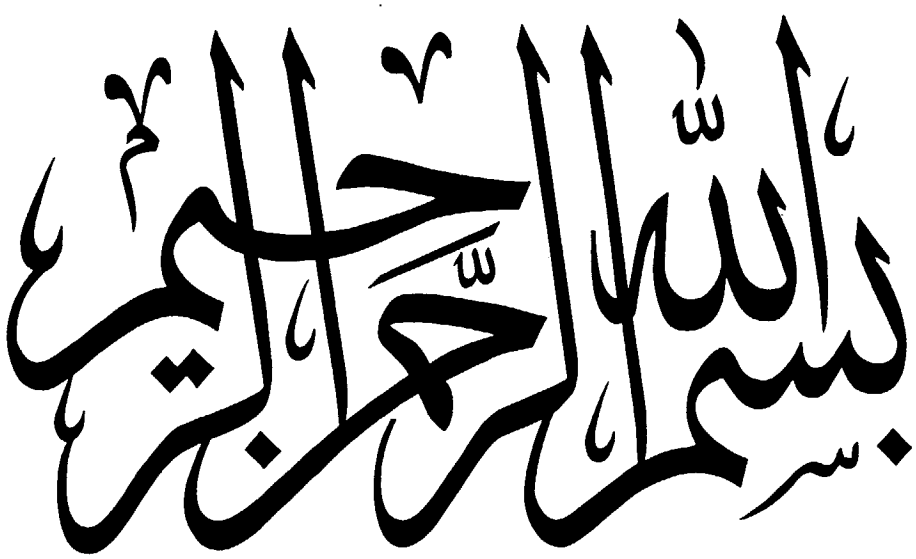

بسم الله الرحمن الرحيم

۱۳۸۱ /۴/ ۳۰

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده عمران

کمانش یکطرفه ورق فولادی پیچ شده به بتن

پایان نامه کارشناسی ارشد سازه

پروین هدایتی مبارکه

استاد راهنما

دکتر مجتبی ازهری

۱۳۸۰

۴۱۱۶

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مهندسی عمران

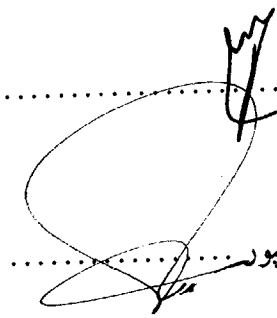
پایان نامه کارشناسی ارشد گرایش ســـازه- **خانم پروین هدایتی مبارکه**

تحت عنوان :

کمانش موضعی ورقهای فولادی به‌کار رفته در بتن

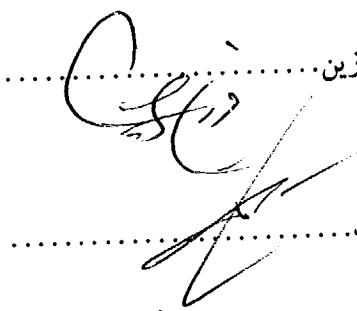
در تاریخ ۸۰/۶/۳۱ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱ - استاد راهنما — دکتر مجتبی ازهری .....



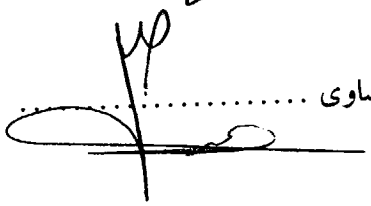
۲ - استاد مشاور — دکتر محمدمهدی سعادتپور .....

۳ - ممتحن مدعو (از دانشکدهٔ مکانیک) — دکتر محمود فرزین .....



۴ - عضو کمیته دفاع — دکتر بیژن برومند .....

۵ - سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده — دکتر محمود قضاوی .....



کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات،
ابتکارات و نوآوریهای ناشی از تحقیق
موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه صنعتی
اصفهان است.

