بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه

بخش ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض گرایش جبر و منطق

G_H- حلقه‌ها

مؤلف:

صادق مشایخی

استاد راهنما:

دکتر ارشام برومند سعید

آذر ماه ۱۳۹۱

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط درجه کارشناسی ارشد به

بخش ریاضی

دانشکده ریاضی و رایانه

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچ‌گونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی‌شود.

دانشجو: صادق مشایخی

استاد راهنما: دکتر ارشام برومند سعید

داور ۱: اسفندیار اسلامی

داور ۲: نصرت اله شجره پور صلواتی

معاون آموزشی و پژوهشی دانشکده:

تقدیم به:

پدر و مادر مهربان و فداکارم

همسر عزیزتر از جانم

گل زندگی‌ام شیدا

تشکر و قدردانی:

منت خدای را عزوجل که طاعتش موجب قربت است و به شکر اندرش مزید نعمت. هر نفسی که فرو می‌رود ممد حیاتست و چون برآید مفرح ذات. پس در هر نفسی دو نعمت است و بر هر نعمت شکری واجب.

از استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای دکتر ارشام برومند سعید، تشکر و قدردانی بسیار می‌نمایم، چرا که در به ثمر رسیدن این اثر از هیچ کمک و راهنمایی دریغ نکرده‌اند.

از اساتید بزرگوار بخش ریاضی و رایانه که افتخار شاگردی آن بزرگواران را داشته‌ام خصوصاً جناب آقای دکتر حسین مومنایی کمال تشکر را دارم.

در پایان از همسر عزیزم که آرامش روحی و آسایش فکری فراهم نمودند تا مراتب تحصیلی و نیز پایان نامه درسی را به نحو احسن به اتمام برسانم، سپاسگزاری می‌نمایم.

صادق مشایخی

آذر ماه ۱۳۹۱

چکیده:

در این پایان نامه به معرفی کلاسی از ابر ساختارها که G_H- حلقه نامیده می‌شود خواهیم پرداخت. همچنین شرایط لازم و کافی برای اینکه G_H- حلقه به G_H- حلقه‌ی بخشی (و G_H- حلقه بخشی قوی) تبدیل شود را بدست می‌آوریم. در ادامه مفهوم ایده آل‌ها در G_H- حلقه و G_H- حلقه با مجموعه‌ی همانی (به طور مختصر i- مجموعه) بیان شده است. قضیه یکریختی روی G_H- حلقه‌ها که شبیه به قضیه‌ی اول یکریختی روی حلقه‌ها است را ثابت می‌کنیم. روی هر حلقه‌ی R، ساختار G_H- حلقه‌ای R_A که توسط $A \in P^*(R)$ (که $|A| \geq ۲$) القاء شده است را می‌سازیم. در پایان به مطالعه‌ی G_H- حلقه R_A روی حلقه‌ی R بنا بر ماهیت مجموعه‌ی A ای که انتخاب کرده‌ایم خواهیم پرداخت.

