاهی واقع گرایانه به حل مسائل علمی دنیای واقعی بود. پرفسور لطفعلی زاده با این تئوری، عدم قطعیت ناشی از ابهامات تفکر انسانی را بیان نمود. اصلی ترین حسن این تئوری، توانایی ارائه داده هایی است که غیر قطعی هستند همچنین این روش قادر به بکارگیری عملکردهای ریاضی در حوزه داده های فازی نیز هست. کاربرد مجموعه های فازی در مسائل تصمیم گیری یکی از مهمترین و کارآمدترین کاربردهای این تئوری در مقایسه با تئوری مجموعه های کلاسیک می باشد. در واقع تئوری تصمیم گیری فازی تلاش می کند که ابهام و عدم قطعیت ذاتی موجود در ترجیحات، اهداف و محدودیت های موجود در مسائل تصمیم گیری را مدل کند. تعلق یا عضویت یک عضو به یک مجموعه مفهومی کاملاً قطعی و دقیق است. بنابراین یک شی یا عضو یک مجموعه است و یا نیست. پس تابع عضویت فقط می تواند دو مقدار صفر یا یک را داشته باشد بدین منظور توصیف تغییرات تدریجی و اندک درجات بین ۰و۱ و مفهوم عضویت درجه بندی شده را اولین بار لطفعلی زاده معرفی کرده است. برای این منظور تابع عضویت مانند μ تعریف می شود که همواره مقادیری از بازه [۱و۰] را شامل می باشد.

حال این سوال پیش می آید که چرا باید از محاسبات فازی استفاده کنیم؟

بدیهی است که جمع آوری اطلاعات و مقادیر دقیق برای توصیف رفتار سیستم های واقعی کاری بسیار دشوار است همچنین مدل سازی ریاضی برای سیستم های واقعی با افزایش پیچیدگی سیستم ها غیر ممکن است لذا با افزایش پیچیدگی سیستم ها، دقت مدل ریاضی کاهش می یابد و در نتیجه نمی توان نظرات قابل قبولی برای سیستم ها ارائه کرد. لذا برای غلبه بر این مشکل، محاسبات فازی راه حل های آسانی برای مسائل پیچیده امروزه ارائه می دهد همچنین محاسبات فازی ساختار محکم و استواری دارند که این دو عامل باعث می شود که این تئوری با سرعت جایگاه خود را در زمینه های مختلف به ویژه مسائل صنعتی پیدا کند. همچنین سیستم های فازی را می توان به عنوان سیستم های خطی در نظر گرفت که می توانند سیستم های واقعی که هر چه قدر پیچیده باشند از روی داده های تجربی و بر اساس محاسبات عددی با دقت خاص تقریب بزنند همچنین محاسبات فازی را می توان از سه دیدگاه مورد بررسی قرار داد:

الف) مؤلفه مهمی از هوش مصنوعی

ب) راه حلی مناسب برای کنار آمدن با مسئله عدم قطعیت

ج) منطقی بی نهایت مقداره که تصمیمی بر مجموعه های کلاسیک است.

همچنین سیستم های فازی، سیستم های مبتنی بر دانش یا قواعد می باشند. قلب یک سیستم فازی یک پایگاه دانش می باشد که از قواعد اگر – آنگاه فازی تشکیل شده است. یک قاعده اگر – آنگاه فازی یک عبارت اگر–آنگاه بوده که بعضی کلمات آن بوسیله توابع تعلق پیوسته مشخص شده اند. با این وجود ما می توانیم یک سیستم فازی را بر اساس این قواعد بسازیم. از آنجا که سیستم فازی

بعنوان کنترل کننده استفاده شده اند آن را "کنترل کننده فازی" می نامیم. به طور خلاصه نقطه شروع ساخت یک سیستم فازی بدست آوردن مجموعه ای از قواعد اگر- آنگاه فازی از دانش افراد خبره یا دانش حوزه مورد بررسی ما می باشد. مرحله بعد ترکیب این قواعد در یک سیستم واحد است.

