بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه کاشان
دانشکده مهندسی
گروه مهندسی مکانیک

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته مکانیک- تبدیل انرژی

عنوان:

حل تقریبی تحلیلی میدان سرعت و دما در یک محفظه دو بعدی با دیوارههای افقی موجدار حاوی یک سیال غیرنیوتنی

اساتید راهنما:

دکتر علی عارف‌منش

دکتر قنبرعلی شیخ‌زاده

به‌وسیله:

هادی بت‌شکن ارتی‌جانی

خرداد ماه ۱۳۸۹

بسمه تعالی

تاریخ:
شماره:
پیوست:

دانشگاه کاشان
دانشکده مهندسی

مدیریت تحصیلات تکمیلی دانشگاه

صورتجلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

نام و نام خانوادگی دانشجو: هادی بت شکن — شماره دانشجویی: ۸۶۳۳۲۲۶۰۰۲

رشته: مهندسی مکانیک (تبدیل انرژی) — دانشکده: مهندسی

عنوان پایان نامه: حل تقریبی میدان سرعت و دما در یک محفظه دو بعدی با دیواره های افقی موجدار حاوی یک سیال غیر نیوتنی

تعداد واحد پایان نامه: ۶ واحد — تاریخ دفاع: ۸۹/۳/۲۹

این پایان‌نامه به مدیریت تحصیلات تکمیلی به منظور بخشی از فعالیتهای تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد ارایه می‌گردد دفاع از پایان نامه در تاریخ ۸۹/۳/۲۹ مورد تأیید و ارزیابی هیات داوران قرار گرفت و با نمره ۱۹٫۸۸ نوزده و هشتاد و هشت و درجه عالی به تصویب رسید.

اعضاء هیات داوران

عنوان	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱. استاد راهنما	دکتر قنبر علی شیخ زاده	استادیار	
۲. استاد راهنما	دکتر علی عارف منش	استادیار	
۳. متخصص و صاحب نظر از داخل دانشگاه	دکتر علی اکبر عباسیان	استادیار	
۴. متخصص و صاحب نظر از خارج دانشگاه	دکتر حسین شکوهمند	استاد	
۵. استاد ناظر	دکتر عادل رییسی	استادیار	

آدرس: کاشان، بلوار قطب راوندی
کد پستی ۵۱۱۶۷ - ۸۷۳۱۷
تلفن ۵۵۵۹۹۳۰ - دورنگار ۵۵۵۹۹۳۰
http: www.kashanu.ac.ir

چکیده:

با گذشت حدود یک قرن از انتشار مقاله آقای پرانتل در مورد انتقـال حـرارت جابجـایی کـه می‌توان آنرا آغازگر این مبحث دانست، هنوز پایان‌نامـه‌هـایی در سـطح دکتـری روی ایـن موضـوع تعریف می‌شود. این نکته اهمیت و وجود نکات ناشـناخته در ایـن مـورد را بیـان مـی‌کنـد. یکـی از مسائل کلاسیک در مورد انتقال حرارت جابجـایی آزاد کـه سـالها بـا حمایـت "ناسـا" در مـورد آن تحقیق شده، محفظه‌ای مستطیلی شکل است که دارای دو دیواره افقی عایق و دو دیواره عمودی با اختلاف دمای ثابت می‌باشد. برای حل این مسئله بیش از ۲۰ سال تحقیق صورت گرفت که حاصل آن انتشار مقالات متعدد تحلیلی، عددی و آزمایشگاهی بود. از میان این تحقیقات دو روش مختلـف تقریبی – تحلیلی برای حل مسئله ارائه شد که محدودیتهایی نیز داشـتند. در چنـد دهـه اخیـر بـا گسترش روشهای عددی، این مسئله به‌عنوان نمونه‌ای برای چک کردن صحت ایـن روشـها تبـدیل شده است. خیلی از حالات متفاوتی که برای این نوع مسئله مطرح می‌شود دارای حل تحلیلی و یـا آزمایشگاهی نمی‌باشد. این امر باعث شده در کارهای عددی، اعتبارسنجی با کارهـای عـددی دیگـر صورت بگیرد. این فقدان باعث شد تا به ارائه روشی تقریبی – تحلیلی بـرای گسـترش حـالات ایـن مسئله پرداخته شود. در این تحقیق محفظه‌ای مستطیلی بـا دیـواره‌هـای افقـی موجـدار و عـایق و دیواره‌های عمودی با اختلاف دمای ثابت، حاوی سیال غیرنیوتنی به روش خطی‌سازی حل گردیـده است. برای حل معادلات حاکم فرض شده که اعداد رایلی و پرانتل بزرگ هسـتند. در ایـن حـل، بـا ترکیب معادلات انرژی و ممنتم، معادله‌ای حاصل می‌شود که به تغییرات سـرعت عمـودی وابسـته است. با کمک این معادله و معادله انرژی، که با کمک معادله پیوستگی شکل جدیدی یافتـه، توابـع سرعت و دما بدست می‌آیند. نتایج حاکی از آن است که این حل برای سیال غیرنیـوتنی، جوابهـایی مشابه با فیزیک مسئله و تحلیل ابعادی ارائه می‌دهد. همچنین تغییرات سرعت و دما در حالتی کـه دیواره‌های افقی موجی شکل می‌باشند قابل قبول است اما تغییرات ناسلت برای دیواره‌های موجـدار در این حل قابل مشاهده نیست و تغییرات آنرا فقط از تحلیل ابعادی ارائه شده می‌توان متوجه شـد. ضمناً با افزایش لزجت ظاهری، شار حرارتی دیواره‌های عمودی کاهش می‌یابد و بـا افـزایش دامنـه موج دیواره‌های افقی، مقدار عدد ناسلت افزایش یافته و تغییر طـول مـوج تـاثیری در عـدد ناسـلت ندارد. با بررسی نتایج می‌توان بطورکلی حل ارائه شده را معتبر دانست.