کلمات کلیدی: G_H- حلقه، G_H- حلقه‌ی بخشی، G_H- میدان، G_H- حلقه‌های روی یک حلقه

مقدمه

در سال ۱۹۳۴ مارتی[۱] شروع به مطالعه‌ی ابر گروه‌ها کرد. ساختار جبری Γ- حلقه‌ای، انگیزه‌ای برای ایده‌ی G_H- حلقه است. مفهوم Γ- حلقه توسط نوباساوا[۲] در سال ۱۹۶۴ معرفی شده و در ادامه توسط بارنز[۳]، بوت[۴]، کیونو[۵]، لو[۶] و بسیاری دیگر مطالعه شده و توسعه یافته است. بارنز در سال ۱۹۶۶، Γ- حلقه را از طریق محدود کردن برخی اصول موضوعه ی Γ- حلقه‌ی نوباساوا معرفی کرد که در ادامه معرفی شده است. . میتاس[۷] در سال ۱۹۷۳ نشان داد که ابر حلقه‌ی کراسنر، تعمیمی از ابر حلقه است. ابر حلقه‌ی کراسنر[۸] که توسط کراسنر معرفی شده است، ساختار ابر ترکیباتی $(S,+,\cdot)$ است که $(S,+)$ ابر گروه متعارف و $(S,\cdot)$ نیم گروه است. در سال ۲۰۰۵، چاوپراکانی[۹] و کمپراسیت[۱۰]، مفهوم نیم ابر حلقه $(S,+,\cdot)$ را معرفی کردند که $(S,+)$ نیم ابر گروه و $(S,\cdot)$ نیم گروه است. در سال ۲۰۰۸ ،در کتاب سن[۱۱] و داس گوپتا [۱۲]کلاس دیگری از ابر ساختارها که ابر نیم حلقه نامیده می‌شود تعریف شده است. در مقابلِ ابر حلقه‌ی کراسنر، نوع دیگری از ابر حلقه‌ها نیز توسط سن و داس گوپتا معرفی شده است. این نوع ابر حلقه، ابر نیم حلقه‌ی $(S,+,\odot)$ است که در آن $(S,+)$، گروه جابجایی است. روتا[۱۳]، شروع به مطالعه‌ی ابر حلقه‌ی ضربی کرد. G_H- حلقه‌ها و ابر حلقه‌های ضربی تشکیل دو کلاس متمایز از ابر ساختارها می‌دهند که هیچ کدام شامل دیگری نیست (مثال‌های ۲ . ۱ . ۴ (الف)، (ب) و (ج)). پایان نامه حاضر شامل چهار فصل است. در فصل اول تعاریف و مقدمات مورد استفاده در فصل‌های بعد معرفی می‌گردد. در فصل دوم خواص G_H- حلقه‌ها بیان می‌شود. در فصل سوم درباره ایده آل‌ها در G_H- حلقه‌ها بحث شده است. در فصل چهارم به بیان G_H- حلقه‌های روی یک حلقه خواهیم پرداخت.

---
[1] Marty
[2] Nobusawa
[3] Barnes
[4] Booth
[5] Kyuno
[6] Luh
[7] Mittas
[8] Krasner
[9] Chaopraknoi
[10] Kemprasit
[11] Sen
[12] Dasgupta
[13] Rota

فهرست مطالب

فصل اول

پیش نیازها و مقدمات

فصل اول تحت عنوان پیش نیازها و مقدمات آمده است و در آن به بیان مفاهیم، معرفی نمادها و تعاریفی می‌پردازیم که در فصل‌های دیگر به آن‌ها نیاز داریم. سعی ما بر این بوده که در حد ممکن نیاز خواننده را به درک این مفاهیم پایه‌ای رفع کنیم. البته بدیهی است که داشتن آشنایی مقدماتی با این زمینه‌ها برای خواننده‌ی علاقمند به این بحث، ضروری است.

۱ . ۱ حلقه

ددِ کیند[۱] مفهوم حلقه را معرفی کرد. واژه‌ی حلقه، سرچشمه‌اش در زبان آلمانی واژه‌ی zahring است. اصطلاح حلقه توسط هیلبرت[۲] ابداع شد. اولین تعریف مجرد یک حلقه توسط فرانکل[۳] (از دیدگاه نظریه‌ی مجموعه‌ها) در سال ۱۹۱۴ در مقاله‌ای منتشر شد. تعریف فرانکل شامل حلقه‌های جابجایی و ناجابجایی است. او ماتریس‌ها و دستگاه‌های اعداد مختلط را به عنوان مثال‌هایی از حلقه‌ها مطرح کرد.

نخستین بار، مفهوم ایده آل توسط ددِکیند در سال ۱۸۷۶ در ویرایش سوم کتابش معرفی شد. بعدها این مفهوم توسط هیلبرت و بویژه نوتر[۴] توسعه داده شد.

