بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه
مرکز تبریز

پایان نامه

برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد

رشته ریاضی

گروه کاربردی گرایش آنالیز عددی

عنوان پایان‌نامه:

حل تقریبی معادلات انتگرال منفرد

تلناز نوراللهی

استاد راهنما: دکتر صداقت شهمراد

استاد مشاور: دکتر مهدی صحت‌خواه

شهریور ۱۳۹۰

تقدیم به

روان پاک پدر و مادر مهربانم

تقدیر و تشکر

ابتدا به درگاه خداوند مهربان سجده شکر می‌گذارم که مرا یاری نموده و همواره پشت و پناه من در زندگی بوده است.

از همسر عزیزم که با حمایت‌های بی‌دریغ خود همیشه مشوق من بوده ودر این مدت تحصیلم با سعه‌صدر تمام کم‌رنگی حضورم را در زندگی پذیرفته‌اند، ممنونم.

از برادر بزرگوارم که همواره در تمام مراحل زندگی سایه مرحمتشان بر سرم بوده بی‌نهایت سپاسگزارم.

از استاد راهنمای عالمم، جناب آقای دکتر صداقت شهمراد، که صبورانه در این مدت یاریم کردند تا از یادگیری جا نمانم، کمال تشکر را دارم.

همچنین از استاد مشاور ارجمندم، جناب آقای دکتر مهدی صحت خواه که قبول زحمت فرمودند، سپاسگزارم.

از مدیریت محترم گروه، جناب آقای دکتر محمد چایچی ممنونم.

مراتب قدردانی خود را از داور محترم این پایان نامه و نماینده محترم تحصیلات تکمیلی، اعلام می‌دارم.

در پایان جا دارد از دوست خوبم سرکار خانم کبری طاهرخانی که خالصانه همراهم بوده، تشکر نمایم.

چکیده فارسی

در این پایان‌نامه که بر اساس مرجع [4] تدوین شده است، یک روش تقریبی برای حل معادله انتگرال منفرد نوع اول با هسته منفرد از نوع کوشی، روی یک بازه متناهی به‌کار گرفته شده است. جواب‌های به‌دست آمده با این روش با جواب‌های تحلیلی یکسانند. روش ارائه شده برای حل معادلات انتگرال با هسته‌های فوق منفرد با ارائه چند مثال به‌کار گرفته می‌شود.

واژگان کلیدی

معادلات انتگرال با هسته‌های کوشی نوع منفرد، معادلات انتگرال فوق منفرد، جواب تقریبی .

مقدمه

در این پایان‌نامه حل عددی معادلات انتگرال با هسته منفرد از نوع کوشی و تعمیم آن به فوق منفرد مورد بررسی قرار گرفته است. این پایان‌نامه شامل سه فصل می‌باشد که در فصل اول با تعریف انواع معادلات انتگرال آشنا می‌شویم و در فصل دوم حل عددی معادلات انتگرال منفرد با هسته کوشی را توضیح می‌دهیم و در فصل سوم حل معادلات انتگرال فوق منفرد را سبا ارائه چند مثال بیان می‌کنیم.

فصل ۱

یادآوری

۱.۱ مقدمه

در این فصل انواع معادلات انتگرال را تعریف و دسته‌بندی می‌کنیم و جزئیات اثبات جواب معادله آبل را به دلیل اهمیت آن بیان می‌کنیم. برای مطالعه بیشتر در مورد انواع معادلات انتگرال و روش‌های حل آن‌ها می توان به مراجع [1,4,5,6,7,9,10] مراجعه کرد.

۲.۱ آشنایی با معادلات انتگرال

تعریف ۱.۲.۱ معادله انتگرال: هر معادله‌ای که در آن تابع مجهول زیر علامت انتگرال ظاهر شود یک معادله انتگرال است. شکل کلی معادلات انتگرال به صورت

$$F\Big(x, y(x), \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} G(x,t,y(t))dt\Big) = 0,$$

است به‌طوری که y تابع مجهول است.

- معادلات انتگرال به دو دسته‌ی خطی و غیر خطی تقسیم می‌شوند

۱) معادلات انتگرال خطی دارای شکل

$$y(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)y(t)dt = f(x),$$

می‌باشند که λ یک مقدار ثابت، $k(x,t)$، $f(x)$، $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ توابع معلوم و $y(x)$ تابع مجهول معادله است و باید تعیین گردد. $k(x,t)$ را هسته معادله انتگرال می‌نامند.

