دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضی محض (گرایش جبر)

عنوان:

شاخص وینر اعمال گراف‌ها و کاربرد آن در محاسبه‌ی شاخص وینر نانولوله‌های از نوع C_4

استاد راهنما:

پروفسور سید علی‌رضا اشرفی

استاد مشاور:

دکتر مجتبی قربانی

به‌وسیله:

سمانه حسین‌زاده

بهمن ماه ۸۸

تقدیم به:

پدر و مادر مهربانم.

تشکر و قدردانی

سپاس و ستایش خداوندی را که توفیق انجام این پژوهش را نصیب کرد که اگر خواست او نبود کار به سامان نمی‌آمد. سپاس فراوان به محضر استاد اندیشمند و گران‌مایه جناب آقای پروفسور سید علی‌رضا اشرفی که بی‌دریغ و بی‌شائبه در طول این راه از هیچ کمکی فروگذار نکردند و دلگرمی‌هایشان همواره امیدآفرین بود. هم چنین زحمات بی‌دریغ استاد مشاورم جناب آقای دکتر قربانی را ارج می‌نهم. وظیفه‌ی خود می‌دانم به اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر احمد غلامی و جناب آقای دکتر طائری که این پایان‌نامه را مورد مطالعه قرار داده‌اند و هم‌چنین به جناب آقای دکتر بامنیری نماینده‌ی محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه که در جلسه‌ی دفاع شرکت نموده‌اند، مراتب تشکر و امتنان را تقدیم دارم. این امتنان اگر چه ناچیز است امید، که بتواند گوشه‌ای از وسعت بی‌کران مقام والایشان را پاس نهد.

سمانه حسین‌زاده

بهمن ۱۳۸۸

چکیده

یک شاخص توپولوژیک برای یک گراف G عددی حقیقی است که تحت یک‌ریختی گراف‌ها پایاست. شاخص وینر اوّلین شاخص توپولوژیک مبتنی بر تابع فاصله است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W(G) = \frac{1}{۲} \sum_{u \in V(G)} \sum_{v \in V(G)} d_G(u, v),$$

که در آن $d_G(u, v)$ معرف فاصله‌ی بین دو رأس u و v می‌باشد. پس از معرفی شاخص وینر، تعمیم‌های بسیاری از آن ارائه شد. یکی از آن‌ها شاخص فوق وینر بود. در این پایان‌نامه شاخص‌های پایای نوع وینر و $y-$ وینر به عنوان تعمیم‌های شاخص وینر معرفی شده‌اند. در ادامه به بررسی شاخص‌های وینر، فوق وینر، پایای نوع وینر و $y-$ وینر تعدادی از اعمال گراف می‌پردازیم و شاخص‌های وینر، فوق وینر، زاگرب اوّل و دوّم، PI، سگد، سگد یالی و سگد رأسی — یالی نانولوله و نانوچنبره از نوع $C_۴$ را با استفاده از حاصل‌ضرب دکارتی گراف‌ها به‌دست می‌آوریم.

کلمات کلیدی: شاخص توپولوژیک، اعمال دوتایی روی گراف‌ها، نانولوله $C_۴$، نانوچنبره $C_۴$.

رده‌بندی موضوعی AMS : $۰۵C۱۲$، $۰۵C۰۷$، $۹۲E۱۰$.

فهرست مطالب

۱ مقدمات و پیش‌نیازها ۳

۱—۱ تعاریف و قضایای مقدماتی ۳

۱—۲ شاخص‌های توپولوژیک گراف ۱۷

۲ شاخص و چندجمله‌ای وینر اعمال گراف ۲۴

۲—۱ رفتار شاخص و چندجمله‌ای وینر گراف‌ها تحت پنج آرایش گراف ۲۴

۲—۱—۱ شاخص وینر گراف‌های به‌دست آمده از زیرتقسیم ۲۶

۲—۱—۲ چندجمله‌ای وینر گراف‌های به‌دست آمده از زیرتقسیم ۳۲

۲—۲ شاخص وینر توان k ام یک گراف ۳۴

۲—۲—۱ نامساوی نوردهاوس — گادوم برای شاخص وینر ۳۵

۳ تعمیم شاخص وینر ۴۶

۳—۱ پایاهای نوع وینر زیرگراف‌های ایزومتریک ابرمکعب‌ها ۴۶

۳–۲ تعمیم شاخص وینر و چندجمله‌ای وینر ۶۲
۳–۲–۱ شاخص و چندجمله‌ای وینر ۶۴
۳–۲–۲ شاخص y– وینر گراف‌های ترکیبی ۶۸