تقدیم به

پدر و مادرم

فهرست مطالب

عنوان — صفحه

فهرست مطالب ..... هفت

چکیده ۱

فصل اول: کلیات

۱-۱- مقدمه ۲

۱-۲- تاریخچه ٤

۱-۳- کمانش یکطرفه ۸

فصل دوم: روابط کمانش

۲-۱- تئوری و فرضیات ۱٤

۲-۲- روابط تنش، کرنش و انحناء ۱۵

۲-۳- برآیند تنشها ۱۷

۲-٤- معادله حاکم بر سطح خیز ورقها تحت بارهای قائم ۱۸

۲-۵- روشهای حل مسئله کمانش ورق ۱۹

۲-۵-۱- روش اجزاء محدود ۲۱

۲-۵-۲- اصل بقای انرژی و روش انرژی تیموشنکو ۲٤

۲-۵-۳- قضیه ایستایی انرژی پتانسیل و روش ریلی - ریتز ۲۵

فصل سوم: کمانش یکطرفه

۳-۱- کلیات ۲۷

۳-۲- میدان جابجایی و روش حل ۳۰

۳-۳- مدل کردن سطح صلب ۳۵

عنوان | صفحه

فصل چهارم: کمانش یکطرفه ورق فولادی پیچ شده به بتن

٤-١- مقدمه ٣٧
٤-٢- قضایای ریاضی ٣٨
٤-٣- حل مسئله ٣٩

فصل پنجم: استخراج نتایج

٥-١- مقدمه ٤٥
٥-٢- بررسی میدان جابجایی ٤٥
٥-٣- بررسی کمانش یکطرفه ٤٦
٥-٤- بررسی کمانش یکطرفه ورق فولادی پیچ شده به بتن ٥٠

فصل ششم: خلاصه و نتیجه گیری .....

٦-١- تأثیر سطح صلب ٧٢
٦-٢- تأثیر پیچ ها ٧٣
٦-٢-١- اثر تعداد ردیف پیچ ها ٧٣
٦-٢-٢- اثر تعداد خطوط قائم پیچ ها ٧٤
مراجع ٧٥
چکیده انگلیسی ٨٢

چکیده

ورقهای فولادی پیچ شده به وجوه کناری تیرهای بتن مسلح موجب سخت شدن و مقاوم کردن تیرها می شوند. اعمال بارهای خارجی به تیربتنی، تنشهای فشاری، خمشی و برشی در این ورقها ایجاد کرده که منجر به پدیده کمانش موضعی و نهایتاً ناپایداری ورق می گردد. سطح بتن مانع از رفتار کمانشی ورق در دو جهت شده و موجب کمانش یکطرفه می شود که نوعی مسئله تماس است. پیچ های اتصال نیز به عنوان قیدهای اضافی عمل می کنند.

در رساله حاضر تحلیل کمانش موضعی یکطرفه ورقهای فولادی مستطیلی که با پیچ به بتن متصل شده اند با استفاده از روش ریلی – ریتز و به کمک روش مضارب لاگرانژ انجام گرفته است. میدان جابجایی با استفاده از چند جمله ایهای مناسب تعریف شده و سطح تماس نیز مانند یک فونداسیون بدون کشش مدل شده است. قیود پیچ ها نیز با کمک روش مضارب لاگرانژ در حل مسئله منظور شده است. روش حاضر از قابلیت خوبی برای محاسبات کامپیوتری برخوردار است و ضرایب کمانش موضعی فشاری، خمشی و برشی برای تعداد و موقعیت های متنوع پیچ ها و نسبت های مختلف ابعاد ورق در جداول و منحنی های اندرکنش ارائه شده است.

فصل اول
کلیات

۱-۱- مقدمه

مسئله پایداری ارتجاعی سازه‌ها که همان توانایی سازه برای حمل یک بار مشخص بدون هر گونه تغییر ناگهانی در شکل هندسی آن می‌باشد از نیمه دوم قرن نوزدهم با شروع و گسترش احداث پلهای فولادی راه‌آهن اهمیت یافت. کاربرد فولاد بدلیل مقاومت زیاد آن به ساخت انواع سازه‌های با قطعات فشرده شده لاغر و صفحات و پوسته‌های نازک انجامید. تجربه نشان داد که اینگونه سازه‌ها ممکن است در حالاتی بشکنند که تنشها بالاتر از مقاومت مواد نبوده ولی پایداری ارتجاعی کافی نداشته باشند[۱].