کلمات کلیدی: جابجایی طبیعی، حل تحلیلی، سیال غیرنیوتنی، دیواره‌های موجی

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل۱ مقدمه **۱**

۱-۱- مقدمه ۲
۱-۲- تاریخچه ۳
۱-۲-۱- بررسی روابط ارائه شده توسط بچلر ۵
۱-۲-۲- کارهای آزمایشگاهی اکرت و الدر ۹
۱-۲-۳- بررسی روش حل گیل ۱۱
۱-۲-۴- بررسی‌های عددی ۱۴
۱-۲-۵- روش تحلیلی بلایت ۱۴
۱-۲-۶- بررسی روش اصلاحی کوئان ۱۶
۱-۲-۷- بررسی روش اصلاحی بیژن ۱۷
۱-۲-۸- جمع بندی ۱۸
۱-۳- موضوع و هدف این تحقیق ۱۹

فصل۲ حل تقریبی – تحلیلی **۲۰**

۲-۱- مقدمه ۲۱
۲-۲- معادلات حاکم ۲۱
۲-۳- تحلیل ابعادی ۲۴
۲-۴- بی‌بعد سازی معادلات ۲۹
۲-۵- تحلیل معادلات ۳۰
۲-۶- حل تحلیلی ۳۵
۲-۷- حل تقریبی ۳۷
۲-۷-۱- حل تقریبی با سیال غیرنیوتنی ۳۸
۲-۷-۲- حل برای محفظه‌ای با دیواره‌های افقی موج دار ۴۴
۲-۸- محاسبه عدد ناسلت ۴۴
۲-۹- جمع‌بندی ۴۸

فصل۳ نتایج **۵۰**

۳-۱- مقدمه ۵۱
۳-۲- تغییرات لزجت ظاهری با توان و ضریب مدل توانی ۵۱
۳-۳- بررسی حل تحلیلی ۵۳
۳-۴- بررسی تاثیر لزجت ظاهری بر تغییرات سرعت، دما و عدد ناسلت ۵۴
۳-۵- بررسی تاثیر ایجاد موج روی دیواره‌های افقی بر تغییرات دما، سرعت و عدد ناسلت ۶۳
۳-۵-۱- تاثیر دامنه موج ۶۴
۳-۵-۲- تاثیر طول موج ۶۹
۳-۶- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری ۷۴
۳-۷- پیشنهادات ۷۵

منابع و مراجع ۷۷

فهرست شکلها

عنوان **صفحه**

شکل ۱-۱- نمای شماتیک از مسئله طرح شده برای بررسی جابجابی طبیعی ۳
شکل ۲-۱- هندسه حل، سیستم مختصات و شرایط مرزی ۲۲
شکل ۲-۲- نیروهای حاکم بر مسئله برای $\gamma * Pr$ <1 .... ۲۶
شکل ۲-۳- نیروهای حاکم بر مسئله برای $\gamma * Pr$ >1 .... ۲۶
شکل ۲-۴- شکل شماتیک قرار گرفتن دیواره داغ در سیال بی‌نهایت با دمایی کمتر از دمای صفحه ۳۴
شکل ۲-۵- ترسیم رابطه (۲-۶۵) ۳۵
شکل ۲-۶- شماتیک محاسبه * $-\infty 0 v * \theta dx$ ۴۵
شکل ۲-۷- شماتیک نمودار θ در هر Y ثابت ۴۶
شکل ۳-۱- تغییرات لزجت ظاهری (η) برحسب توان مدل توانی (n) برای ضرایب مختلف مدل توانی (p) ۵۲
شکل ۳-۲- تغییرات لزجت ظاهری برحسب توان مدل توانی (n) در کنار دیوار عمودی برای p=10 .... ۵۲
شکل ۳-۳- تغییرات لزجت ظاهری برحسب توان مدل توانی (n) در کنار دیواره عمودی برای p=0.1 .... ۵۲
شکل ۳-۴- تغییرات لزجت ظاهری برحسب ضریب مدل توانی (p) در کنار دیواره عمودی برای n=1.3 .... ۵۳
شکل ۳-۵- تغییرات لزجت ظاهری برحسب ضریب مدل توانی (p) در کنار دیواره عمودی برای n=1.3 .... ۵۳
شکل ۳-۶- کانتور تغییرات لزجت ظاهری برحسب توان (n) و ضریب مدل توانی (p) در کنار دیواره عمودی ۵۳
شکل ۳-۷- مقایسه تغییرات سرعت عمودی (v) برحسب طول محفظه (x) بین حلهای دقیق، تقریبی و عددی در y=0 .... ۵۴
شکل ۳-۸- مقایسه تغییرات)θ(برحسب طول محفظه (x) بین حلهای دقیق، تقریبی و عددی در y=0 .... ۵۴
شکل ۳-۹- تغییرات سرعت عمودی (v) برحسب طول محفظه (x) برای توان‌های مختلف مدل توانی و p=0.1 .... ۵۵

