دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی محض

پایان نامه براي دریافت درجه‌ی دکتری

رشته رياضي محض

عنوان

نتایجی درباره نقاط ثابت چندتابعی‌ها و خاصیت درون‌بری مطلق فضاهای متریک

استاد راهنما

دکتر شهرام رضاپور

استاد مشاور

دکتر محمدحسین ستاری

پژوهشگر

حجت افشاری

آذر۱۳۹۱

تبریز- ایران

تقدیم به

همسرم

و تقدیم به

مادر و روان پاک پدرم


بسم الله الرحمن الرحيم

سپاسگزاری

خداوند بزرگ و منان را به خاطر الطاف همیشگی اش و نیز اینکه مرحله‌ی دیگری از دوران تحصیلی ام را به پایان می‌رسانم، سپاسگزارم.

وظیفه خویش می دانم از استاد گرامی و فاضل جناب آقای پروفسور رضاپور به عنوان استاد راهنما که در کمال سعه صدر و حسن خلق همواره در نگارش این پایان نامه نگارنده را مورد لطف و محبت خود قرار دادند همچنین از مساعدت استاد ارجمند جناب آقای دکتر ستاری که زحمت مشاوره را متقبل شدند، نهایت سپاس و قدردانی خود را ابراز دارم.

ضمنا از تمام اساتید بزرگوارم که طی دوران تحصیلم فرصت خوشه چینی از خرمن اندوخته خویش را در اختیار بنده قرار داده‌اند، مراتب سپاسگزاری و قدردانی خویش را ابراز می‌دارم.

از همسرم به خاطر فداکاری و زحماتی که در مدت تحصیل و نیز در طی تدوین این رساله متحمل شدند، به صورت ویژه تشکر می‌نمایم.

چکیده

نظریه نقطه ثابت در حل مسائل معادلات دیفرانسیل، نظریه بازی‌ها، اقتصاد و بسیاری از شاخه های دیگر به‌کار گرفته می‌شود. محققین بسیاری تلاش نموده‌اند بین نظریه نقطه ثابت و گرایش‌های دیگر ریاضی، بخصوص توپولوژی جبری ارتباط برقرار کنند. بهترین روش برای ایجاد ارتباط، بررسی خواص توپولوژیک مجموعه نقاط ثابت چندتابعی‌ها است. همچنین افراد بسیاری سعی نموده‌اند نتایجی را در این زمینه با به‌کارگیری شرایط مختلف برای چندتابعی‌ها بدست آورند. در سال ۲۰۰۷، سنت‌مارین[۱] نتایجی را ارائه نمود که نشان می‌داد تحت چه شرایطی مجموعه نقاط ثابت مشترک دو چندتابعی می‌تواند درون‌بری مطلق برای فضاهای متریک باشد. در این رساله نتایج سنت‌مارین را تعمیم خواهیم داد. در سال ۲۰۱۲، صامت[۲] و همکارانش روش جدیدی را در نظریه نقطه ثابت با به‌کارگیری تابعی مانند α به‌عنوان یک ضریب ارائه نمودند. نتایج آنان بسیاری از نظریه‌های قدیمی مرتبط نقطه ثابت بخصوص روی فضاهای متریک مرتب را تعمیم می‌داد. در این رساله با بکارگیری متد سوزوکی[۳] و نیز به‌کارگیری روش جدید صامت و همکارانش، نتایجی ارائه خواهد شد که نتایج قبلی را بهبود خواهد بخشید. در سال‌های اخیر، نتایج متعددی درباره‌ی روش‌های تکراری برای نگاشت‌های مختلف ازجمله نگاشت‌های غیرمنبسط و (α,β)- هیبریدی تعمیم یافته ارائه شده اند. در فصل آخر این رساله به بررسی برخی روش‌های تکراری برای نگاشت‌های (α,β)- هیبریدی می‌پردازیم و نتایجی جدید بررسی می‌شوند که برخی نتایج قدیمی مرتبط در این زمینه را تعمیم می‌دهند.

کلمات کلیدی

درون‌بری مطلق، روش سوزوکی، KS-چندتابعی، نگاشت (α,β)-هیبریدی تعمیم‌یافته.