۲) معادلات انتگرال غیر خطی نیز به صورت‌های زیر ظاهر می‌شوند

$$y(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t,y(t))dt = f(x),$$

$$y(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)F(y(t))dt = f(x).$$

۲.۲.۱ طبقه‌بندی معادلات انتگرال خطی

- معادله انتگرال فردهلم نوع دوم:

$$y(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)y(t)dt, \quad a \le t \le b.$$

- معادله انتگرال فردهلم نوع اول:

$$g(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)y(t)dt, \quad a \le t \le b.$$

- معادله انتگرال ولترا نوع دوم:

$$y(x) = g(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)y(t)dt, \quad a \le x,$$

- معادله انتگرال ولترا نوع اول:

$$g(x) = \lambda \int_a^x k(x,t)y(t)dt, \quad a \le x,$$

تعریف ۳.۲.۱ معادله انتگرال منفرد: معادله انتگرالی است که در آن حداقل یکی از حدود انتگرال نامتناهی است و یا هسته‌ی معادله انتگرال در نقطه یا نقاطی از بازه‌ی انتگرال‌گیری نامتناهی می‌گردد.

معادلات زیر مثال‌هایی از انواع معادلات انتگرال هستند :

$$\text{۱)} \quad y(x) = x + \int_0^\infty e^{-(x+t)}y(t)\,dt,$$

$$\text{۲)} \quad \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}y(t)\,dt = x^2,$$

$$\text{۳)} \quad y(x) = x + \lambda \int_{-1}^{1} xty(t)\,dt, \qquad -1 \le x \le 1,$$

$$\text{۴)} \quad y(x) = \lambda \int_{-1}^{1} xty(t)\,dt, \qquad -1 \le x \le 1,$$

$$\text{۵)} \quad y(x) = 1 + \lambda \int_0^x xty(t)\,dt,$$

$$\text{۶)} \quad y(x) = \alpha x + \lambda x \int_0^x y(t)\,dt.$$

۳.۱ مساله آبل

آبل در سال ۱۸۲۳ حرکت یک ذره را که به سمت پایین در طول یک منحنی هموار نامعلوم، در یک صفحه قائم، تحت تاثیر نیروی جاذبه لغزیده می‌شد، را مطالعه کرد. فرض می‌شود یک ذره از حالت سکون در یک نقطه نظیر p به ارتفاع x، در طول منحنی مجهول به سمت پایین‌ترین نقطه روی منحنی نظیر نقطه o که فاصله عمودی آن صفر فرض می‌شود، لغزیده می‌شود. کل زمان T، زمان نزول از مرتفع‌ترین نقطه به پایین‌ترین نقطه روی منحنی از قبل معلوم است و به ارتفاع x بستگی دارد و لذا آن را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم

$$T = h(x) \tag{۱.۱}$$

فرض می‌کنیم که منحنی حرکت بین نقاط p و o طولی برابر s داشته باشد لذا سرعت در یک نقطه نظیر q روی منحنی بین p و o بوسیله رابطه زیر مشخص می‌شود

$$\frac{ds}{dT} = -\sqrt{۲g(x-t)}, \tag{۲.۱}$$

که در آن t یک متغیر است که فاصله عمودی نقطه q را تعریف می‌کند و g شتاب جاذبه را مشخص می‌کند. با انتگرال‌گیری از دو طرف رابطه (؟؟) خواهیم داشت

$$T = -\int_{\circ}^{p} \frac{ds}{\sqrt{۲g(x-t)}}.$$

قرار می‌دهیم $ds = \phi(t)dt$. همچنین رابطه (؟؟) را به‌کار می‌بریم تا معادله حرکت ذره لغزنده به‌صورت زیر به‌دست آید

$$f(x) = \int_{\circ}^{x} \frac{۱}{\sqrt{x-t}}\phi(t)\,dt. \tag{۳.۱}$$

اشاره می‌کنیم $f(x)$ یک تابع معلوم است و مقدار آن بستگی به ارتفاع x دارد و به صورت زیر مشخص می‌شود

$$f(x) = -\sqrt{۲g}h(x)$$

که در آن g ثابت جاذبه است و $h(x)$ زمان نزول از بالاترین نقطه روی آن به سمت پایین‌ترین نقطه روی منحنی است. هدف اصلی مساله آبل تعیین تابع مجهول $\phi(x)$ زیر علامت انتگرال است که معادله منحنی فوق را مشخص می‌کند.