ریچارد ددِ کیند اعداد اول به ایده آل‌های اول گسترش داد. در نظریه حلقه‌ها می‌توان ایده آل‌های اول را به جای اعداد اول و ایده آل‌های نسبت به هم اول را به عنوان تعمیمی از اعداد نسبت به هم اول در نظر گرفت. اگر چه در تعریف حلقه، مطالعه‌ی حلقه‌های چند جمله‌ای، حلقه‌های اعداد صحیح، حلقه‌های اعداد مختلط از اهمیت خاصی برخوردار است.

در این بخش حلقه را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱ . ۱ . ۱ . ۱ [۷] مجموعه‌ی نا تهی R حلقه است اگر R دارای دو عمل دوتایی+ و $\cdot$ باشد به طوری که برای هر $a,b,c \in R$ داریم

(i) $(R,+)$ یک گروه آبلی باشد،

(ii) $(R,\cdot)$ یک نیم گروه باشد،

[۱] Dedekind
[۲] Hillbert
[۳] Fraenkel
[۴] Noether

(iii)عمل $\cdot$ نسبت به عمل$+$ توزیع پذیر از سمت چپ و راست باشد، یعنی

$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$ و $(y+z)\cdot x=y\cdot x+z\cdot x$.

تعریف ۱ . ۱ . ۲ . [۷] اگر برای هر $a\in R$ حلقه‌ی R دارای عضو ۱ باشد به قسمی که $1\cdot a=a\cdot 1=a$ آن گاه حلقه را یکدار می‌نامیم.

مثال ۱ . ۱ . ۳ . [۷] مجموعه‌های $\mathbb{R}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{C}$ با جمع و ضرب معمولی تشکیل حلقه جابجایی می‌دهند.

مثال ۱ . ۱ . ۴ . [۷] ماتریس‌های $n\times n$ روی $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$) تشکیل حلقه ناجابجایی می‌دهند.

۱ . ۲ ابر ساختارهای جبری

ابر ساختارهای جبری تعمیم مناسبی از ساختارهای جبری کلاسیک هستند. در ساختار جبری کلاسیک ترکیب دو عنصر برابر یک عنصر است، در حالی که در ابر ساختارهای جبری ترکیب دو عنصر برابر یک مجموعه است. به طور دقیق تر، اگر H مجموعه‌ی نا تهی و $P^*(H)$ مجموعه‌ای از همه‌ی زیر مجموعه‌های ناتهی H باشد، نگاشت‌هایی به صورت

$$f_i:H\times H\to P^*(H)$$

که در آن n عدد صحیح مثبت و $i\in\{1,2,\dots,n\}$ است را در نظر بگیریم، آن گاه هر نگاشت f_i یک ابر عمل نامیده می‌شود. برای هر $x,y\in H$، $f_i(x,y)$ ابر حاصل ضرب x و y نامیده می‌شود. ساختار جبری $(H,f_1,\dots,f_n)$ ابر ساختار با n ابر عمل نامیده می‌شود.

مفهوم ابر گروه در سال ۱۹۳٤ توسط مارتی معرفی شد. تعریف مارتی در ذیل بیان شده است.

تعریف ۱ . ۲ . ۱ . [۶] فرض کنید H مجموعه‌ی نا تهی و $\bullet:H\times H\to P^*(H)$ ابر عمل باشد. زوج $(H,\bullet)$ ابر گروه وار نامیده می‌شود.

برای هر کدام از زیر مجموعه‌های نا تهی A و B از H و $x\in H$ تعریف می‌کنیم

$$A\bullet x=A\bullet\{x\}$$

$$x\bullet B=\{x\}\bullet B$$

$$A \bullet B = \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} a \bullet b$$

تعریف ۱ . ۲ . ۲ . [۶] ابر گروه وار $(H,\bullet)$ نیم ابر گروه است، اگر برای هر $a,b,c \in H$

$$(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$$

که این یعنی

$$\bigcup_{u \in a \bullet b} u \bullet c = \bigcup_{v \in b \bullet c} a \bullet v$$

تعریف ۱ . ۲ . ۳ . [۶] ابر گروه وار $(H,\bullet)$ ابر شبه گروه است اگر برای هر $a \in H$

$$a \bullet H = H \bullet a = H$$

تعریف ۱ . ۲ . ۴ . [۶] ابر گروه وار $(H,\bullet)$ که هم نیم ابرگروه و هم ابر شبه گروه است، ابر گروه نامیده می‌شود.