شکل۳-۱۰- تغییرات θ برحسب طول محفظه (x) برای توانهای مختلف مدل توانی و p=0.1 ۵۶
شکل۳-۱۱- تغییرات سرعت عمودی (v) برحسب طول محفظه (x) در ارتفاع‌های مختلف برای n=1,p=1 ۵۷
شکل۳-۱۲- تغییرات θ برحسب طول محفظه (x) در ارتفاع‌های مختلف برای n=1,p=1 ۵۷
شکل۳-۱۳- تغییرات سرعت عمودی (v) برحسب طول محفظه (x) در ارتفاع‌های مختلف برای n=1.3,p=0.1 ۵۷
شکل۳-۱۴- تغییرات θ (v) برحسب طول محفظه (x) در ارتفاع‌های مختلف برای n=1.3,p=0.1 ۵۷
شکل۳-۱۵- تغییرات $1\lambda r$ (ضخامت لایه مرزی) برحسب ارتفاع محفظه (y) در توان‌های مختلف مدل توانی (n) برای p=0.1 ۵۸
شکل۳-۱۶- تغییرات تابع جریان در بی‌نهایت ($\psi\infty$) برحسب ارتفاع محفظه (y) در توان‌های مختلف مدل توانی (n) برای p=0.1 ۵۹
شکل۳-۱۷- تغییرات شار حرارتی ($-\theta XX = 0$) برحسب ارتفاع محفظه (y) در توان‌های مختلف مدل توانی (n) برای p=0.1 ۶۰
شکل۳-۱۸- تغییرات ضریب ناسلت ($c3cn - 1np1n\eta 14$) بر حسب توان مدل توانی (n) برای p=0.1 ۶۱
شکل۳-۱۹- تغییرات ضریب ناسلت ($c3cn - 1np1n\eta 14$) برحسب ضریب مدل توانی (p) برای n=1.3 ۶۱
شکل۳-۲۰- کانتور خطوط دما ثابت در توان‌های مختلف مدل توانی (n) برای p=0.1 ۶۱
شکل۳-۲۱- کانتور خطوط تابع جریان (ψ) در توان‌های مختلف مدل توانی (n) برای p=0.1 ۶۲
شکل۳-۲۲- کانتور خطوط تابع جریان (ψ) برای n=0.3,p=0.1 ۶۲
شکل۳-۲۳- تغییرات دما در بی‌نهایت ($T\infty$) برحسب ارتفاع محفظه (y) در توان‌های مختلف مدل توانی (n) برای p=0.1 ۶۳
شکل۳-۲۴- سه نمونه مورد استفاده در تحلیل ارتفاع موج ۶۴
شکل۳-۲۵- تغییرات سرعت عمودی (v) برحسب طول محفظه (x) در نمونه‌های مختلف ۶۵
شکل۳-۲۶- تغییرات θ برحسب طول محفظه (x) در نمونه‌های مختلف ۶۶
شکل۳-۲۷- تغییرات دمای بی‌نهایت ($T\infty$) برحسب ارتفاع محفظه (y) در نمونه‌های مختلف ۶۷
شکل۳-۲۸- تغییرات تابع جریان در بی‌نهایت ($\psi\infty$) برحسب ارتفاع محفظه (y) در نمونه‌های مختلف ۶۷

شکل۳-۲۹- کانتور تابع جریان در نمونه شماره ۱ ۶۷
شکل۳-۳۰- کانتور تابع جریان در نمونه شماره ۳ ۶۷
شکل۳-۳۱- کانتور دما در نمونه شماره ۱ ۶۸
شکل۳-۳۲- کانتور دما در نمونه شماره ۳ ۶۸
شکل۳-۳۳- سه نمونه مورد استفاده در تحلیل طول موج ۶۹
شکل۳-۳۴- تغییرات سرعت عمودی (v) برحسب طول محفظه در نمونه‌های مختلف ۷۰
شکل۳-۳۵- تغییرات θ برحسب طول محفظه (x) در نمونه‌های مختلف ۷۱
شکل۳-۳۶- تغییرات تابع جریان در بی‌نهایت ($\psi\infty$) برحسب ارتفاع محفظه (y) در نمونه‌های مختلف ۷۲
شکل۳-۳۷- تغییرات دما در بی‌نهایت ($T\infty$) برحسب ارتفاع محفظه (y) در نمونه‌های مختلف ۷۲
شکل۳-۳۸- کانتور تابع جریان (ψ) برای نمونه شماره ۲ ۷۲
شکل۳-۳۹- کانتور تابع جریان (ψ) برای نمونه شماره ۳ ۷۲
شکل۳-۴۰- کانتور دما (T) برای نمونه شماره ۲ ۷۳
شکل۳-۴۱- کانتور دما (T) برای نمونه شماره ۳ ۷۳