---

[۱] Sintamarian

[۲] Samet

[۳] Suzuki

فهرست مطالب

عنوان صفحه

پیشگفتار

نظریه نقطه ثابت، به خاطر کاربرد آن در حل معادلات دیفرانسیل و همچنین کاربرد آن در سایر شاخه های ریاضیات و نیز سایر علوم به زمینه مهمی از مطالعه در ریاضیات محض وکاربردی تبدیل شده است. قضیه نقطه ثابت باناخ معروف به اصل انقباضی باناخ، وجود یک نقطه ثابت منحصر بفرد از یک خودنگاشت انقباضی را در فضاهای متریک کامل تضمین می‌کند. این قضیه در سال ۱۹۲۲ توسط استفان باناخ[۱] ریاضیدان لهستانی مطرح شد ([۱۶]).

مسئله‌ی مهمی که ارتباط بین توپولوژی جبری و نظریه نقطه ثابت را برقرار می‌کند این است که تحت چه شرایطی خواص مقادیر یک چندتابعی به وسیله مجموعه نقاط ثابت آن به ارث برده می‌شود. برای بعضی چندتابعی‌ها این مسئله توسط اسکرمیر[۲]در ۱۹۷۰، همچنین توسط ریسری[۳]در ۱۹۸۷مطرح شد. برای مثال اسکرمیر طی مقاله‌ای ثابت کرد که اگر مقادیر یک چندتابعی انقباضی $F : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$، بسته، کراندار و محدب باشند مجموعه نقاط ثابتF فشرده است. در ادامه کارهای او محققانی دیگر نتایج فوق را با شرایطی متفاوت ثابت کردند.

در فصل اول این رساله تعاریف و مفاهیم مقدماتی آورده می‌شود.

فصل دوم، شامل مبحث درون‌بری مطلق و تعمیم کارهای سنت‌مارین می‌باشد.

در سال ۲۰۰۷، و در ادامه‌ی کارهای اسکرمیر و ریسری، سنت‌مارین با ارائه دو مقاله در این زمینه نتایج آنها را تعمیم داد. به این صورت که مجموعه نقاط ثابت مشترک دو چندتابعی که در یک

[۱] Banach

[۲] Schirmer

[۳] Ricceri

مفهومی تحت عنوان خاصیت انتخاب صدق کنند و در شرایط نوع انقباضی ولی متفاوت با آن که در واقع تعمیمی از نگاشتهای انقباضی می‌باشند، صادق باشند درون‌بری مطلق برای فضاهای متریک می‌باشد. در این فصل ما ثابت خواهیم کرد که شرایط چریچ[۱] و سنت‌مارین معادل بوده و به‌این ترتیب نتایج مطرح شده توسط سنت‌مارین برای چندتابعی‌هایی از نوع چریچ برقرار است. همچنین با درنظر گرفتن شرایط متفاوت حیطه مجموعه‌هایی را که از نوع مجموعه نقاط ثابت یک یا دو چندتابعی بوده و درون‌بری مطلق برای فضاهای متریک هستند را افزایش خواهیم داد. در بخش دوم این فصل درون‌بری مطلق مجموعه‌های وابسته به توابع دومتغیره با درنظر گرفتن شرایط خاص بررسی می‌شود.

فصل سوم شامل درون‌بری مطلق مجموعه نقاط ثابت چندتابعی‌هایی از نوع کیکاوا-سوزوکی می‌باشد.

فرض کنید T یک نگاشت در فضای متریک کامل باشد. ما ساختارهایی همچون محدب و باناخ بودن فضا را در نظر نمی‌گیریم هزاران قضیه وجود دارد که دلیل بر وجود نقطه ثابت نگاشت T می‌باشند و می‌توان آنها را در چهار گروه زیر دسته بندی کرد.

الف) نوع لیدر[۲]([۳۵]): در این گروه T یک نقطه ثابت منحصربفرد دارد و به ازای هر $x \in X$، $\{T^n x\}$ همگرا به نقطه ثابت است. این نوع نگاشت‌ها را عملگر پیکارد می‌نامیم.

ب) نوع انامد[۳]: در این نوع Tیک نقطه ثابت منحصربفرد دارد و $\{T^n x\}$ لزوما همگرا به نقطه ثابت نیست.