توجه کنیم که معادله انتگرال آبل یک معادله انتگرال ولترای نوع اول است. به‌علاوه هسته $k(x,t)$ در معادله (؟؟) به صورت زیر است

$$k(x,t) = \frac{۱}{\sqrt{x-t}}.$$

۴.۱ معادله انتگرال تعمیم‌یافته آبل

آبل معادله انتگرال منفرد به‌طور ضعیف زیر را که به معادله انتگرال تعمیم‌یافته آبل شهرت دارد، معرفی کرد

$$f(x) = \int_{۰}^{x} \frac{۱}{(x-t)^{\alpha}} \phi(t)\, dt, \qquad ۰ < \alpha < ۱ \tag{۴.۱}$$

مساله آبل که قبلا بحث شد، یک حالت خاص معادله تعمیم‌یافته آبل است یعنی حالتی که $\alpha = \frac{۱}{۲}$ انتخاب شود. برای تعیین یک فرمول عملی برای جواب $\phi(x)$ از معادله انتگرال (؟؟) و لذا برای حل مساله آبل، به سادگی تبدیل لاپلاس را به‌کار می‌بریم. با گرفتن تبدیل لاپلاس از طرفین معادله (؟؟) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} L[f(x)] &= L[\phi(x)]L[x^{-\alpha}] \\ &= L[\phi(x)]\frac{\Gamma(۱-\alpha)}{z^{۱-\alpha}} \end{aligned} \tag{۵.۱}$$

توجه کنیم که نماد Γ تابع گاما را نشان می‌دهد و z پارامتر مربوط به تبدیل لاپلاس است.

معادله (؟؟) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$L[\phi(x)] = \frac{z}{\Gamma(\alpha)\Gamma(۱-\alpha)} \Gamma(\alpha) z^{-\alpha} L[f(x)]$$

و این هم برابر است با

$$L[\phi(x)] = \frac{z}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} L[g(x)] \tag{6.1}$$

که در آن

$$g(x) = \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt.$$

لذا معادله (؟؟) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$L[\phi(x)] = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} L[g'(x)] \tag{7.1}$$

و برای این کار از رابطه زیر مربوط به تبدیلات لاپلاس یعنی

$$L[g'(x)] = zL[g(x)] - g(0)$$

(با فرض $g(0) = 0$) و همچنین رابطه

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

را استفاده کردیم.

با اعمال L^{-1} روی دو طرف رابطه (؟؟) فرمول زیر که به سادگی قابل محاسبه جهت تعیین جواب است، به‌دست می آید

$$\phi(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\, dt, \qquad 0 < \alpha < 1 \tag{8.1}$$

می دانیم که $f(x)$ مشتق‌پذیر است و لذا با استفاده از رابطه (؟؟) می‌توانیم یک فرمول مطلوب‌تر که برای اهداف محاسباتی مورد نظرمان مفید باشد، به‌دست آوریم. برای تعیین این فرمول، ابتدا برای محاسبه انتگرال طرف راست رابطه (؟؟)، انتگرال‌گیری جزء به جزء را به‌کار می‌بریم

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\, dt &= -\frac{1}{\alpha}[f(x)(x-t)^{\alpha}]\mid_0^x + \frac{1}{\alpha}\int_0^x (x-t)^{\alpha} f'(t)\, dt \\ &= \frac{1}{\alpha} f(0) x^{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\int_0^x (x-t)^{\alpha} f'(t)\, dt. \end{aligned} \tag{9.1}$$

با مشتق گرفتن از طرفین رابطه (؟؟) و استفاده از قاعده لیب‌نیتز برای مشتق گرفتن از انتگرال طرف راست، نتیجه زیر حاصل خواهد شد

$$\frac{d}{dx}\int_{۰}^{x}\frac{f(t)}{(x-t)^{۱-\alpha}}\,dt = \frac{f(۰)}{x^{۱-\alpha}} + \int_{۰}^{x}\frac{f'(t)}{(x-t)^{۱-\alpha}}\,dt. \qquad (۱۰.۱)$$