حال به بررسی مثال‌هایی از ابر گروه‌ها می‌پردازیم.

مثال ۱ . ۲ . ۵ . [۶] (۱) اگر H مجموعه‌ی نا تهی و برای هر $x,y \in H$، $x \bullet y = H$ آن گاه $(H,\bullet)$ ابر گروه است (که ابر گروه کلی نامیده می‌شود).

(۲) فرض کنید $(S,\cdot)$ نیم گروه و P مجموعه‌ی نا تهی از S باشد و برای هر $x,y \in S$ $x \bullet y = xPy$ باشد. آن گاه $(S,\bullet)$ نیم ابر گروه است. اگر $(S,\cdot)$ گروه باشد آن گاه $(S,\bullet)$ ابر گروه است (که P - ابر گروه نامیده می‌شود).

(۳) اگر $(G,\cdot)$ گروه باشد، H زیر گروه نرمال از G و برای هر $x,y \in G$

$$x \bullet y = xyH$$

آن گاه $(G,\bullet)$ ابر گروه است.

تعریف ۱ . ۲ . ۶ . [۶] زیر مجموعه‌ی نا تهی K از نیم ابر گروه $(H,\cdot)$ زیر نیم ابر گروه نامیده می‌شود اگر خودش با ابر عمل القا شده از $(H,\cdot)$ نیم ابر گروه باشد.
به عبارت دیگر زیر مجموعه نا تهی K از ابر گروه $(H,\bullet)$ زیر نیم ابر گروه است اگر داشته باشیم

$$K \bullet K \subseteq K$$

تعریف ۱ . ۲ . ۷ . [۶] زیر مجموعه نا تهی K از ابر گروه $(H,\bullet)$ زیر ابر گروه است اگر برای هر $a \in K$

$$a \bullet K = K \bullet a = K$$

۱ . ۳ ابر حلقه کراسنر

ابتدا ابر حلقه کراسنر را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱ . ۳ . ۱ . [۸] ابر حلقه کراسنر، ساختار جبری $(R,+,\cdot)$ است که در اصول موضوعه زیر صدق می‌کند.

(۱) $(R,+)$ که در آن $+ : R \times R \to P^*(R)$ یک ابر عمل است، ابر گروه متعارف تعویض پذیر می‌باشد یعنی؛

(i) $x+(y+z)=(x+y)+z$ برای هر $x,y,z \in R$،

(ii) $x+y=y+x$ برای هر $x,y \in R$،

(iii) وجود دارد $\circ \in R$ به طوری که $\circ + x = \{x\}$ برای هر $x \in R$،

(iv) برای هر $x \in R$ عضو منحصر به فرد $-x \in R$ وجود دارد که $\circ \in x+(-x)$،

(v) $z \in x+y$ نتیجه می‌دهد $y \in -x+z$ و $x \in z+(-y)$.

(۲) $(R,\cdot)$ نیم گروهی با صفر است یعنی $x \cdot \circ = \circ \cdot x = \circ$.

(۳) عمل ضرب نسبت به ابر عمل جمع توزیع پذیر (چپ و راست) است.

مثال ۱ . ۳ . ۲ . [۶] فرض کنید $R=\{۱,۲,۳\}$ مجموعه‌ای با ابر عمل+ و عمل دوتایی • تعریف شده به صورت

$\bullet$	۰	۱	۲
۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۲
۲	۰	۱	۲

$+$	۰	۱	۲
۰	$\{۰\}$	$\{۱\}$	$\{۲\}$
۱	$\{۱\}$	$\{۱\}$	R
۲	$\{۲\}$	R	$\{۲\}$

باشد. آن گاه $(R,+,\bullet)$ ابر حلقه است.

۱ . ۴ ابر حلقه‌های ضربی

این مفهوم توسط روتا در سال ۱۹۸۲ معرفی شد. ضرب یک ابر عمل و جمع یک عمل است.