ج) نوع سابراهمانیام[۴]([۴۶]): در این گروه Tممکن است بیش از یک نقطه ثابت داشته باشد و به ازای هر $x \in X$، $\{T^n x\}$ همگرا به یک نقطه ثابت است که این نگاشتها را عملگر ضعیفا

[۱] Ciric

[۲] Leader

[۳] Unnamed

[۴] Subrahmanyam

پیکارد می‌نامیم.

د) نوع کریستی ([۱۹]): در این نوع ممکن است T بیش از یک نقطه ثابت داشته باشد و $\{T^n x\}$ لزوما همگرا به نقطه ثابت نیست.

اگر X یک فضای متریک کامل باشد هر نگاشت انقباضی و هر نگاشت کانان روی X، یک نقطه ثابت منحصربفرد دارند. همچنین همه شرایط مستقل هستند به طوری که یک نگاشت انقباضی وجود دارد که کانان نیست، و یک نگاشت کانان وجود دارد که انقباضی نیست. بنابراین نمی‌توانیم همه این شرایط را مستقیما با هم مقایسه کنیم.
در راستای کارهای فوق سوزوکی نتایجی قوی‌تر از آنها به‌دست آورد، و در سال ۲۰۰۸، نگاشت‌های انقباضی و نگاشت‌های کانان و بسیاری از نگاشت‌های انقباضی دیگر را تعمیم داد، به‌طوریکه این تعمیم‌ها، تعمیم‌هایی واقعی هستند. (با توجه به‌اینکه در سال ۲۰۱۱، رضاپور[۱] و حملبرانی[۲] ثابت کردند که بعضی از تعمیم‌ها واقعا تعمیم نیستند).
در فصل سوم ما نتایج سنت‌مارین را برای چندتابعی‌های نوع سوزوکی ثابت خواهیم کرد و مثالی ارائه خواهیم داد که در شرایط سنت‌مارین صدق نکند ولی در شرایط مذکور صدق کند. در ادامه فصل سه همان نتایج را برای چندتابعی‌هایی که توسط آل‌عمرانی‌نژاد[۳] و رضاپور در سال ۲۰۱۱، مطرح شدند و در واقع تعمیم‌هایی از نتایج سوزوکی هستند ثابت خواهیم کرد.

در فصل چهارم نگاشت‌های غیرمنبسط و نگاشت‌های (α, β)-هیبریدی تعمیم‌یافته و متد تکراری مان و کراسنوسلسکی آورده می‌شود.
در سال ۱۹۷۳ براک[۴] نگاشتهای غیرمنبسط را با وارد کردن مبحث نگاشتهای قویا غیرمنبسط[۵]

[۱] Rezapour

[۲] Hamlbarani

[۳] Aleomraninejad

[۴] Bruck

[۵] Firmly nonexpansive

تعمیم داد. به‌اینصورت که اگر $(H, <.,.>)$ یک فضای هیلبرت[۱] حقیقی و C یک زیر مجموعه ناتهی از H باشد، نگاشت $T : C \to H$ را قویا غیرمنبسط نامند اگر به ازای هر $r > 0$ و $x, y \in C$ نامساوی زیر درست باشد

$$\|Tx - Ty\| \leq \|r(x - y) + (1 - r)(Tx - Ty)\|.$$

یک نگاشت $T : C \to H$، شبه غیرمنبسط[۲] گفته می شود هرگاه $F(T)$ ناتهی بوده و به ازای هر $x \in C$ و هر $z \in F(T)$ داشته باشیم

$$\|Tx - z\| \leq \|x - z\|.$$

در سال ۲۰۰۸ کوساکا[۳] و تاکاهاشی[۴] نگاشتهای غیرانبساطی را مطرح کرده و در سال ۲۰۱۰ قضایایی از همگرایی قوی و ضعیف را در فضاهای هیلبرت برای نگاشتهای غیرانبساطی ثابت نمودند. در ادامه‌ی این کارها آیوما[۵] و کوساکا برخی از نتایج آنها را توسعه دادند، از طرفی آیوما، ایموتو[۶]، کوساکا و تاکاهاشی بعضی از نتایج نقطه ثابت را در مورد نگاشتهای $\lambda-$هیبریدی ثابت کردند.