از نظر سازه‌ایی وقتی رفتار عضوی که تحت اثر نیروی فشاری می‌باشد، بگونه‌ایی تغییر کند که نیروی خارجی فشاری را با رفتار خمشی تحمل نماید، پدیده کمانش رخ داده است.

هر عضو با توجه به تعداد درجات آزادی دارای ضرایب سختی خاصی می‌باشد. نیروی محوری فشاری اثر کاهنده بر ضرائب سختی عضو داشته در صورتی که نیروی کششی اثر فزاینده بر این ضرایب سختی دارد. مقدار کاهش در سختی‌ها متناسب با میزان اعمال بار محوری فشاری است. با افزایش مقدار این بار، سختی‌ها در لحظه‌ایی خاص باندازه‌ای کاهش می‌یابد که عضو دیگر نمی‌تواند هیچگونه مقاومت اضافی در مقابل

اعمال بار از خود نشان دهد و بلافاصله شاهد تغییرشکلهای بزرگ در عضو خواهیم بود. در اصطلاح پایداری سازه‌ها، مقدار نیروی محوری فشاری که عضو را در آستانه تغییرشکلهای بزرگ قرار می دهد، بار بحرانی کمانش می‌نامند[۲].

پدیده کمانش معمولا در اعضایی از سازه رخ می‌دهد که ابعاد آن در جهات مختلف با یکدیگر تفاوت زیادی داشته باشد. اگر اندازه یک بعد آن نسبت به دو بعد دیگر بسیار زیاد باشد، عضو خطی بوده و ستون نامیده می‌شود و اگر اندازه یک بعد آن نسبت به دو بعد دیگر بسیار کوچک باشد، عضو صفحه‌ای بوده و ورق نازک نامیده می‌شود.

صفحه به لحاظ رفتار از دو نظر با ستون متفاوت است، از دیدگاه ریاضی تفاوت صفحه و ستون در این است که کمیاتی نظیر تغییر شکل جانبی و لنگر خمشی در ستون را می‌توان تابع یک متغیر مستقل در نظر گرفت ولی در صفحه تابعی از دو متغیر مستقل است، در نتیجه رفتار یک صفحه بوسیله معادلات دیفرانسیل جزئی مشخص شده در صورتی که برای بررسی رفتار ستون معادلات دیفرانسیل معمولی کافی می‌باشد. تفاوت مهم دیگر صفحه و ستون در کمانش این دو آشکار می‌شود. برای یک ستون، کمانش توانایی آن را برای تحمل بار اضافی خاتمه می‌دهد و بار بحرانی مقارن با گسیختگی ستون است ولی صفحات قادر هستند بارمحوری بیش از بار بحرانی را تحمل کنند، این بدان معناست که ظرفیت تحمل بار یک صفحه را باید با در نظرگرفتن رفتار پس از کمانش آن بررسی نمود [۳]. ناپایداری بطورکلی می‌تواند ناشی از کمانش جانبی، موضعی و یا تغییر شکلی باشد.

کمانش جانبی هنگامی است که یک عضو سازه‌ایی بدون مهار جانبی کافی، که حول محور قویتر خود تحت خمش است، در خارج از صفحه بارگذاری بدلیل تغییر مکان جانبی و پیچش و بدون هیچگونه تغییر شکل مقطع عرضی، کمانش کند. در کمانش جانبی نیم طول موج بزرگ بوده و از مرتبه طول عضو مورد نظر می‌باشد. این شکل از کمانش برای مقاطع I شکل با فواصل تکیه‌گاههای جانبی زیاد، بدلیل مقاومت کم آنها در مقابل پدیدهٔ کمانش پیچشی جانبی دارای اهمیت می‌باشد[٤].