تعریف ۱ . ۴ . ۱ . [۱۶] ساختار جبری $(R,+,\cdot)$ یک ابر حلقه ضربی است اگر

(۱) $(R,+)$ گروه آبلی باشد.

(۲) $(R,\cdot)$ نیم ابر گروه باشد.

(۳) $a\cdot(b+c)\subseteq a\cdot b+a\cdot c$ و $(b+c)\cdot a\subseteq b\cdot a+c\cdot a$ برای هر $a,b,c\in R$.

(٤) $a\cdot(-b)=(-a)\cdot b=-(a\cdot b)$ برای هر $a,b\in R$.

اگر در (۳) به جای شمول، تساوی باشد می‌گوییم ابر حلقه ضربی ”توزیع پذیر قوی“ است.

اگر برای هر $a\in R$ وجود داشته باشد عضو $e\in R$ به طوری که $a\in a\cdot e\cap e\cdot a$ آن گاه e همانی ضعیف R نامیده می‌شود.

تعریف ۱ . ۴ . ۲ . [۱۷] یک ابر نیم حلقه، ابر نیم گروهِ جابجایی (جمعی) $(S,+)$ همراه با ابر عمل $\odot:S\times S\to P(S)$ است، به طوری که برای هر $x,y,z\in S$ داریم:

(i) $x\odot(y\odot z)=(x\odot y)\odot z$.

(ii) $(x+y)\odot z=x\odot z+y\odot z$، $x\odot(y+z)=x\odot y+x\odot z$

(که برای هر $A,B\in P(S)$، $A+B=\{a+b : a\in A, b\in B\}$).

حال مثالی را در این رابطه بررسی می‌کنیم.

مثال ۱ . ۴ . ۳ . [۶] حلقه‌ی $(R,+,\cdot)$ و ایده آل I از آن را در نظر بگیرید. اگر برای هر $a,b\in R$ ابر عمل به صورت $a*b=a\cdot b+I$ تعریف شود آن گاه $(R,+,*)$ ابر حلقه ضربی توزیع پذیر قوی است. زیرا می‌دانیم $(R,+)$ گروه آبلی است. پس برای هر $a,b,c\in R$ داریم:

$$a*(b*c)=a*(b\cdot c+I)=\bigcup_{h\in I} a*(b\cdot c+h)=\bigcup_{h\in I} a\cdot(b\cdot c+h)=a\cdot b\cdot c+I$$

به طور مشابه $(a*b)*c=a\cdot b\cdot c+I$.

از طرفی برای هر $a,b,c\in R$

$$a*(b+c)=a\cdot(b+c)+I=a\cdot b+a\cdot c+I=a*b+a*c$$

به طور مشابه $(b+c)*a=b*a+c*a$.

بالاخره برای هر $a,b\in R$

$$a*(-b)=a\cdot(-b)+I=(-a)\cdot b+I=(-a)*b$$

و

$$-(a*b)=(-a\cdot b)+I=(-a)\cdot b+I=a*(-b)$$

قضیه ۱ . ۴ . ۴ . [۱۴] اگر $(H,\bullet)$ ابر ساختار باشد که در آن برای هر $a,b\in H$، $a\bullet b\neq\varnothing$ می‌توان ابر ساختار متمم دار را به صورت زیر تعریف کرد:

$$a\bullet' b=\mathcal{C}(a\bullet b)=H-(a\bullet b)$$

که در آن $\mathcal{C}$ متمم مجموعه‌ای است.

قضیه ۱ . ۴ . ۵ . [۱۴] اگر $(A,+,\bullet)$ ابر حلقه ضربی و $(A,+,\bullet')$ ابر ساختار متمم دار باشد آن گاه برای هر $a,b\in A$ داریم:

$$(-a)\bullet' b=a\bullet'(-b)=-(a\bullet' b)$$

قضیه ۱ . ۴ . ۶ . [۶] برای هر ابر حلقه‌ی توزیع پذیر قوی $(R,+,\cdot)$ گزاره‌های زیر معادلند:

(۱) وجود دارد $a \in R$ به طوری که $|\circ \cdot a| = ۱$. (برای مجموعه A تعداد آن را با $|A|$ نشان می‌دهیم)

(۲) وجود دارد $a \in R$ به طوری که $|a \cdot \circ| = ۱$.