با جایگذاری رابطه (؟؟) در معادله (؟؟) فرمول مورد نظر زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\phi(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\Big(\frac{f(۰)}{x^{۱-\alpha}} + \int_{۰}^{x}\frac{f'(t)}{(x-t)^{۱-\alpha}}\,dt\Big), \qquad ۰<\alpha<۱. \qquad (۱۱.۱)$$

این فرمول برای تعیین جواب معادله تعمیم‌یافته آبل و در نتیجه پیدا نمودن جواب مساله استاندارد آبل به‌کار می‌رود.

مثال ۱.۴.۱ معادله آبل زیر را حل کنید

$$\pi x = \int_{۰}^{x}\frac{۱}{\sqrt{x-t}}\phi(t)\,dt.$$

حل : در این مثال $f(x)=\pi x$ لذا $f(۰)=۰$ و $f'(x)=\pi$. همچنین $\alpha=\frac{۱}{۲}$ لذا $\sin(\alpha\pi)=۱$.
با به‌کار بردن رابطه (؟؟) داریم

$$\phi(x) = \frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{x}\frac{\pi}{\sqrt{x-t}}\,dt = ۲\sqrt{x}.$$

تعریف ۲.۴.۱ شرط هولدر: فرض کنید $D\subset R$، تابع ϕ روی D در شرط هولدر صدق می‌کند هرگاه

$$|\phi(x_۲)-\phi(x_۱)| < A|x_۲-x_۱|^{\lambda}, \qquad \forall x_۱,x_۲\in D$$

که در آن A ثابت هولدر و λ مرتبه هولدر نام دارند که $۱\le\lambda>۰$. اگر $\lambda=۱$ باشد عبارت فوق همان لیب‌شیتز است.

۵.۱ مقدار اصلی کوشی

تعریف ۱.۵.۱ انتگرال زیر را در نظر بگیرید

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c}, \qquad a<c<b$$

برای محاسبه این انتگرال مجازی داریم

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{dx}{x-c} &= \lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0}\Big[-\int_a^{c-\varepsilon_1}\frac{dx}{c-x}+\int_{c+\varepsilon_2}^b\frac{dx}{x-c}\Big]\\ &= \ln\frac{b-c}{c-a}+\lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0}\ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\end{aligned}$$

اگر ε_1 و ε_2 مستقل از یکدیگر به صفر میل کنند آنگاه انتگرال مجازی بالا همگرا نخواهد بود(چنین انتگرالی انتگرال منفرد نامیده می‌شود) اما اگر $\varepsilon=\varepsilon_2=\varepsilon_1$ فرض شود، آن‌گاه انتگرال همگرا می‌شود. مقدار اصلی کوشی انتگرال منفرد

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c}, \qquad a<c<b$$

برابر عبارت

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\int_a^{c-\varepsilon}\frac{dx}{x-c}+\int_{c+\varepsilon}^b\frac{dx}{x-c}\Big]$$

است که طبق محاسبات بالا به صورت زیر نوشته می‌شود

$$p.v\int_a^b\frac{dx}{x-c}=\ln\frac{b-c}{c-a}. \qquad (۱۲.۱)$$

که در آن $p.v$ نماد مقدار اصلی انتگرال کوشی می‌باشد. در حالت کلی انتگرال زیر را در نظر بگیرید

$$\int_a^b\frac{\phi(x)dx}{x-c},$$

$\phi(x)$ تابعی است که در (a,b) در شرط هولدر صدق می‌کند، در این‌صورت می‌توان نوشت

$$\int_a^b\frac{\phi(x)dx}{x-c}=\int_a^b\frac{\phi(x)-\phi(c)}{x-c}dx+\phi(c)\int_a^b\frac{dx}{x-c}$$

با توجه به شرط هولدر داریم

$$|\frac{\phi(x)-\phi(c)}{x-c}| < \frac{A}{|x-c|^{۱-\alpha}}, \qquad ۰ < \alpha \leq ۱,$$