در این فصل، ما تعمیمی برای نگاشت‌های $\alpha-$ غیرمنبسط ارائه خواهیم داد و برخی از نتایج فوق را تحت شرایط متفاوت ثابت می‌کنیم که نتایج قبلی را تعمیم می‌دهد.

ضمنا لازم به ذکر است که مقالات [۱]، [۲]، [۳]، [۴]، [۵] و [۶] از این رساله استخراج شده اند.

---

[۱] Hilbert

[۲] Quasi-nonexpansive

[۳] Kohsaka

[۴] Takahashi

[۵] Aoyama

[۶] Iemoto

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱-۱. *فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. گردایه $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های X را موضعا متناهی نامند هرگاه هر عضو X یک همسایگی داشته باشد که فقط تعداد متناهی عضو $\mathcal{A}$ را قطع کند.*

تعریف ۱-۲. *فضای توپولوژیک X را پیرا فشرده نامند هرگاه هاسدورف بوده و هر پوشش باز آن دارای یک زیر پوشش باز موضعا متناهی باشد.*

تعریف ۱-۳. *فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیک باشند. چندتابعی $F : X \to 2^X$ را نیم پیوسته بالایی نامند هرگاه برای هر زیر مجموعه بسته B از X، $F^{-1}(B)$ در X بسته باشد. همچنین F را نیم‌پیوسته پایینی نامند هرگاه برای هر زیر مجموعه باز A از X، $F^{-1}(A)$ در X باز باشد.*

تعریف ۱-۴. *فرض کنید $\mathcal{M}$ گردایه تمام فضاهای متریک باشد، $X \in \mathcal{M}$ و E یک خانواده از زیرمجموعه های بسته X با خواص زیر باشد:*

(i) اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ یک خانواده در E باشد، آن گاه $\cap_{i\in I} A_i \in E$.

(ii) به ازای هر عدد طبیعی k و هر $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$، مجموعه

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \cap\{A : A \in E; x_1, x_2, \ldots, x_k \in A\}$$

همبند باشد.

(*iii*) *به ازای هر* $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ *چنان موجود باشد که برای هر* $A \in E$، *هر عدد طبیعی* k *و هر* $x_1, x_2, \ldots, x_k \in O_\delta(A)$ *رابطه زیر برقرار باشد*

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_k) \subset O_\epsilon(A),$$

که در آن $O_\delta(A)$ *همسایگی مجموعه* A *به شعاع* δ *است.*

(*iv*) *برای هر* $x \in X$ *و* $r > 0$ *و نیز برای هر* $A \in E$ *داشته باشیم*

$$cl(A \cap B(x, r)) \in E.$$

دراین حالت E *را یک خانواده مایکل*[1] *می‌نامند.*

فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. مجموعه تمام زیرمجموعه‌های ناتهی X را با 2^X نشان می‌دهند. مجموعه نقاط ثابت چندتابعی $F : X \to 2^X$ را که با $\mathcal{F}_F$ نمایش می‌دهند، به صورت $\mathcal{F}_F = \{x \in X : x \in F(x)\}$ تعریف می‌کنند.

ضمنا مجموعه نقاط ثابت مشترک دو چندتابعی F_1 و F_2 را با $(\mathcal{CF})_{F_1, F_2}$ نشان داده و به صورت $(\mathcal{CF})_{F_1, F_2} = \{x \in X : x \in F_1(x) \cap F_2(x)\}$ تعریف می‌کنند.

تعریف ۱-۵. *فرض کنید* X *و* Y، *دو مجموعه ناتهی و* $F : X \to 2^Y$ *یک چندتابعی باشد. نگاشت* $\varphi : X \to Y$ *که برای هر* $x \in X$ *داشته باشیم* $\varphi(x) \in F(x)$، *یک **انتخاب** از* F *نامیده می‌شود.*

مجموعه تمام اعداد صحیح نامنفی را با $\mathbb{N}_0$ و مجموعه اعداد حقیقی نامنفی را با $\mathbb{R}_+$ نمایش می‌دهند.

فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد، $x_0 \in X$ و $r > 0$. مجموعه $B(x_0, r)$ را به صورت $B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\}$ تعریف می‌کنند و $P_b(X)$ نمایشگر تمام عناصری از 2^X است

[1] Michael

که کراندار باشند.

همچنین تابعک $D : 2^X \times 2^X \to \mathbb{R}_+$ را به ازای هر $A, B \in 2^X$ به صورت

$$D(A,B) = \inf\{d(a,b) | a \in A, b \in B\}$$

تعریف می‌کنند. و متریک هاوسدورف $H : 2^X \times 2^X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ به صورت

$$H(A,B) = \max\{\sup_{a\in A} D(a,B), \sup_{b\in B} D(b,A)\}$$

تعریف می‌شود. در این رساله، برای هر فضای توپولوژیک X، مجموعه تمام زیر مجموعه‌های بسته و ناتهی X را با $P_{cl}(X)$ نمایش می‌دهیم. همچنین برای هر فضای خطی X، مجموعه تمام زیر مجموعه‌های محدب و ناتهی آن را با $P_{cv}(X)$ نشان می‌دهیم.

فرض کنید C یک فضای توپولوژیک باشد. اگر برای هر فضای توپولوژیک پیرافشرده T و برای هر $A \in P_{cl}(T)$ و نیز برای هر تابع پیوسته $\psi : A \to C$، تابعی پیوسته مانند $\varphi : T \to C$ چنان موجود باشد که $\varphi|_A = \psi$، آنگاه C را درون‌بری مطلق برای فضاهای پیرافشرده نامند. مشابها می‌توان درون‌بری مطلق برای فضاهای متریک را تعریف نمود.

برای یک فضای باناخ E، $X \in P_{cl,cv}(E)$ و چندتابعی انقباضی $F : X \to P_{cl,cv}(X)$، ریسری[۱] ثابت کرد که $\mathcal{F}_F = \{x \in X : x \in F(x)\}$ درون‌بری مطلق برای فضاهای پیرافشرده است([۴۰]).

بریسان[۲]، کلینا[۳] و فریسکووسکی[۴] نتیجه‌ای مشابه را برای چندتابعی‌های انقباضی به ازای یک فضای اندازه T روی $L^1(T,E)$ ثابت کردند([۱۳]).

در ۱۹۹۶ گارنیویز[۵]، مارونا[۶] و اسلوسارسکی[۷] نتایج فوق را برای چندتابعی‌های انقباضی که

---

[۱] Ricceri

[۲] Bressan

[۳] Cellina

[۴] Fryszkowski

[۵] Gorniewicz

[۶] Marano

[۷] Slosarski

مقادیرشان مجموعه‌های کراندار، بسته و ناتهی باشند، با به کار بردن تعریفی به نام خاصیت انتخاب، که در زیر بیان می‌شود توسیع دادند.

تعریف ۱-۶. *فرض کنید $X \in \mathcal{M}$، $\mathcal{D} \in P(\mathcal{M})$ و $F : X \to P_{b,cl}(X)$ یک چندتابعی نیم‌پیوسته پایینی باشد. گوییم F نسبت به $\mathcal{D}$ خاصیت انتخاب دارد هرگاه به ازای هر $Y \in \mathcal{D}$ و تابع پیوسته $f : Y \to X$ و هر تابعک پیوسته $g : Y \to (\circ, \infty)$ که برای هر $y \in Y$،*

$$G(y) = \overline{F(f(y)) \cap B(f(y), g(y))} \neq \phi$$

و هر $A \in P_{cl}(Y)$ و هر انتخاب پیوسته $\psi : A \to X$ از $G|_A$، یک توسیع پیوسته مانند $\varphi : Y \to X$ که یک انتخاب برای G باشد، وجود داشته باشد.

اگر $\mathcal{D} = \mathcal{M}$، گوییم F خاصیت انتخاب دارد و با $F \in SP(X)$ نشان می‌دهیم.

در سال ۱۹۸۷ ریسری قضیه زیر را ثابت کرد([۴۰]).