فهرست علائم و اختصارات

دما	T
لزجت ظاهری	η
ضریب مدل توانی	p
توان مدل توانی	n
تنش برشی	τ
تنش عمودی	σ
فشار	P
چگالی	ρ
دما	T
سرعت افقی	U,u
سرعت عمودی	V,v
راستای افقی	X,x
راستای عمودی	Y,y
ضریب انتقال حرارت هدایتی	K
ظرفیت حرارتی ویژه	C_p
ضریب پخش حرارت	$\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$
لزجت	μ
لزجت سینماتیک	$\vartheta = \frac{\mu}{\rho}$
تابع جریان	ψ
چرخش	ξ
ارتفاع محفظه	H
عدد رایلی	$Ra_H = \frac{g\beta\nabla T H^3}{\vartheta\alpha}$
عدد پرانتل	$Pr = \frac{\vartheta}{\alpha}$
عدد ناسلت	Nu
عدد گراشف	Gr
لزجت سینماتیک سیال غیرنیوتنی	$\gamma = \frac{\eta}{\rho}$
لزجت بی‌بعد	$m = \gamma^* = \frac{\gamma}{\vartheta}$

زیرنویسها

اندازگیری شده در دمای مرجع	0
شتق نسبت به X,x	X,x
مشتق نسبت به Y,y	Y,y
اندازگیری شده در بی‌نهایت	∞

فصل اول

مقدمه

مقدمه

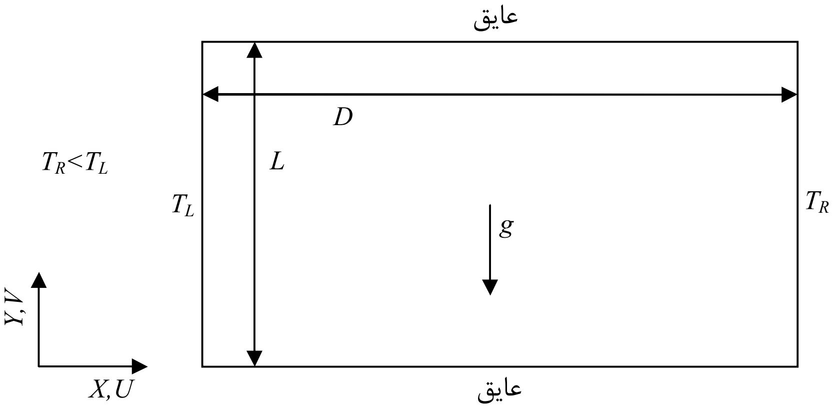
۱-۱- مقدمه

انتقال حرارت در اجسام، سیالات و بین سطوح با روشهای هدایت، جابجایی و تشعشع صورت می‌گیرد. از میان این سه روش، در سیالات، میزان انتقال حرارت به روش جابجایی، قابل توجه است. البته برای ایجاد انتقال حرارت به روش جابجایی شرایطی نیز ذکر می‌شود، با این وجود، استفاده از توانایی بالای سیالات در انتقال حرارت به روش جابجایی بسیار متداول است. انتقال حرارت جابجایی به دو دسته جابجایی آزاد و جابجایی طبیعی قابل تقسیم می‌باشد. انتقال حرارت به روش جابجایی طبیعی همانطور که از نامگذاری آن مشخص است، بصورت طبیعی اتفاق می‌افتد و نیاز به صرف انرژی برای به حرکت درآوردن سیال در آن نیست، زیرا نیروی شناوری باعث ایجاد حرکت در سیال می‌شود. نرخ انتقال حرارت در جابجایی طبیعی کمتر از جابجایی اجباری است، اما حسن آن، نیاز نداشتن به نیروی خارجی برای به حرکت درآوردن سیال است. این نوع انتقال حرارت به دلیل اختلاف دما بین دو ناحیه و تاثیر نیروی گرانش زمین بوجود می‌آید که باعث به حرکت درآمدن سیال بین آن دو ناحیه می‌شود. بهترین مثالی که برای این نوع جابجایی می‌توان ذکر کرد، جابجایی هوا در جو زمین است، که تاثیر بسزایی در شرایط آب و هوایی و زندگی بشر دارد. همین یک کاربرد اهمیت بسزای مطالعه در زمینه جابجایی طبیعی را بیان می‌کند، با این وجود جابجایی طبیعی در صنعت نیز کاربرد فراوانی دارد، که اهمیت شناخت مکانیزم این روش انتقال حرارت را دوچندان می‌کند. مطالعات گوناگونی روی این روش انتقال حرارت در قرن گذشته صورت گرفته است، که در ادامه، مطالعات تحلیلی مرتبط با موضوع این پایان‌نامه مرور می‌شود.

۱-۲- تاریخچه

از آنجا که برای شناخت کامل و با جزئیات هر موضوعی باید آنرا در محدوده مشخصی بررسی کرد، شناخت جزئیات انتقال حرارت جابجایی طبیعی، نیازمند تعریف شرایط مرزی و دامنه‌ای مشخص برای حل معادلات بقاء در آن می‌باشد. از آنجا که بهتر است این مسئله کاربردی بوده و با تغییرات کمی نیز حالات متفاوت کاربردی را بیان کند و ضمناً برای حل از پیچیدگی کمی برخوردار باشد، محققین مسئله‌ای به شرح زیر را مطرح کردند:

یک مستطیل با نسبت اضلاع آزاد که دیواره‌های عمودی آن دارای دمای ثابت و دیواره‌های افقی آن عایق باشند. راستای نیروی گرانش نیز همراستای دیواره‌های عمودی بوده و بعد سوم آنقدر طویل است، که حل را می‌توان دو بعدی در نظر گرفت (شکل (۱-۱)).