معمولاً سه نوع سیستم فازی را مورد بحث قرار می دهند:

الف) سیستم های فازی خاص

ب) سیستم های فازی تاکاگی-سوگنو و کانک(TSK)

ج) سیستم های با فازی ساز و غیر فازی ساز

حال این سوال را بیان می کنیم که سیستم های فازی کجا و چگونه استفاده می شود؟ سیستم های فازی را می توان بعنوان کنترل کننده حلقه باز و یا کنترل کننده حلقه بسته مورد استفاده قرار داد هنگامی که بعنوان کنترل کننده حلقه باز است، معمولاً بعضی پارامترهای کنترل را مشخص کرده و لذا سیستم ها مطابق این پارامترها کار می کند. بسیاری از کاربردهای سیستم های فازی در الکترونیک به این دسته تعلق دارند و زمانی که بعنوان کنترل کننده حلقه بسته، استفاده می شود در این حالت خروجی فرآیند را اندازه گیری و بطور همزمان عملیات را کنترل می کند. کاربرد سیستم های فازی در فرآیندها صنعتی به این دسته تعلق دارد. منطق فازی روشی برای پردازش وقایع غیر قطعی ارائه می کند. دقیقاً هر آنچه که در طبیعت و زندگی روزمره با آن در ارتباط هستیم. لذا پاره ای از احتمالات، که ممکن است در اتفاقات روزمره، اتفاق بیافتند. لذا منطق فازی مقابل منطق باینری یا منطق بولی قرار دارد. منطق فازی همچنین برای طراحی سیستم های خبره به کار می رود. که این سیستم ها با

قوانین جهان واقع را شبیه سازی می کند. مانند کنترل خودکار ترافیک، دوربین های فیلمبرداری، ماشین های لباسشویی هوشمند، سیستم های تشخیص هویت از روی اثر انگشت و ...

اخیراً بسیاری از محققان در زمینه اعداد فازی و تقریب های آن تلاشهایی نموده اند. [۲]و [۳] تقریب های بازه ای مثلثی و ذوزنقه ای را به دو کلاس اقلیدسی و غیر اقلیدسی تقسیم بندی نموده اند و هر شاخه را مورد مطالعه و تحقیق گسترده قرار داده اند. تقریب های کلاس بازه اقلیدسی را می توان توسط فرمولهایی از پیش تعیین شده محاسبه نمود. اما در کلاس بازه غیر اقلیدسی محاسبه این فرمولها بسیار پیچیده است پس ما به مطالعه کلاس خاصی از تقریب های غیر خطی با توجه به وزن بازه اقلیدسی می پردازیم و تقریب های تعمیم یافته از تمام تقریب ها را در کلاس بازه اقلیدسی بیان می کنیم و آنها را در این تحقیق " تقریبهای وزن دار شبه-ذوزنقه ای" می نامیم.

فصل اول

معرفی

۱-۱-۱ تعریف: یک زیر مجموعه فازی $\tilde{A}$ از اعداد حقیقی خطی با تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}}: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$

یک عدد فازی نامیده می شود اگر:

الف) نرمال باشد یعنی یک عضو مانند x_0 بطوری که $\mu(x_0) = 1$ وجود داشته باشد.

ب) $\tilde{A}$ محدب فازی باشد یعنی

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq min\left(\mu_{\tilde{A}}(x_1) \Lambda \mu_{\tilde{A}}(x_2)\right) \quad \forall\, x_1, x_2 \epsilon \mathbb{R} \quad \forall \lambda \epsilon [0,1]$$

ج) $\mu_{\tilde{A}}$ نیمه پیوسته بالایی باشد.

د) $supp\ \tilde{A}$ کران دار باشد که $supp\ \tilde{A} = \{x \epsilon R: \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$ تکیه گاه $\tilde{A}$ است.

همچنین تابع عضویت $\tilde{A}(x)$ تعریف می شود که $\tilde{A}: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ L_{\tilde{A}}(x) & a < x \leq b \\ 1 & b < x \leq c \\ r_{\tilde{A}}(x) & c < x \leq d \\ 0 & d < x \end{cases}$$

که $L_{\tilde{A}}$ و $r_{\tilde{A}}$ به ترتیب تابع نا افزایشی و ناکاهشی است (همان معکوس A_LوA_U که در قسمت بعدی معرفی خواهد شد) که $L_{\tilde{A}}$ و $r_{\tilde{A}}$ به ترتیب گستره چپ و راست از $\tilde{A}$ نامیده می شود.