(۳) $|\circ \cdot \circ| = ۱$.

(۴) برای هر $a,b \in R$ به طوری که $|a \cdot b| = ۱$.

(۵) $(R,+,\cdot)$ حلقه است.

تعریف ۱ . ۴ . ۷ . [۶] ابر حلقه‌ی $(R,+,\cdot)$ یکانی است اگر شامل عضو یکه‌ای باشد که $a \cdot u = u \cdot a = \{a\}$ برای هر $a \in R$.

تعریف ۱ . ۴ . ۸ . [۶] فرض کنید $(R,+,\cdot)$ ابر حلقه‌ی ضربی و H زیر مجموعه نا تهی از R باشد. گوییم H زیر ابر حلقه‌ای از $(R,+,\cdot)$ است اگر $(H,+,\cdot)$ ابر حلقه‌ی ضربی باشد.

۱ . ۵ H_V - گروه، H_V - حلقه، Γ - حلقه

ابر ساختارها توسط وجوکلیس[1] در سال ۱۹۹۰ تعمیم داده شد و آن را H_V - ساختار نامید.
در واقع برخی اصول موضوعه متناظر با ابر ساختارها هم چون قانون شرکت پذیری، قانون توزیع پذیری و نظیر این‌ها با اصول موضوعه ضعیف تری جایگزین شده است.

قضیه ۱ . ۵ . ۱ . [۶] ابر ساختار $(H,\cdot)$، H_V-گروه است اگر

(۱) $x \cdot (y \cdot z) \cap (x \cdot y) \cdot z \neq \varnothing$. برای هر $x,y,z \in H$.

(۲) $a \cdot H = H \cdot a = H$ برای هر $a \in H$.

مثال ۱ . ۵ . ۲ . [۶] (۱) فرض کنید $(G,\cdot)$ گروه و R رابطه‌ی هم ارزی روی G باشد. در $\frac{G}{R}$ ابر عمل $\odot$ به صورت $\overline{x} \odot \overline{y} = \{\overline{z} \mid \overline{z} \in \overline{x} \cdot \overline{y}\}$ تعریف شده که در آن $\overline{x}$ معرف کلاس هم ارزی از عضو x است. آن گاه $(G,\odot)$، H_V-گروه است.

[1] Vougiouklis

(۲) گروه $(\mathbb{Z}^n,+)$ و $m_1,\dots,m_n\in\mathbb{N}$ را در نظر بگیرید. ابر عمل $\oplus$ در $\mathbb{Z}^n$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(m_1,0,\dots,0)\oplus(0,0,\dots,0)=\{(m_1,0,\dots,0),(0,0,\dots,0)\}$$
$$(0,m_1,\dots,0)\oplus(0,0,\dots,0)=\{(0,m_1,\dots,0),(0,0,\dots,0)\}$$
$$(0,0,\dots,m_n)\oplus(0,0,\dots,0)=\{(0,0,\dots,m_n),(0,0,\dots,0)\}$$

و در سایر حالات $\oplus=+$ در نظر می‌گیریم. آن گاه $(\mathbb{Z}^n,\oplus)$ یک H_V-گروه است.

تعریف ۱ . ۵ . ۳ . [۶] ساختار جبری $(R,+,\cdot)$، H_V- حلقه است اگر

(۱) $(R,+)$، H_V-گروه باشد.

(۲) $(R,\cdot)$، H_V-نیم گروه باشد.

(۳) عمل $\cdot$ توزیع پذیر ضعیف نسبت به عمل $+$ است یعنی برای هر $x,y,z\in R$ داریم:

$(x\cdot(y+z))\cap(x\cdot y+x\cdot z)\neq\varnothing$ و $((x+y)\cdot z)\cap(x\cdot z+y\cdot z)\neq\varnothing$.