شکل۱-۱- نمای شماتیک از مسئله طرح شده برای بررسی جابجابی طبیعی

این مسئله کاربردهای متفاوتی دارد، ولی آنچه این مسئله را برای مهندسان مکانیک سیالات جذاب کرد، کاربرد آن در عایقکاری حرارتی ساختمانها بود. هوا به دلیل داشتن ضریب انتقال حرارت کم، عایق بسیار مناسبی است. این ویژگی باعث شد که در دهه ۵۰ مهندسان تهویه مطبوع به استفاده از آن برای عایقکاری ساختمانها مبادرت ورزند، که باعث تولید آجرهای سوفالی تو خالی و پنجره‌های دو جداره شد. نکته‌ای که در اینجا باید مشخص می‌شد میزان انتقال حرارت بین دو سمت این مصالح ساختمانی بود. برای این کار دو راه، آزمایش کردن و حل معادلات حاکم بر

جریان سیال و انتقال حرارت وجود داشت، که هر دو نیز صورت گرفت. ابتدا بچلر[1] در سال ۱۹۵۴ بصورت کامل به بررسی این مسئله برای حالات مختلف اعم از: برقراری انتقال حرارت هدایتی و برقراری انتقال حرارت جابجایی برای جریانهای آرام و مغشوش پرداخت، اما حل کاملی برای انتقال حرارت جابجایی ارائه نکرد [۱]. بعد از بچلر کارهای آزمایشگاهی متفاوتی صورت گرفت که بعضی از نتایج بچلر با آنها سازگار نبود. از میان کارهای آزمایشگاهی کار اکرت و کارسن[2] در سال ۱۹۶۱ [۲] و کار الدر[3] در سال ۱۹۶۵ [۳] مورد توجه قرار گرفت. سپس گیل[4] در سال ۱۹۶۶ از روابط بچلر استفاده کرد و با توجه به مشاهداتی که از کارهای آزمایشگاهی داشت، اشکالات آنرا رفع کرد و توانست برای آن مسئله حلی تقریبی ارائه دهد [۴]. البته کارهای عددی متفاوتی نیز برای این مسئله ارائه شد که نمونه‌هایی از آنها را می‌توان در مروری که استراچ[5] در سال ۱۹۷۲ بر کارهای صورت گرفته در محفظه‌ها انجام داده است، مشاهده کرد [۵]. در سال ۱۹۷۷، بلایت و سیمکینز[6] به روشی دیگر این مسئله را بصورت تقریبی حل کردند و نشان دادند در مواردی حل آنها نسبت به گیل، به جوابهای آزمایشگاهی ارائه شده نزدیکتر است [۶]. همچنین کوئان[7] ضریب ثابت حل گیل را با توجه به حلهای عددی ارائه شده برای این مسئله محاسبه کرد [۷]. این کار باعث نزدیکتر شدن جوابهای گیل به حلهای عددی شد، ولی در بعضی موارد جوابهای ضعیفی ارائه کرد. بیژن[8] در سال ۱۹۷۹ با تکیه بر حل ارائه شده توسط گیل، ثابت آنرا بصورت تابعی اصلاح کرد[۸]. این کار باعث شد، عدد ناسلت بدست آمده به حلهای عددی و نتایج آزمایشگاهی نزدیکتر شود. براساس متون علمی قابل دسترس، بعد از کار بیژن کار تحلیلی که بهبودی در حل ایجاد کند ارائه نشده، ولی کارهای عددی متفاوتی صورت گرفته است. با نگاهی به کارهای صورت گرفته می‌توان گفت که این مسئله به عنوان یک مسئله نمونه برای چک‌کردن روشهای عددی متفاوت در زمینه انتقال حرارت جابجایی، مطرح شده است.

1. Batchelor
2. Eckert & Carlson
3. Elder
4. Gill
5. Ostrach
6. Blythe & Simpkins
7. Quon
8. Bejan

در ادامه شرح کاملی از تحقیقات صورت گرفته برای حل مسئله جابجائی در محفظـه نشـان داده شده در شکل (۱-۱)، ارائه می‌گردد. لازم به ذکر اسـت کـه فقـط قسـمتی از مقـالات کـه بـه بررسی انتقال حرارت جابجایی در جریان آرام پرداخته‌اند، مورد توجه قرار می‌گیرند. از آنجا که هـر محقق برای این مسئله از نامگذاریهای متفاوتی استفاده کرده است، ایجاب می‌کند کـه بـرای ارائـه بهتر، نامگذاریها یکسان شوند، اما صیانت کاملی از مطالب بیان شده توسط آنها بعمل می‌آید.

۱-۲-۱- بررسی روابط ارائه شده توسط بچلر

بچلر این مسئله (شکل (۱-۱)) را با توجه به کاربرد آن در آجرهای سوفالی بـرای عایقکـاری ساختمانها مورد بررسی قـرار داد[۱]. وی هـدف از تحلیـل ایـن مسـئله را، محاسـبه شـار حرارتـی دیواره‌های عمودی بیان نموده و سیال داخل محفظه را هوا در نظر گرفته است. وی فرض کرد کـه اختلاف دمای دو سمت محفظه خیلی کمتر از دمای مطلق آنهاست و اختلاف فشار ایجاد شـده بـه دلیل ارتفاع سیال خیلی کمتر از فشار مطلق است. بنابراین قانون گازها حـاکم مـی‌باشـد و چنـین می‌توان نوشت:

$$\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0} \approx -\frac{T-T_0}{T_0} \qquad (۱-۱)$$

اگر از این رابطه برای مایعات استفاده شود باید بجای (T_0^{-1})، ضریب انبسـاط حجمـی (β) را قرار داد.