قضیه ۱-۱. *فرض کنید E یک فضای باناخ، X زیرمجموعه بسته، محدب و ناتهی از E و φ یک چندتابعی انقباضی با مقادیر بسته و محدب از X به توی خودش باشد. در این صورت $Fix(\varphi)$ درون‌بری مطلق برای فضاهای متریک می‌باشد.*

قضیه ۱-۲. *هر فضای متریک پذیر، پیرافشرده است.*

قضیه ۱-۳. *فرض کنید X یک فضای نرمال و A یک زیرمجموعه بسته آن باشد. در این صورت*

(i) *هر نگاشت پیوسته از A در بازه بسته $[a, b]$ از $\mathbb{R}$ را می‌توان به یک نگاشت پیوسته از همه X گسترش داد،*

(ii) *هر نگاشت پیوسته از A در خط حقیقی $\mathbb{R}$ را می‌توان به یک نگاشت پیوسته از همه X در $\mathbb{R}$ گسترش داد.*

قضیه ۱-۴. ([۲۵]) *فرض کنید X یک درون‌بری مطلق کامل و $\varphi : X \to ۲^X$ چندتابعی انقباضی باشد. اگر یک خانواده مایکل E از زیرمجموعه‌های X چنان موجود باشد که به ازای هر $x \in X$، $\varphi(x) \in E$، در این صورت $Fix(\varphi)$ درون‌بری مطلق برای فضاهای متریک است.*

قضیه ۱-۵. ([۲۵]) *فرض کنید X یک زیرمجموعه بسته، محدب و ناتهی از فضای باناخ E و $\varphi : X \to 2^X$ یک چندتابعی انقباضی باشد. اگر برای هر $x \in X$، $\varphi(x)$ محدب باشد در این صورت $Fix(\varphi)$، یک درون‌بری مطلق می‌باشد.*

در سال ۲۰۰۸ و ۲۰۰۹ سنت‌مارین با ارائه دو مقاله در همین زمینه نتایج فوق را برای چندتابعی‌ها از نوع انقباضی ولی متفاوت با انقباضی ثابت کرد.

در این رساله کارهای فوق برای نگاشت های سوزوکی[۱]، نگاشت‌هایی از نوع سوزوکی، نگاشت‌هایی از نوع سامت[۲]، همچنین برای چندتابعی‌های دومتغیره و بالاخره برای چندتابعی‌های از نوع انقباضی ولی متفاوت با آن بررسی می‌شود.

[۱] Suzuki

[۲] Samet

فصل ۲

درون‌بری مطلق مجموعه نقاط ثابت چندتابعی‌ها

۲-۱ درون‌بری مطلق مجموعه نقاط ثابت مشترک دو چندتابعی

یک مسئله جالب در نظریه نقطه ثابت این است که تحت چه شرایطی خواص مقادیر یک چندتابعی به وسیله مجموعه نقاط ثابت آن به ارث برده می‌شود. برای بعضی چندتابعی‌ها این مسئله توسط اسکرمیر در ۱۹۷۰ و همچنین توسط ریسری در ۱۹۸۷ مطرح شد. برای مثال اسکرمیر ثابت کرد که اگر مقادیر یک چندتابعی انقباضی $F : \mathbb{R} \to P(\mathbb{R})$ بسته، کراندار و محدب باشند، آن‌گاه مجموعه نقاط ثابت F فشرده است.

در ۱۹۹۶ گارنیوز، مارونا و اسلوسارسکی قضیه زیر را ثابت کردند ([۲۵]).

قضیه ۲-۱. *فرض کنید X یک درون‌بری مطلق کامل، $F : X \to 2^X$ چندتابعی انقباضی باشد و $F \in SP(X)$. در این صورت $\mathcal{F}_F$ یک درون‌بری مطلق کامل است.*

اثبات. چون F چندتابعی انقباضی است، عدد $0 < l < 1$ چنان موجود است که به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $H(F(x), F(y)) < ld(x,y)$. فرض کنید $q \in (1, l^{-1})$. در این صورت