۳–۳ شاخص وینر گراف‌های با بیشتر از یک رأس برشی ۷۲
۳–۳–۱ شاخص وینر گراف‌های دارای بیشتر از یک رأس برشی ۷۴

۳–۴ شاخص وینر گراف و گراف خطی آن با عدد دوری دلخواه ۸۱
۳–۴–۱ گراف‌هایی با عدد دوری صعودی ۸۴

۴ شاخص‌های توپولوژیک نانو لوله‌ها و نانو چنبره‌هایی که با مربع پوشانده شده‌اند ۹۱

۵ پایاهای نوع وینر اعمال گراف‌ها ۱۰۸

۵–۱ پایاهای نوع وینر تعدادی اعمال گراف‌ها ۱۰۸
۵–۱–۱ کران‌هایی برای پایای نوع وینر گراف‌ها ۱۱۵

۵–۲ محاسبه‌ی شاخص فوق وینر چهار جمع جدید از گراف‌ها ۱۱۹
۵–۲–۱ شاخص فوق وینر F– جمع گراف‌ها ۱۲۲

کتاب‌نامه ۱۲۹

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۱۳۴

واژه نامه فارسی به انگلیسی ۱۳۸

فهرست جدول‌ها

۳–۱ B_i ها و x_i های متناظر با آن. ۷۶

۳–۲ جواب‌های روابط بازگشتی معادله (۲۹). ۸۷

۳–۳ جواب‌های معادله‌ی پل $x^۲ - ۵y^۲ = ۴$ برای گراف G. ۸۸

۳–۴ جواب‌های معادله‌ی پل $x^۲ - ۵y^۲ = -۴$ برای گراف H. ۸۸

فهرست شکل‌ها

۱–۱ گراف‌های یک‌ریخت G و H. ۴

۱–۲ گراف $n-$ بخشی کامل. ۶

۱–۳ گراف چنبره $S = C_k \times C_m$. ۷

۱–۴ گراف $R = P_n \times C_m$. ۸

۱–۵ گراف نشان دهنده‌ی برش‌های رأسی و برش‌های یالی. ۱۶

۱–۶ گراف G و بلوک‌های آن. ۱۶

۲–۱ گراف G. ۲۵

۲–۲ گراف $L(G)$. ۲۵

۲–۳ گراف $S(G)$. ۲۶

۲–۴ گراف $T(G)$. ۲۶

۲–۵ گراف $R(G)$. ۲۷

۲–۶ گراف $Q(G)$. ۲۷

۲–۷ گراف‌های G و G_1 با $W(G) < W(G_1)$ و $W(G^2) > W(G_1^2)$. ۳۹

۲–۸ تعدادی گراف‌های از مرتبه‌ی ۵ و ٦. . . . . ۴۵

۳–۱ گراف G. ۴۹

۳–۲ نمایش کلاس‌های F_i و F_j که یکدیگر را قطع نمی‌کنند. ٦۱

۳–۳ گراف G. ۷۴

۳–۴ درخت رئوس بلوکی برشی T از G. ۷۵

۳–۵ گراف G با یک یال برشی uv. ۸۰

۳–٦ درخت رئوس بلوکی برشی گراف G در شکل ۳–۵. . . . . ۸۰

۳–۷ خانواده‌ای از گراف‌های دارای ویژگی (٢٦). ۸۵

۵–۱ گراف‌های G، H و $G +_F H$. ۱۲۰

۵–۲ نمودار گراف L_h. ۱۲۶

۵–۳ نمودار گراف Z_h. ۱۲۶

فهرست علائم و اختصارات

دور از مرتبه‌ی n .... C_n

درجه‌ی رأس v در G .... $deg_G(v)$

طول کوتاه‌ترین $u-v$ مسیر در G .... $d_G(u,v)$

قطر G .... $diam(G)$

مجموعه‌ی یال‌های G .... $E(G)$

مکمل گراف G .... $\bar{G}$

زیرگراف G به‌دست آمده از افزودن یال جدید uv .... $G+uv$

زیرگراف G به‌دست آمده از حذف یال uv .... $G-uv$

زیرگراف G به‌دست آمده از حذف S .... $G\setminus S$

یک‌ریختی دو گراف G_1 و G_2 ..... $G_1 \cong G_2$

پیوند دو گراف G_1 و G_2 ..... $G_1 + G_2$

اتصال دو گراف G_1 و G_2 ..... $G_1 \vee G_2$

تفاضل متقارن دو گراف G_1 و G_2 ..... $G_1 \oplus G_2$

ترکیب دو گراف G_1 و G_2 ..... $G_1[G_2]$

ضرب دکارتی دو گراف G_1 و G_2 ..... $G_1 \times G_2$

k امین توان G ..... G^k

گراف کامل n رأسی ..... K_n