با توجه به رابطه (۱-۱) از آنجا که اختلاف دما کم است، اختلاف چگالی نیز کم مـی‌باشـد و می‌توان فرض کرد که سیال تراکم ناپذیر است. معادله پیوستگی برای سـیالات غیـر قابـل تـراکم و یکنواخت چنین است:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \qquad (۲-۱)$$

تنها عامل تغییر دما در سیال در حال حرکت، رسانش در سیال است از اینرو از تغییرات دما به دلایل تراکم سیال و اتلاف لزجت صرفنظر می‌شود. پس معادله انرژی بصورت زیر ساده می‌شود:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + U\frac{\partial \theta}{\partial X} + V\frac{\partial \theta}{\partial Y} = \alpha\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2}\right) \qquad (۳-۱)$$

که در آن:

دمای بی بعد $\theta = \frac{T-T_R}{T_L-T_R}$

ضریب پخش حرارت برای گازها $\alpha = \frac{K}{\rho C_P}$

ضریب پخش حرارت برای مایعات $\alpha = \frac{K}{\rho C_V}$

حرارت ویژه حجم ثابت و فشار ثابت C_P, C_V

ضریب انتقال حرارت هدایت K

از آنجا که اختلاف دما در این مسئله کم است مقدار α ثابت فرض می‌شود.

معادلات ممنتم نیز چنین بیان می‌شوند:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial X} + V\frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial X} + \vartheta\left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) \tag{۴-۱}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U\frac{\partial V}{\partial X} + V\frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial Y} + g\left(\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}\right) + \vartheta\left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}\right) \tag{۵-۱}$$

که در آن، $\vartheta = \frac{\mu_0}{\rho_0}$ است و μ_0 و ρ_0 بصورت یکنواخت فرض شده و در دمای T_R اندازه‌گیری می‌شوند.

و شرایط مرزی به شرح زیر می‌باشند:

$$\begin{array}{llll} X=0 & \rightarrow & U=V=0 \quad \text{و} & \theta = 1 \\ X=D & \rightarrow & U=V=0 \quad \text{و} & \theta = 0 \\ Y=0 & \rightarrow & U=V=0 \quad \text{و} & \frac{\partial\theta}{\partial Y} = 0 \\ Y=L & \rightarrow & U=V=0 \quad \text{و} & \frac{\partial\theta}{\partial Y} = 0 \end{array} \tag{۶-۱}$$

تغییرات دما برای ساختمانها بگونه‌ایست که می‌توان مسئله را بصورت دائم بررسی کرد.

اگر از D بعنوان معیار طول برای بی‌بعد سازی طول در راستای X و Y استفاده شـود، روابـط بصورت زیر ساده خواهند شد:

$$\frac{\partial\theta}{\partial X}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\theta}{\partial Y}\frac{\partial\psi}{\partial X} = \frac{\partial(\theta,\psi)}{\partial(X,Y)} = \nabla^2\theta \tag{۷-۱}$$

$$\frac{1}{Pr}\frac{\partial(\xi,\psi)}{\partial(X,Y)} = Ra\frac{\partial\theta}{\partial X} + \nabla^2\xi \tag{۸-۱}$$

که در آن:

$$U = \frac{\alpha}{D}\frac{\partial\psi}{\partial Y} \qquad V = -\frac{\alpha}{D}\frac{\partial\psi}{\partial X} \qquad Pr = \frac{\vartheta}{\alpha}$$

$$\xi = -\nabla^2\psi \qquad Ra = \frac{(T_L-T_R)gD^3}{T_R\alpha\vartheta}$$

ψ تابع جریان و ξ چرخش می‌باشند.

شرایط مرزی بدون بعد نیز به شرح زیر می‌باشند:

$$\begin{array}{llll} X=0 & \rightarrow & \psi=\frac{\partial\psi}{\partial X}=0 \quad \text{و} & \theta=1 \\ X=1 & \rightarrow & \psi=\frac{\partial\psi}{\partial X}=0 \quad \text{و} & \theta=0 \\ Y=0 & \rightarrow & \psi=\frac{\partial\psi}{\partial Y}=0 \quad \text{و} & \frac{\partial\theta}{\partial Y}=0 \\ Y=L/D & \rightarrow & \psi=\frac{\partial\psi}{\partial Y}=0 \quad \text{و} & \frac{\partial\theta}{\partial Y}=0 \end{array} \tag{۹-۱}$$

عدد ناسلت بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$Nu=\frac{\frac{\dot{Q}}{L}}{K(T_L-T_R)}=\int_0^{L/D}\left(\frac{\partial\theta}{\partial X}\right)_{X=0}dY \tag{۱۰-۱}$$

که تابعی از Ra، Pr و L/D است ($Nu=Nu(Pr,Ra,L/D)$).