پس انتگرال اولی به‌عنوان انتگرال مجازی موجود است و انتگرال دومی با توجه به (؟؟) قابل محاسبه است. پس انتگرال منفرد $\int_a^b \frac{\phi(x)dx}{x-c}$ بر حسب مقدار اصلی کوشی موجود است و داریم

$$p.v \int_a^b \frac{\phi(x)dx}{x-c} = \int_a^b \frac{\phi(x)-\phi(c)}{x-c}dx + \phi(c)\ln\frac{b-c}{c-a}.$$

توجه کنیم اگر $\int_a^b \frac{\phi(x)dx}{x-c}$ به‌عنوان یک انتگرال دلخواه یا مجازی موجود باشد (همگرا باشد) در این‌صورت مقدار اصلی آن نیز موجود است ولی عکس مطلب درست نیست.

به روش مشابه مقدار اصلی کوشی برای تابع مختلط $\phi(x)$ که در شرط هولدر صدق می‌کند بر روی خم منحنی الخط با ابتدای a و انتهای b به‌صورت زیر است

$$p.v \int_L \frac{\phi(\tau)d\tau}{\tau-t} = \int_L \frac{\phi(\tau)-\phi(t)}{\tau-t}d\tau + \phi(t)\Big[\ln\frac{b-t}{a-t} + \pi i\Big].$$

و در حالتی که $a=b$ باشد

$$p.v \int_L \frac{\phi(\tau)d\tau}{\tau-t} = \int_L \frac{\phi(\tau)-\phi(t)}{\tau-t}d\tau + i\pi\phi(t).$$

۶.۱ قضایای مانده‌ها

برای مطالعه بیشتر به [2] مراجعه کنید.

تعریف ۱.۶.۱ مسیر ساده بسته: مسیری که خودش را قطع نکند و ابتدا وانتهای آن بر هم منطبق باشد.مانند دایره وبیضی .

قضیه ۲.۶.۱ فرض کنید C مسیر ساده بسته‌ای در جهت مثبت باشد. اگر تابع f در درون و روی C بجز در تعداد متناهی نقطه تکین z_k، $k = ۱, ۲, \ldots, n$ که در داخل C هستند، تحلیلی باشد آنگاه

$$\int_C f(z)dz = ۲\pi i \sum_{k=۱}^{n} Res_{z=z_k} f(z)$$

قضیه ۳.۶.۱ $z_۰$ نقطه تکین تنهای تابع f، یک قطب از مرتبه m است اگروتنها اگر $f(z)$ را بتوان به صورت زیر نوشت

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_۰)^m}$$

که در آن $\phi(z)$ در $z_۰$ تحلیلی و ناصفر است.

اگر $m = ۱$ آنگاه

$$Res_{z=z_۰} f(z) = \phi(z_۰)$$

و اگر $m \geq ۲$ آنگاه

$$Res_{z=z_۰} f(z) = \frac{\phi^{(m-۱)}(z_۰)}{(m - ۱)!}$$

نکته: Res نشان دهنده مانده می‌باشد.

لم ۴.۶.۱ تابع f که در نقطه $z_\circ$ تحلیلی است، در این نقطه صفر مرتبه m دارد اگروفقط اگر تابعی مانند g موجود باشد که در $z_\circ$ تحلیلی و ناصفر بوده به‌قسمی که

$$f(z) = (z - z_\circ)^m g(z).$$

فصل ۲

حل تقریبی معادلات انتگرال منفرد نوع اول با هسته کوشی

۱.۲ مقدمه

معادله انتگرال منفرد نوع اول با هسته کوشی روی یک بازه متناهی را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$\int_{-1}^{1} f(t)\Big[k_{\circ}(t,x)+k(t,x)\Big]\,dt=g(x),\qquad -1<x<1 \tag{۱.۲}$$

به‌طوری‌که

$$k_{\circ}(t,x)=\frac{\hat{k}(t,x)}{t-x},\qquad \hat{k}(t,x)\neq 0 \tag{۲.۲}$$

و $k(t,x)$ و $\hat{k}(t,x)$ توابع مربع انتگرال‌پذیر بر حسب دو متغیر t و x هستند و هسته $k_{\circ}$ از نوع کوشی و منفرد است. شکل ساده‌تری از معادله (؟؟) به صورت زیر است