گراف کامل دوبخشی با بخش‌های به مرتبه‌های n و m ..... $K_{n,m}$

ستاره از مرتبه‌ی n ..... S_n

گراف یالی ..... $L(G)$

اندازه‌ی G ..... $|E(G)|$

شاخص زاگرب نوع اوّل گراف G .... $M_1(G)$

شاخص زاگرب نوع دوّم گراف G .... $M_2(G)$

مجموعه رئوس روی کوتاه‌ترین مسیر بین u و v .... $I(u, v)$

مجموعه‌ی همسایگی‌های رأس v در G .... $N_G(v)$

تعداد یال‌های موازی با e .... $N_G(e)$

مسیر روی n رأس .... P_n

شاخص پادماکار—ایوان یالی گراف G .... $PI(G)$

شاخص پادماکار—ایوان رأسی گراف G .... $PI_v(G)$

مکعب n—بعدی .... Q_n

گراف زیرتقسیم .... $S(G)$

شاخص سگد رأسی گراف G .... $Sz(G)$

شاخص سگد یالی گراف G .... $Sz_e(G)$

شاخص سگد رأسی – یالی گراف G .... $Sz_{ev}(G)$

شاخص ترچ–استنکویچ–زفیرف گراف G .... $TSZ(G)$

گراف کلی .... $T(G)$

شاخص وینر گراف G .... $W(G)$

شاخص فوق وینر گراف G .... $WW(G)$

شاخص وینر یالی گراف G .... $W_e(G)$

شاخص وینر یالی–رأسی گراف G .... $W_{ev}(G)$

شاخص شولتز گراف G .... $W_+(G)$

مقدمه

یکی از روش‌های تشکیل گراف، ساختن گرافی جدید از گراف‌های قبلی است. به دو روش می‌توان این کار را انجام داد. روش اوّل این است که از یک گراف، گراف جدید بسازیم که این مستلزم تعریف عملی روی یک گراف است. روش دوّم ترکیب دو گراف و تشکیل گرافی جدید است. اوّلین شاخص توپولوژیک مبتنی بر تابع فاصله در سال ۱۹۴۷ توسط هارولد وینر تعریف شد و به منظور تعیین خواص فیزیکی بعضی از انواع آلکان‌ها مانند پارافین مورد استفاده قرار گرفت. گرائواچ و پیزانسکی اوّلین کسانی بودند که به محاسبه‌ی شاخص وینر حاصل‌ضرب گراف‌ها پرداختند. در این پایان‌نامه به بررسی شاخص‌های توپولوژیک اعمال گراف‌ها پرداخته شده است.

این پایان‌نامه به صورت زیر سامان‌دهی شده است:

در فصل اوّل مفاهیم و قضایایی که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند بیان شده است. در فصل دوّم چندین عمل روی گراف‌ها تعریف و نشان داده شده که شاخص و چند جمله‌ای وینر گراف‌ها با این اعمال تغییر می‌یابند. هم‌چنین نامساوی نوردهاوس — گادوم برای شاخص وینر گراف G^k بیان شده و کرانی برای شاخص وینر گراف G^k به‌دست آمده است. این فصل بر اساس مراجع [۱] و [۳۷] تدوین یافته است. در فصل سوّم رابطه‌ی θ تعریف شده و ثابت شده که اگر G یک مکعب جزئی و F افراز $E(G)$، تحت رابطه‌ی θ باشد، آن‌گاه

$$W_{\lambda+1}(G) = |F|W_{\lambda}(G) - \sum_{F_i\in F} W_{\lambda}(G \setminus F_i),$$

و دو کاربرد از آن ارائه شده است. سپس تعمیمی از شاخص وینر و چندجمله‌ای وینر گراف‌ها آمده است. هم‌چنین شاخص وینر گراف‌های با بیشتر از یک رأس برشی بر حسب شاخص وینر بلوک‌های آن‌ها و کمیت‌های دیگر به‌دست آمده است. در ادامه نیز به گراف‌هایی که در ویژگی