همچنین به معرفی یک عدد فازی که در کل این پایان نامه کاربرد دارد می پردازیم.

۱-۱-۲ نکته[۲] : یک عدد دلخواه فازی $\tilde{A}$ را می توان به وسیله یک زوج مرتب از توابع سمت چپ پیوسته،

$[A_L(t), A_U(t)], t \epsilon [0,1]$ که در آن

الف) A_L در $[0,1]$ افزایشی است.

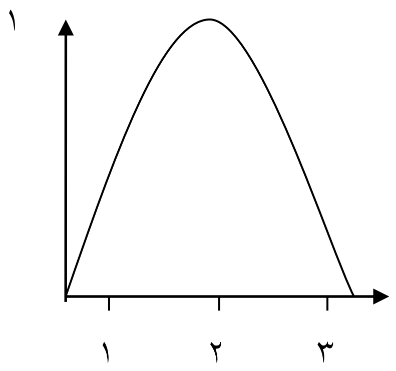
ب) A_U در $[0,1]$ کاهشی است.

ج) $A_U(t) \leq A_L(t)$ برای همه $t\epsilon[۰,۱]$

حال به بررسی شرایط α _ برشها می پردازیم و بدین صورت تعریف می کنیم:

۱-۲-۱ $\boldsymbol{\alpha}$ - برشها:

با در نظرگرفتن مجموعه فازی $\tilde{A} \in F(\mathbb{R})$ و برای هر $\tilde{A}(X), X \in \mathbb{R}$ درجه عضویت X را به $\tilde{A}$ بیان می کند. با توجه به این که $\mathbb{R}$ محور افقی و $\tilde{A}(X)$ محور عمودی تابع $\tilde{A}(X)$ را می سازد نمایش گرافیکی زیر را نمایش عمودی مجموعه فازی می گویند.



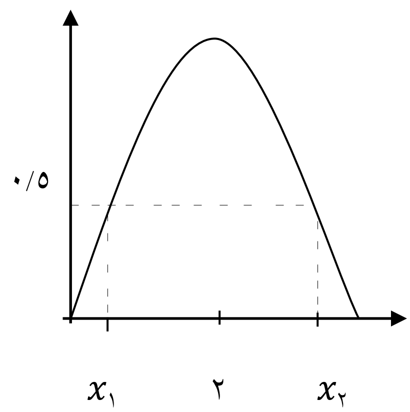
در مقابل این نمایش، نمایش دیگری موسوم به نمایش افقی است که در آن برای تمامی درجات عضویت $\boldsymbol{\alpha}$ متعلق به یک زیر مجموعه متناهی از بازه بسته $[۰,۱]$ می توان عناصر$\mathbb{R}$ را بر اساس میزان درجه عضویت آنها در مجموعه فازی طبقه بندی نمود که برای این کار به تعریف زیر نیازمندیم.

۱-۲-۲ $\boldsymbol{\alpha}-$ برش:

$\boldsymbol{\alpha}-$ برش مجموعه فازی $\tilde{A}$ را با $\tilde{A}_{\boldsymbol{\alpha}}$ نمایش می دهیم یک مجموعه کریسپ (غیر فازی) است و برای هر $\boldsymbol{\alpha}$ در بازه $[۰,۱]$، $\tilde{A}_{\boldsymbol{\alpha}}$ برابر است با:

$$\widetilde{\mathrm{A}}_{\boldsymbol{\alpha}} = \{x \epsilon \mathbb{R} \big| \tilde{A}(x) \geq \boldsymbol{\alpha}\} \quad \text{یا} \quad \widetilde{\mathrm{A}}_{\boldsymbol{\alpha}} = \{x \epsilon \mathbb{R} | \mu_{\widetilde{\mathrm{A}}}(x) \geq \boldsymbol{\alpha}\}$$

مثال: مجموعه فازی حدود ۲ را در نظر بگیرید:



$\boldsymbol{\alpha}-$ برش مجموعه فوق برای $\boldsymbol{\alpha} = ۰/۵$ برابر است با $\widetilde{\mathrm{A}}_{۰/۵} = [x_۱, x_۲]$ اگر $\widetilde{\mathrm{A}}(\mathrm{x})$ توسط تابع تحلیلی زیر نمایش داده شود:

$$\tilde{A}(X) = e^{-(x-۲)^۲}$$

و قرار دهیم $\tilde{A}(X) = ۰/۵$ خواهیم داشت:

$$Ln ۰/۵ = -(x-۲)^۲ \Rightarrow x - ۲ = \pm\sqrt{\mathrm{Ln}۲} \longrightarrow x_۱ = ۲ - \sqrt{\mathrm{Ln}۲}, x_۲ = ۲ + \sqrt{\mathrm{Ln}۲}$$

پس خواهیم داشت: $\widetilde{A}_{۰/۵} = [۲ - \sqrt{Ln۲}, ۲ + \sqrt{Ln۲}]$ در کل برای هر $\boldsymbol{\alpha}$ دربازه بسته $[۰,۱]$، $\boldsymbol{\alpha}$- برش، $\tilde{A}_{\boldsymbol{\alpha}}$ برابر خواهد بود با:

$$\widetilde{A}_{\boldsymbol{\alpha}} = [۲ - \sqrt{Ln\frac{۱}{\boldsymbol{\alpha}}}, ۲ + \sqrt{Ln\frac{۱}{\boldsymbol{\alpha}}}]$$

حال با توجه به تعریف $\boldsymbol{\alpha}$ - برشها، نمایش $t\epsilon[۰,۱]$ و $\widetilde{A} = [A_L(t), A_U(t)]$، یک $\boldsymbol{\alpha}$ - برش از $\widetilde{A}$ نامیده می شود. پس طبق تعریف $\boldsymbol{\alpha}$ - برشها خواهیم داشت $\widetilde{A}_{\boldsymbol{\alpha}} = \{x\epsilon\mathbb{R}: \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \boldsymbol{\alpha}\}$ که یک $\boldsymbol{\alpha}$ - برش از یک عدد فازی $\tilde{A}$ است.می دانیم که $\boldsymbol{\alpha}$ - برش یک عدد فازی بازه‌ای بسته مانند $[A_L(\boldsymbol{\alpha}), A_U(\boldsymbol{\alpha})] = \widetilde{A}_{\boldsymbol{\alpha}}$ است که در آن

$$\tilde{A}_L(\boldsymbol{\alpha}) = \inf\{x \in \mathbb{R}: \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \boldsymbol{\alpha}\} \text{ و } \quad \tilde{A}_U(\boldsymbol{\alpha}) = \sup\{x \in \mathbb{R}: \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \boldsymbol{\alpha}\}$$

حال به معرفی اعداد ذوزنقه ای و مثلثی فازی می پردازیم که به دو شکل زیر این تعاریف را انجام خواهیم داد.

۱-۲-۳ تعریف: $\tilde{A}$ عدد فازی ذوزنقه ای نامیده می شود اگر تابع عضویت $\tilde{A}(x)$ به فرم زیر باشد.

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} ۰ & x \leq b - \alpha \\ \dfrac{x - b + \alpha}{\alpha} & b - \alpha < x \leq b \\ ۱ & b < x \leq c \\ \dfrac{c + \beta - x}{\beta} & c < x \leq c + \beta \\ ۰ & c + \beta < x \end{cases}$$

که پارامترهای α و β اعداد حقیقی مثبت و به ترتیب گستره چپ و راست نامیده می شود که با فرض محدب بودن مجموعه فازی (تابع عضویت مجموعه فازی قسمت افزایشی و کاهشی متواتر نداشته باشد مانند آنچه که در قسمت اول توضیح داده شد (همان$\mathrm{L}_{\tilde{\mathrm{A}}}$ و$r_{\tilde{\mathrm{A}}}$))عرض $\tilde{A}$ بدین شکل تعریف می شود.

$$w(\tilde{A}) = \sup(\mathrm{supp}(\tilde{A})) - \inf(\mathrm{supp}(\tilde{A}))$$

که تعریف *inf* و *sup* برای اعداد فازی بدین صورت است که a را $sup(\tilde{A})$ گوییم اگر و فقط اگر برای هر $x \in \tilde{A}$ داشته باشیم $x \leq a$ و برای هر $\varepsilon > ۰$ وجود داشته باشد $x \in \tilde{A}$ طوری که $x > a - \varepsilon$

و b را $inf\ (\tilde{A})$ گوییم اگر و فقط اگر برای هر $x \in \tilde{A}$ داشته باشیم $x \geq b$ و برای هر $\varepsilon > ۰$ وجود داشته باشد $x \in \tilde{A}$ طوری که $x < b + \varepsilon$.