$ql < ۱$. اگر Y یک فضای متریک، $A \in P_{cl}(Y)$ و $\psi : A \to \mathcal{F}_F$ یک تابع پیوسته باشد، آن‌گاه با توجه به اینکه X درون‌بری مطلق برای فضاهای متریک است، تابع پیوسته $\varphi : Y \to X$ چنان موجود است که $\varphi|_A = \psi$. به ازای هر $y \in Y$، تابعک $g_\circ : Y \to (\circ, \infty)$ را به صورت زیر تعریف کنید

$$g_\circ(y) = \sup\{d(\varphi_\circ(y), z) | z \in F_(\varphi_\circ(y))\} + ۱.$$

توجه کنید که $g_\circ$ پیوسته است و برای هر $y \in Y$ داریم $F(\varphi_\circ(y), g_\circ(y)) = F(\varphi_\circ(y))$. از طرفی تابع $\psi : A \to \mathcal{F}_F$ یک انتخاب پیوسته از چندتابعی $A \ni y \vdash F_۱(\varphi_\circ(y))$ است.
چون $F \in SP(X)$، تابع پیوسته $\varphi_۱ : Y \to X$ وجود دارد که $\varphi_۱|_A = \psi$ و$\varphi_۱(y) \in F(\varphi_\circ(y))$.
حال به ازای هر $y \in Y$ داریم

$$D(\varphi_۱(y), F(\varphi_۱(y))) \leq H(F(\varphi_\circ(y), F(\varphi_۱(y))) \leq ld(\varphi_\circ(y), \varphi_۱(y))$$

$$< ld(\varphi_\circ(y), \varphi_۱(y)) + l < ld(\varphi_\circ(y), \varphi_۱(y)) + q^{-۱}.$$

بنابراین به ازای هر $y \in Y$ داریم

$$G_۲(y) = F(\varphi_۱(y) \cap B(\varphi_۱(y), ld(\varphi_\circ(y), \varphi_۱(y)) + q^{-۱}) \neq \phi.$$

چون $F \in SP(X)$، تابع پیوسته $\varphi_۱ : Y \to X$ چنان موجود است که

$$\varphi_۱(y) \in F(\varphi_\circ(y)), \ \varphi_۱|_A = \psi.$$

درنتیجه برای هر $y \in Y$ داریم

$$\varphi_۳|_A = \psi,$$

$$\varphi_۳(y) \in F(\varphi_۲(y)),$$

$$d(\varphi_۲(y), \varphi_۳(y)) \leq ld(\varphi_\circ(y), \varphi_۱(y)) + q^{-۱}.$$

به استقرا دنباله $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}_\circ}$، که در آن $\varphi_n : Y \to X$ یک تابع پیوسته است، حاصل می‌شود که به

ازای هر عدد طبیعی n و $y \in Y$ خواص زیر برقرارند

$$\varphi_n|_A = \psi,$$

$$\varphi_n(y) \in F(\varphi_{n-1}(y)),$$

$$d(\varphi_{n-1}(y), \varphi_n(y)) \leq l^{n-1} d(\varphi_0(y), \varphi_1(y)) + q^{-(n-1)}.$$

به ازای هر $\lambda > 0$ قرار دهید

$$Y_\lambda = \{y \in Y | d(\varphi_0(y), \varphi_1(y)) < \lambda\}.$$

توجه کنید که خانواده $\{Y_\lambda : \lambda > 0\}$ یک پوشش باز برای Y است. به ازای هر $\lambda > 0$ دنباله $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ بطور یکنواخت روی Y_λ همگراست چرا که به ازای هر $y \in Y$ و هر عدد طبیعی n داریم

$$d(\varphi_{n-1}(y), \varphi_n(y)) \leq l^{n-1} d(\varphi_0(y), \varphi_1(y)) + q^{-(n-1)}.$$

فرض کنید $\varphi : Y \to X$ حد یکنواخت دنباله توابع $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ باشد. در این صورت، φ پیوسته است و چون برای هر عدد طبیعی n داریم $\varphi_n|_A = \psi$، پس $\varphi|_A = \psi$.
اما به ازای هر $y \in Y$ و هر $n \geq 1$ داریم $\varphi_n(y) \in F(\varphi_{n-1}(y))$. لذا با حد گرفتن می‌توان نتیجه گرفت که به ازای هر $y \in Y$، $\varphi(y) \in F(\varphi(y))$.
بنابراین، φ نگاشتی است که Y را به توی $\mathcal{F}_F$ می‌نگارد. لذا طبق تعریف، $\mathcal{F}_F$ یک درون‌بری مطلق کامل است. $\square$

در سال ۲۰۰۷ سنت‌مارین نتایج زیر را روی درون‌بری مطلق مجموعه نقاط ثابت مشترک دو چندتابعی تحت یک سری شرایط ثابت کرده است ([۴۲])، ([۴۳]).