$W(G) = W(L(G))$ صدق می‌کنند، پرداخته شده است. مراجع اصلی این فصل، مقالات [۳]، [۹]، [۱۰]، [۱۸] و [۲۹] می‌باشند. در فصل چهارم شاخص‌های وینر، فوق وینر، وینر یالی، وینر یالی—رأسی، زاگرب اوّل و دوّم، PI، سگد، سگد یالی و سگد رأسی — یالی نانولوله و نانوچنبره از نوع C_4 با استفاده از حاصل‌ضرب دکارتی گراف‌ها به‌دست آمده است. مطالب این فصل بر اساس مقالات [۲۵]، [۲۶]، [۲۷]، [۲۸] و [۳۸] نوشته شده است. فصل پنجم شامل پایای نوع وینر تعدادی اعمال گراف‌ها است، که با استفاده از آن‌ها شاخص‌های وینر معکوس، هراری، TSZ و فوق وینر همان اعمال به‌دست می‌آیند. هم‌چنین تعدادی کران بالا و پایین برای این شاخص آورده شده است، در پایان شاخص فوق وینر چهار جمع جدید از گراف‌ها را به‌دست آورده‌ایم. مراجع اصلی این فصل، مقالات [۱۷] و [۲۰] می‌باشند.

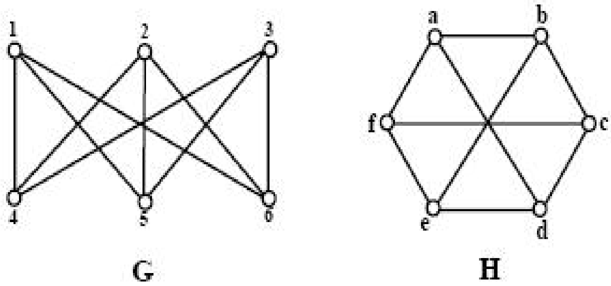
فصل ۱

مقدمات و پیش‌نیازها

این فصل شامل دو بخش است. در بخش اوّل مفاهیم و قضایایی که در فصل‌های آتی به آن‌ها نیاز داریم، آورده شده است. در بخش دوّم تعاریف مربوط به شاخص‌های توپولوژیک گراف‌ها بیان شده است.

۱—۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

ابتدا به تعاریف مربوط به گراف و چندین عمل گراف می‌پردازیم. یک گراف عبارت است از سه تایی مرتب $G = (V(G), E(G), I_G)$، که در آن $V(G)$ مجموعه‌ای ناتهی، $E(G)$ مجموعه‌ای مجزا از $V(G)$، و I_G یک نگاشت وقوع است، که به هر عضو $E(G)$ یک زوج نامرتب (یکسان یا متمایز) از $V(G)$ نظیر می‌کند. عناصر $V(G)$ را رأس‌های G، و عناصر $E(G)$ را یال‌های G می‌نامیم. اگر برای یال e از G داشته باشیم $I_G(e) = \{u, v\}$، آن‌گاه می‌نویسیم $I_G(e) = uv$ و رأس‌های u و v را رأس‌های پایانی یال e می‌نامیم. اگر e یالی با رئوس پایانی u و v باشد، می‌نویسیم $e = uv$. اگر uv یک یال از G باشد گوییم رأس u همسایه v است. رأس‌های متمایز u و v را مجاور با یک‌دیگر در G گوییم اگر و تنها اگر یالی از G با پایان‌های u و v وجود داشته باشد. دو یال e و f را مجاور گوییم اگر و تنها اگر در یک رأس مشترک باشند. گراف G را ساده نامیم هرگاه، تابع وقوع I_G یک‌به‌یک بوده و G طوقه نداشته باشد. بنابراین یک گراف ساده را می‌توان به عنوان زوج مرتب $(V(G), E(G))$، که در



شکل ۱—۱: گراف‌های یک‌ریخت G و H.

آن $V(G)$ مجموعه‌ی ناتهی و $E(G)$ مجموعه‌ای از زوج‌های نامرتب از $V(G)$ است، در نظر گرفت.

فرض کنید G و H دو گراف و $f : V(G) \to V(H)$ یک تابع باشد، f را هم‌ریختی می‌نامیم، هرگاه مجاورت دو رأس از دامنه، مجاورت تصاویر آن دو رأس را نتیجه دهد. f یک‌ریختی است، هرگاه f دوسوئی بوده و f و f^{-1} هم‌ریختی باشند. مکمل گراف G را با $\bar{G}$ نشان داده که مجموعه‌ی رئوس یکسان با G دارد و دو رأس در $\bar{G}$ مجاورند اگر و تنها اگر در G مجاور نباشند. به عنوان مثال اگر G گراف تهی از مرتبه‌ی n باشد، آن‌گاه $\bar{G}$ گراف کامل از مرتبه‌ی n می‌شود.