اگر L/D ثابت باشد و $Ra\rightarrow\infty$ آنگاه لایه مرزی سرعت و دما در نزدیکی دیواره‌های عمودی تشکیل می‌شوند، که علت آن انتقال حرارت جابجایی بین دو دیواره عمودی است. ضخامت این لایه در مقابل ابعاد محفظه بسیار کوچک بوده و بصورت لایه باریکی مجاور دیواره‌های محفظه تشکیل می‌شوند.

احتمالاً جریان در هسته مرکزی محفظه تحت تاثیر لزجت (ϑ) و ضریب پخش حرارت (α) نمی‌باشد. پس وقتی $Ra\rightarrow\infty$ و $0 \rightarrow$ (α و ϑ)، مولفه‌هایی که شامل مشتق مرتبه دوم در معادلات حاکم هستند در هسته مرکزی محفظه قابل صرفنظر می‌شوند. پس معادلات حاکم در هسته مرکزی محفظه بصورت زیر ساده می‌شوند:

$$\frac{\partial(\theta,\psi)}{\partial(X,Y)}=0 \tag{۱۱-۱}$$

$$\frac{1}{Pr}\frac{\partial(\xi,\psi)}{\partial(X,Y)}=Ra\frac{\partial\theta}{\partial X} \tag{۱۲-۱}$$

با توجه به تقارن دما و خطوط جریان در هسته مرکزی محفظه حول محورهای عمودی و افقی وسط محفظه، جوابها در این ناحیه چنین می‌شوند:

$$\theta=1/2 \qquad\qquad \xi=\xi_0(cte.) \tag{۱۳-۱}$$

در ادامه باید معادلات حاکم را داخل لایه مرزی حل کرد و برای شرط مرزی در انتهای لایه مرزی از حل هسته مرکزی محفظه استفاده نمود. برای بدست آوردن جوابها در لایه مرزی دو راستای جدید s و n تعریف می‌شود، که s در راستای دیواره‌های محفظه و n عمود بر آن می‌باشد.

اگر $n\to\infty$، جوابها با جوابهای هسته مرکزی محفظه برابر می‌شود، یعنـی $U \to \xi_0 U(s)$ و $\theta \to \frac{1}{2}$، که $U(s)$ تابعی متناوب از s می‌باشد. معادلات حاکم با توجه به این دو راستای تعریف شـده چنـین می‌شوند:

$$U\frac{\partial V}{\partial s} + V\frac{\partial V}{\partial n} = \xi_0^2 V\frac{dV}{ds} - PrGRa\left(\theta - \frac{1}{2}\right) + Pr\frac{\partial^2 V}{\partial n^2} \tag{۱۴-۱}$$

$$U\frac{\partial \theta}{\partial s} + V\frac{\partial \theta}{\partial n} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial n^2} \tag{۱۵-۱}$$

که در آن، G ضریب متغیری است که در دیواره عمودی سمت راست برابر ۱- و سمت چـپ برابر ۱ بوده و در دیواره‌های افقی برابر صفر است.

جواب در هسته مرکزی با توجه به آزمایشات صـورت گرفتـه بـر روی صـفحه تخـت توسـط اشمیت و بکمن[9] [۹] بصورت زیر درنظر گرفته شده است:

$$\xi_0 \approx 0.76\left(PrRa\frac{L}{D}\right)^{1/2} \tag{۱۶-۱}$$

و بر اساس آن، عدد ناسلت چنین بیان می‌شود:

$$Nu = 0.48\left(\frac{Ra}{Pr}\left(\frac{L}{D}\right)^3\right)^{1/4} \tag{۱۷-۱}$$

بچلر خود اذعان می‌کند که این روش برای حل لایه مرزی روش مناسـبی نیسـت و از روش خطی سازی آسن[10] نیز به دلیل تعریف توابع متناوب و روش حـل بـر اسـاس چـرخش بـه جـواب نرسیده است.

وی چنین نتیجه می‌گیرد که برای هوا اگر فاصله دیـواره‌هـای عمـودی (بـا اخـتلاف دمـای $۷.۵\ ^oC$) کمتر از $۱cm$ باشد، فقط انتقال حرارت هدایتی وجود دارد و انتقال حرارت بر واحـد سـطح دیواره‌های عمودی با افزایش فاصله بین آنها تا حدود $۲.۵cm$ کاهش پیدا می‌کند و بعد از آن تقریبا متناسب با $L^{-۱/۴}$ ثابت باقی می‌ماند.

بچلر نتایج خود را با کارهای آزمایشگاهی که توسط ژاکوب[11] در کتاب انتقال حرارت منتشـر شده است، مقایسه می‌کند، اما مقادیر ناسلت او برای رایلی‌های زیاد با کارهای آزمایشگاهی تطـابق

9. Schmidt & Beckman
10. Ossen
11. Jakob

خوبی ندارد، ولی نگرش او به مسئله تا حدود زیادی درست است و پایه‌ای برای ادامه کار شده است.

۱-۲-۲- کارهای آزمایشگاهی اکرت و الدر

اکرت در سال ۱۹۶۱ نتایج کار آزمایشگاهی خود را منتشر می‌کند[۲]. او از هوا به عنوان سیال عامل استفاده کرده و به دلیل ثابت بودن مقدار پرانتل هوا، نتایج خود را با عدد گراشف (Gr) ارائه می‌دهد. وی مشاهدات خود را چنین بیان می‌کند.