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{t-x}\,dt=g(x). \tag{۳.۲}$$

که از قرار دادن $k(t,x)=0$ و $\hat{k}(t,x)=1$ به‌دست می‌آید. در حالت کلی برای جواب این معادله چهار حالت زیر رخ می‌دهد(ر.ک [6])

۱) $f(x)$ در نقاط $x=1$ و $x=-1$ بی‌کران است، دراین‌صورت

$$f(x)=\frac{A_{\circ}}{(1-x^{2})^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{\pi^{2}(1-x^{2})^{\frac{1}{2}}}\int_{-1}^{1}\frac{(1-t^{2})^{\frac{1}{2}}g(t)}{(t-x)}\,dt \tag{۴.۲}$$

که $A_{\circ}$ یک ثابت دلخواه است.

۲) $f(x)$ در نقطه $x=1$ کران‌دار و درنقطه $x=-1$ بی‌کران است، دراین‌صورت

$$f(x)=\frac{-1}{\pi^{2}}\Big(\frac{1-x}{1+x}\Big)^{\frac{1}{2}}\int_{-1}^{1}\Big(\frac{1+t}{1-t}\Big)^{\frac{1}{2}}\frac{g(t)}{t-x}\,dt \tag{۵.۲}$$

۳) $f(x)$ در نقطه $x=1$ بی‌کران و در نقطه $x=-1$ کران‌دار است، آنگاه

$$f(x)=\frac{-1}{\pi^{2}}\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big)^{\frac{1}{2}}\int_{-1}^{1}\Big(\frac{1-t}{1+t}\Big)^{\frac{1}{2}}\frac{g(t)}{t-x}\,dt \tag{۶.۲}$$

۴) $f(x)$ در نقاط $x = ۱$ و $x = -۱$ کران‌دار است، لذا

$$f(x) = \frac{-(۱-x^۲)^{\frac{۱}{۲}}}{\pi^۲} \int_{-۱}^{۱} \frac{g(t)}{(۱-t^۲)^{\frac{۱}{۲}}(t-x)}\, dt \tag{۷.۲}$$

این حالت اتفاق می‌افتد اگر و فقط اگر

$$\int_{-۱}^{۱} \frac{g(t)}{(۱-t^۲)^{\frac{۱}{۲}}}\, dt = ۰ \tag{۸.۲}$$

باشد. در این‌جا برای نمونه حالت اول را بررسی می‌کنیم. ابتدا با ضرب طرفین رابطه$\int_۰^۱ \frac{f(t)dt}{t-x} = g(x)$ در x داریم

$$x\int_۰^۱ \frac{f(t)dt}{t-x} = xg(x)$$

$$p.v\int_۰^۱ \frac{xf(t)dt}{t-x} = xg(x)+c, \qquad c = \int_۰^۱ f(t)\, dt$$

سپس دو طرف رابطه را در $\frac{۱}{\sqrt{x(u-x)}}$ ضرب می‌کنیم واز 0 تا u نسبت به x انتگرال می‌گیریم. بنابراین

$$\int_۰^u \frac{dx}{\sqrt{x(u-x)}} p.v\int_۰^۱ \frac{tf(t)dt}{t-x} = \int_۰^u \frac{\sqrt{x}g(x)}{\sqrt{u-x}}\, dx + c\int_۰^u \frac{dx}{\sqrt{x(u-x)}}$$

برای محاسبه انتگرال $\int_۰^u \frac{dx}{\sqrt{x(u-x)}}$ از تابع β استفاده می‌کنیم

$$\beta(m,n) = \int_۰^۱ t^{m-۱}(۱-t)^{n-۱}dt = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

(برای اثبات این رابطه به [3] مراجعه شود) از مقایسه انتگرال مذکور با فرمول فوق داریم $m = \frac{۱}{۲}$ و $n = \frac{۱}{۲}$ پس

$$\int_۰^u \frac{dx}{\sqrt{x(u-x)}} = \beta(\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}) = \pi$$

$$-\int_۰^۱ tf(t)\Big[p.v\int_۰^u \frac{dx}{(x-t)\sqrt{x(u-x)}}\Big]\, dt = \int_۰^u \frac{\sqrt{x}g(x)dx}{\sqrt{u-x}} + c\pi$$