مثال ۱.۱ در شکل ۱—۱ دو گراف G و H یک‌ریخت هستند. یک‌ریختی بین آن‌ها را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت.

$$f := \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ \\ b & d & f & c & e & a \end{pmatrix}.$$

گراف G را خود ـ مکمل نامیم، هرگاه $G \cong \bar{G}$. گراف H را زیرگراف G نامیم هرگاه $V(H) \subseteq V(G)$، $E(H) \subseteq E(G)$، و I_H برابر تحدید I_G به $E(H)$ باشد. اگر H زیرگراف G باشد، آن‌گاه G را زبرگراف H نامیم. زیرگراف H از G را زیرگراف سره‌ی G گوییم هرگاه $V(H) \neq H(G)$ یا $E(H) \neq E(G)$. زیرگراف H از G را یک زیرگراف القایی از G نامیم هرگاه هر یال G که پایان‌هایش در $V(H)$ باشد، یک یال در H نیز باشد. زیرگراف H از G را زیرگراف فراگیر از G گوییم، هرگاه $V(H) = V(G)$. زیرگراف القایی از G با مجموعه‌ی رأس $S \subseteq V(G)$ را زیرگراف القا شده از G توسط S نامیم و با $G[S]$ (یا $< S >$) نشان می‌دهیم. فرض کنید u و v دو رأس از گراف G باشند. منظور از $G + uv$ گراف حاصل از افزودن یال جدید uv به G است.

تعداد رئوس و یال‌های گراف G را به ترتیب مرتبه و اندازه‌ی G نامیده و با $|V(G)|$ و $|E(G)|$ نشان می‌دهیم. درجه و همسایگی $u \in V(G)$ را به ترتیب با $deg_G(u)$ و $N_G(u)$ نشان می‌دهیم. گرافی را که در آن همه‌ی رئوس درجه‌ی مساوی r داشته باشند، منظم از درجه‌ی r یا r—منتظم می‌نامیم. هر گراف از مرتبه‌ی n که منظم از درجه‌ی $n-1$ باشد، گراف کامل می‌نامیم و با K_n نشان می‌دهیم. اگر مجموعه‌ی رئوس یک گراف G متناهی باشد، آن‌گاه G را متناهی نامند. قضیه‌ای معروف از اویلر بیان می‌کند که مجموع درجه‌ی رأس‌های یک گراف متناهی مساوی دو برابر تعداد یال‌های آن است.

تعریف ۲.۱ یک گشت در گراف G دنباله‌ی متناوب $W : v_0e_1v_1e_2v_2 \ldots e_rv_r$ از رأس‌ها و یال‌ها است که شروع و پایان آن با رأس‌ها است و رأس‌های v_{i-1} و v_i پایان‌های e_i هستند؛ v_0 ابتدا و v_r انتهای W است. یک گشت را گذر نامیم هرگاه تمامی یال‌های ظاهر شده در گشت متمایز باشند. آن را مسیر گوییم هرگاه همه‌ی رأس‌ها متمایز باشند. بنابراین یک مسیر در G لزوماً یک گذر در G است. مسیر بسته، مسیری است که ابتدا و انتهای آن یکی باشد و آن را دور نیز می‌نامیم.

دو رأس u و v ی G را همبند خوانند، هرگاه مسیر $u-v$ در G موجود باشد. همبندی، یک رابطه‌ی هم‌ارزی در مجموعه رأس‌های $V(G)$ است. بنابراین افرازی از $V(G)$ به زیرمجموعه‌های ناتهی V_1، V_2، $\ldots$، V_k وجود دارد به طوری که دو رأس u و v همبندند اگر و تنها اگر u و v هر دو متعلق به یک مجموعه‌ی V_i باشند. زیرگراف‌های $G[V_1]$، $G[V_2]$، $\ldots$، $G[V_k]$ را مؤلفه‌های G می‌نامند. اگر G دقیقاً دارای یک مؤلفه باشد، G همبند است؛ در غیر این صورت G ناهمبند است. درخت، گراف همبندی است که دور ندارد. در سراسر این پایان نامه، منظور از یک گراف، یک گراف ساده، متناهی و همبند است مگر آن‌که خلاف آن ذکر شود.

طول یک مسیر بین دو رأس تعداد یال‌های آن مسیر است. فاصله‌ی بین دو رأس u و v را در گراف G با $d_G(u,v)$ نشان داده که طول کوتاه‌ترین مسیر بین آن‌ها است. مسیر از طول $n-1$ را راه از مرتبه‌ی n نامیده و با P_n نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۱ گراف G را دوبخشی نامند، هرگاه بتوان مجموعه‌ی رئوس آن را به دو زیرمجموعه‌ی V_1 و V_2 چنان افراز نمود که هر یال از گراف عضوی از V_1 را به یک عضو از V_2 وصل کند. به عبارت دیگر دو سر هیچ یالی در یک بخش نباشد.