اگر H هم نسبت به جمع و هم نسبت به ضرب جابجایی باشد، آن را H_V-حلقه جابجایی می‌نامیم.

مثال ۱ . ۵ . ۴ . [۶] فرض کنید $(R,+,\cdot)$ یک حلقه و $\mu:R\to[0,1]$ تابع باشد. ابر عمل‌های $\uplus$، $\otimes$ و $*$ را به صورت

$$x\uplus y=\{t\,|\,\mu(t)=\mu(x+y)\}$$

و

$$x\otimes y=\{t\,|\,\mu(t)=\mu(x\cdot y)\}$$

و

$$x*y=y*x=\{t\,|\,\mu(x)\leq\mu(t)\leq\mu(y)\}$$

که در آن

$$\mu(x) \le \mu(y)$$

تعریف می‌کنیم. آن گاه $(R,*,*)$، $(R,*,\otimes)$، $(R,*,\uplus)$ و $(R,\uplus,\otimes)$، H_V - حلقه هستند.

تعریف ۱ . ۵ . ۵ . [۱۰] گروه جمعی M یک Γ - حلقه نامیده می‌شود اگر برای هر گروه جابجایی جمعی Γ، نگاشت $M \times \Gamma \times M \to M$ تعریف شده به صورت $(x,\alpha,y) \mapsto x\alpha y$ موجود باشد، به طوری که برای هر $x,y,z \in M$ و $\alpha,\beta \in \Gamma$ داریم:

(i) $x\alpha(y+z) = x\alpha y + x\alpha z$.

(ii) $(x+y)\alpha z = x\alpha z + y\alpha z$.

(iii) $x(\alpha+\beta)y = x\alpha y + x\beta y$.

(iv) $x\alpha(y\beta z) = (x\alpha y)\beta z$.

متذکر می‌شویم که $\circ = \circ\alpha y = x \circ y = x\alpha\circ$ برای هر $x,y \in M$ و $\alpha \in \Gamma$.

اگر شرایط تعریف Γ - حلقه با شرایط زیر همراه شود

$(۱')$ $x\alpha y \in M$ و $\alpha x \beta \in \Gamma$.

$(۲')$ $(x+y)\alpha z = x\alpha z + y\alpha z$،

$x(\alpha+\beta)y = x\alpha y + x\beta y$

و $x\alpha(y+z) = x\alpha y + x\alpha z$.

$(۳')$ $(x\alpha y)\beta z = x(\alpha y\beta)z = x\alpha(y\beta z)$.

$(۴')$ برای هر $x,y \in M$، $x\alpha y = \circ$ نتیجه می‌دهد $\alpha = \circ$.

آن گاه Γ - حلقه‌ی M در معنی نوباساوا است.

مثال ۱ . ۵ . ۶ . [۱] فرض کنید X و Y گروه‌های آبلی باشند و $M = Hom(X,Y)$، $\Gamma = Hom(Y,X)$ و $a\alpha b$ ترکیب توابع باشد. آن گاه M یک Γ - حلقه است.

تعریف ۱ . ۵ . ۷ . [۱۰] Γ - حلقه‌ی M در معنی نوباساوا ساده است اگر برای عناصر نا صفر $x,y \in M$ وجود داشته باشد $\gamma \in \Gamma$ به طوری که $x\gamma y \neq \circ$.

تعریف ۱ . ۵ . ۸ . [۱۰] زیر گروه I از Γ- حلقه‌ی M ایده آل راست (چپ) از M است اگر $I\Gamma M \subseteq I$ ($M\Gamma I \subseteq I$).

اگر I هم ایده آل راست از M و هم ایده آل چپ از M باشد آن گاه ایده الی از M است و به صورت $I\Delta M$ نمایش داده می‌شود. در این حالت گروه خارج قسمتی $\frac{M}{I}$ یک Γ- حلقه با عمل $(x+I)\gamma(y+I)=x\gamma y+I$ است.

فصل دوم

خواص G_H- حلقه‌ها