وقتی انتقال حرارت جابجایی حاکم است، لایه مرزی تشکیل می‌شود که اختلاف دما در آن مشهود است. در هسته مرکزی محفظه تغییرات دما در راستای افقی نداریم ولی بر خلاف گفته بچلر در راستای عمودی تغییرات مشاهده می‌شود. دما در هسته مرکزی محفظه بصورت خطی تغییر می‌کند و برای نسبت منظرهای متفاوت تغییری در آن مشاهده نمی‌شود.

عدد ناسلت موضعی بصورت تابعی از عدد گراشف، عدد پرانتل، نسبت منظر (L/D) و فاصله از پایین محفظه (Y/D) می‌باشد:

$$Nu\left(Gr, pr, \frac{L}{D}, \frac{Y}{D}\right) = 1 + 0.00166\frac{D}{L}Gr_D^{0.9} \tag{۱-۱۸}$$

گرچه مقادیری که از رابطه فوق برای عدد ناسلت جریان روی صفحه تخت عمودی بدست می‌آید، با نتایج آزمایشگاهی در جریان لایه مرزی تطابق نسبتاً خوبی دارد، ولی شیب تغییرات عدد ناسلت نسبت به عدد گراشف برای آنها کمی متفاوت است.

انتقال حرارت جابجایی هنگامی اتفاق می‌افتد که مقدار عدد گراشف از حدی بالاتر بوده و نسبت منظر (L/D) از حدی کمتر باشد. در این حالت، عدد ناسلت چنین محاسبه می‌شود:

$$Nu_Y = \frac{\acute{h}Y}{K} \qquad q = \acute{h}(T_L - T_M)$$

$$\overline{Nu_L} = \frac{\bar{h}L}{K} \qquad \bar{h}(T_L - T_R) = \frac{1}{L}\int_0^L q\,dY$$

$$\overline{Nu_L} = \frac{1}{K(T_L - T_R)}\int_0^L q\,dY = \int_0^L \frac{Nu_Y}{Y}\frac{T_L - T_M}{T_L - T_R}dY \tag{۱-۱۹}$$

که در آن، T_M دمای میانگین در هر ارتفاع می‌باشد.

براساس نمودار دما در هسته مرکزی محفظه، رابطه بین دماها و در نتیجه عدد ناسلت

چنین می‌شود:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{T_L-T_M}{T_L-T_R} = 0.83 - 0.6\frac{Y}{L} \\ Gr = \frac{g\beta(T_L-T_M)Y^3}{\vartheta^2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \overline{Nu_L} = 0.119(Gr_L)^{0.3} \qquad (۲۰-۱)$$

که عدد ناسلت بر اساس طول محفظه (D) به شکل زیر باز نویسی می‌شود:

$$Nu_D = 0.119(Gr_D)^{0.3}\left(\frac{D}{L}\right)^{0.1} \qquad (۲۱-۱)$$

بعد از اکرت، الدر در سال ۱۹۶۵ نتایج کار آزمایشگاهی خود را منتشر کرد[۳]. وی از دو سیال پارافین پزشکی و روغن سیلیکون برای آزمایشات خود استفاده نمود و بیان کرد که استفاده از تقریب بوزینسک برای بیان تغییرات چگالی بخاطر ایجاد نیروی شناوری درست است ولی بقیه خواص سیال تابع دما نیست. وی بعد از بیان نتایج آزمایشگاهی روابط تئوری را مورد بررسی قرار داد و هدف خود را بدست آوردن گرادیان دما (B) در هسته مرکزی محفظه و بررسی مکانیزم تشکیل جریان ثانویه بیان کرد.

الگوی خطوط جریان، نشان می‌دهد که جریان ثانویه در محفظه‌های بلند در اعداد رایلی حدود $۱۰^۵$ رخ می‌دهد که با نمایان شدن سلولهای چرخشی دیگری در سلول چرخشی اصلی، قابل مشاهده است. الدر بیان می‌کند که برای محفظه‌هایی با ضریب منظر کمتر در عدد رایلی $۱۰^۵$، خطوط جریان بصورت چشم گربه‌ای شده و برای عدد رایلی حدود $۱۰^۷$ جریان ناپایدار می‌شود. نتایج ایشان بصورت زیر خلاصه می‌شوند:

شکل پروفیل دما در عدد رایلی $۴×۱۰^۵$، حالت تقارن را نسبت به متوسط دمای دیواره‌ها و مرکز محفظه، برای ارتفاع‌های مختلف نشان می‌دهد.

برای رایلی $۱.۲×۱۰^۶$ دما در هسته مرکزی محفظه رسم شده و مشاهده شده است که تغییرات آن بجز در پایین و بالای محفظه خطی است و رابطه $Bh = 0.50[1 - 0.04\frac{\vartheta_R-\vartheta_L}{\vartheta_L}]$ برای اعداد رایلی بزرگتر از $۱۰^۵$ برقرار است. (B: گرادیان دما در هسته محفظه، h: نسبت ارتفاع به عرض محفظه، ϑ_R: لزجت در دمای دیواره سرد و ϑ_L: لزجت در دمای دیواره گرم)

در عدد رایلی $۶.۵۶×۱۰^۵$، سرعت روی خط افقی وسط محفظه صفر نبوده ولی در عدد رایلی $۳.۶۱×۱۰^۶$ مقدار سرعت در هسته مرکزی محفظه صفر است.