قضیه ۲-۲. [۴۳] *فرض کنید $(E, \|\cdot\|)$ یک فضای باناخ، $X \in P_{cl,cv}(E)$ و $F_1, F_2 : X \to P_{cl,cv}(X)$ دو عملگر نیم‌پیوسته پایینی باشند. فرض کنید که*

الف) $a_{11}, \ldots, a_{15} \in (0, \infty)$ با شرط $a_{11} + a_{12} + a_{13} + 2a_{14} < 1$ وجود دارند بطوری که به ازای

هر $x \in X$، $u_x \in F_۱(x)$ و هر $y \in X$، $u_y \in F_۲(y)$ چنان موجود باشد که

$$\| u_x - u_y \| \leq a_{۱۱} \| x - y \| + a_{۱۲} \| x - u_x \| + a_{۱۳} \| y - u_y \| + a_{۱۴} \| x - u_y \| + a_{۱۵} \| y - u_x \| .$$

ب) $a_{۲۱}, \ldots, a_{۲۵} \in (۰, \infty)$ با شرط $a_{۲۱} + a_{۲۲} + a_{۲۳} + ۲a_{۲۴} < ۱$ چنان موجود باشد که به ازای هر $x \in X$، $u_x \in F_۲(x)$ و هر $y \in X$، $u_y \in F_۱(x)$ چنان موجود باشد که

$$\| u_x - u_y \| \leq a_{۲۱} \| x - y \| + a_{۲۲} \| x - u_x \| + a_{۲۳} \| y - u_y \|$$

$$+ a_{۲۴} \| x - u_y \| + a_{۲۵} \| y - u_x \| .$$

دراین صورت $(\mathcal{CF})_{F_۱, F_۲}$ درون‌بری مطلق برای فضاهای پیرافشرده است.

قضیه ۲-۳. [۴۳]

فرض کنید $(E, \| \, . \, \|)$ یک فضای باناخ، $X \in P_{cl,cv}(E)$ و $F : X \to P_{cl,cv}(X)$ عملگر نیم‌پیوسته پایینی باشد. همچنین فرض کنید اعداد $a_۱, \ldots, a_۵ \in (۰, \infty)$ چنان موجود باشند که

$$a_۱ + a_۲ + a_۳ + ۲a_۴ < ۱$$

و نیز به ازای هر $x \in X$، $u_x \in F(x)$ و هر $y \in Y$، $u_y \in F(y)$ چنان موجود باشد که

$$\| u_x - u_y \| \leq a_۱ \| x - y \| + a_۲ \| x - u_x \| + a_۳ \| y - u_y \| + a_۴ \| x - u_y \| + a_۵ \| y - u_x \| .$$

دراین صورت $\mathcal{F}_F$ درون‌بری مطلق برای فضاهای پیرافشرده است.

حال نتیجه زیر را از سنت‌مارین ارائه می‌نماییم.

قضیه ۲-۴. فرض کنید (X, d) یک فضای متریک کامل و درون‌بری مطلق برای فضاهای متریک باشد. همچنین فرض کنید $F_۱, F_۲ : X \to P_{cl,b}(X)$ دو چندتابعی باشند که $F_۱, F_۲ \in SP(X)$. و اعداد $a_۱, \ldots, a_۵ \in (۰, \infty)$ چنان موجود باشند که

$$a_۱ + a_۲ + a_۳ + ۲ \max\{a_۴, a_۵\} < ۱$$

و برای هر x, y داشته باشیم

$$H(F_۱(x), F_۲(x))_۱ d(x, y) + a_۲ D(x, F_۱(x)) + a_۳ D(y, F_۲(y)) + a_۴ D(x, F_۲(y)) + a_۵ D(y, F_۱(y)).$$