۱-۲-٤ تعریف[۳] : $\tilde{A} \in F(\mathbb{R})$ عدد فازی ذوزنقه ای است اگر $\boldsymbol{\alpha}-$ برشها به فرم زیر باشند.

$$[A_L(t), A_U(t)] = [a - \sigma(۱ - t), b + \beta(۱ - t)] \qquad a \leq b\ ,\ \ \sigma, \beta \geq ۰ \quad (۱,۱)$$

۱-۲-۵ تعریف : $\tilde{A}$ عدد فازی، یک عدد فازی مثلثی است اگر تابع عضویت $\tilde{A}(x)$ به فرم زیر باشد.

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} ۰ & x \leq b - \alpha \\ \dfrac{x - b + \alpha}{\alpha} & b - \alpha < x < b \\ ۱ & x = b \\ \dfrac{b + \beta - x}{\beta} & b < x \leq b + \beta \\ ۰ & b + \beta < x \end{cases}$$

که پارامترهای α و β اعداد حقیقی مثبت و به ترتیب گستره چپ و راست نامیده می شود.

۱-۲-۶ تعریف : $\tilde{A} \in F(\mathbb{R})$ عدد فازی مثلثی است اگر $\alpha-$ برشها به فرم زیر باشد.

$$[A_L(t), A_U(t)] = [c - \sigma(1-t), c + \beta(1-t)] \qquad c \in \mathbb{R} \quad , \quad \sigma = \beta = 0$$

در سال ۲۰۰۸ نسیبوف[1] و پکر[2] با قرار دادن S_Lو$S_R > 0$ یک عدد فازی ذوزنقه ای تعمیم یافته را به صورت زیر پیشنهاد داده اند که

$$[A_L(t), A_U(t)] = \left[a - \sigma(1-t)^{1/s_L}, b + \beta(1-t)^{1/s_R}\right] \quad a \leq b \ , \ \sigma, \beta \geq 0 \qquad (۱-۲)$$

و چنین عددی را $(S_L$و$S_R)$ شبه- ذوزنقه ای می نامیم. همچنین به طور مشابه یک عدد $(S_L$و$S_R)$ شبه – ذوزنقه ای $(S_L$و$S_R)$ شبه مثلثی است اگر $a = b = c$ یعنی

$$[A_L(t), A_U(t)] = \left[c - \sigma(1-t)^{1/s_L}, c + \beta(1-t)^{1/s_R}\right] \qquad c \in \mathbb{R}\,,\ \sigma, B \geq 0 \qquad (۱-۳)$$

اگر $S_L = S_R = 1$ در نتیجه روابط (۱-۲) و (۱-۳) به ترتیب اعداد فازی ذوزنقه ای و مثلثی می باشند. $d(.,.)$ یک فاصله دلخواه بر روی $F(\mathbb{R})$ و $\tilde{A} \in F(\mathbb{R})$ در نظر می گیریم. پس $(S_L$و$S_R)$ شبه-ذوزنقه ای (به ترتیب $(S_L$و$S_R)$ شبه-مثلثی، ذوزنقه ای، مثلثی، مثلثی متقارن، بازه) تقریبی از اعداد فازی $\tilde{A}$ با توجه به فاصله $d(.,.)$ که یک عدد فازی $(S_L$و$S_R)$ شبه-ذوزنقه ای (به ترتیب $(S_L$و$S_R)$ شبه-مثلثی، ذوزنقه ای، مثلثی، مثلثی متقارن، بازه) می باشد و فاصله $(\tilde{A}, \tilde{x})$ که در آن $\tilde{x}$ یک عدد فازی $(S_L$و$S_R)$شبه-ذوزنقه ای (به ترتیب $(S_L$و$S_R)$ شبه مثلثی، ذوزنقه ای مثلثی، مثلثی متقارن،بازه) را حداقل می‌سازد. همچنین برای تقریبهای شکل یافته خطی از اعداد فازی

۱.Nasibov ۲.Peker