کمانش موضعی وقتی اتفاق می‌افتد که جزیی از یک عضو سازه‌ایی بصورت یک صفحه دچار کمانش شده و در حالی که قطعات ورقها کمانش کرده و تغییر شکل می‌دهند، خطوط اتصال بین قطعات ورقها کاملا مستقیم باقی می‌مانند. درکمانش موضعی نیم طول موج کوچک بوده و از مرتبه عرض قطعات ورقها می‌باشد. امروزه روشن گردیده است که وقوع کمانش موضعی در یک عضو سازه‌ایی جدار نازک تحت

مرکز اطلاعات و مدارک علمی ایران

فشار، تا زمانی که موجب شکست ناگهانی نشود، سیستم تنش‌ها را در عضو تغییرداده و از سختی عضو در مقابل فشار کاسته و در نتیجه شکست نهایی را تسریع می کند.

کمانش تغییرشکلی نوعی کمانش مابین کمانش موضعی و جانبی است، یعنی ضمن اینکه مقطع مورد نظر تغییر شکل می‌دهد، مقدار قابل ملاحظه‌ایی نیز تغییر مکان جانبی خواهد داشت. نیم طول موج نیز ما بین دو حالت قبل است.

۱-۲- تاریخچه

اولر[1] اولین کسی بود که بر روی پدیده کمانش تحقیقات انجام داد و سعی کرد مدل ریاضی برای آن بیان نماید. او در سال ۱۷٤٤ نخستین تحلیل صحیح از پایداری یک ستون را با رفتار کمانشی ارائه داد. وی با استفاده از روش تعادل خنثی یعنی تعادل ستون در حالت کمی خم شده توانست معادله دیفرانسیل رفتار یک عضو خطی را استخراج کرده و به حل آن بپردازد و مودهای کمانش و ضرایب بارکمانش تحت این مودها را بدست‌آورد. ولی این راه‌حل، یک کار ریاضی محض بود و در آن زمان برای آن کاربردی مطرح نبود.

اولین تئوری اصلاحی برای کار اولر توسط کانسیدره[2] و انگسر[3] در سال ۱۸۸۹ مطرح شد، از آن پس تحقیقات کاربردی زیادی بر روی کمانش اعضای فشاری انجام گرفت.

بحث تئوری رفتار ورقها خود دارای سابقهٔ زیادی می‌باشد. اولین بررسیهای چشمگیر بر روی رفتار ورقها در سالهای ۱۸۰۰ صورت پذیرفت. بعد از آن پیرامون حالتهای مختلف خمش ورق کارهای بسیاری انجام گرفت: نظریه اصلی را ناویر[4]، کیرشف[5] و لوی[6] و شیوه‌های عددی را گالرکین[7]، وال[8] و دیگران ارائه دادند[۵].

لاگرانژ[9] در سال ۱۸۱۱ و ناویر در سال ۱۸۲۰ معادله‌خیز جانبی ورق تحت اثر بارگسترده عمود بر میان صفحه را بدست آوردند. معادله دیفرانسیل ورق تحت اثر بارهای جانبی و بارهای واقع در صفحه میانی توسط سن‌ونان[10] در سال ۱۸۸۳ ارائه شد [۳].

در سال ۱۸۹۱ برایان[11] با استفاده از روش‌های انرژی مسئله کمانش یک ورق مستطیلی روی تکیه گاههای مفصلی تحت اثر نیروی فشاری تک محوری را حل نمود که نخستین راه حل مسئله کمانش صفحات قلمداد می‌شود [۳].

1.Euler
2. Considere
3. Engesser
4. Navier
5. Kirchoff
6.Levy
7.Galerkin
8. Wahl
9. Lagrange
10. Saint Venant
11. Bryan

تیموشنکو در سال۱۹۰۷براساس روش‌برایان به حل کمانش ورقهای مستطیلی با شرایط مرزی مختلف پرداخت. ریزنر[1] در سال ۱۹۰۹ مستقل از تیموشنکو یک ورق مستطیلی تحت بار فشاری محوری با لبه‌های گیردار یا با یک لبه آزاد و یک لبه گیردار را تحلیل نمود [٤].

بعد از آن، تحقیقات زیادی بر روی حل ورقهای مسطح تحت‌بارفشاری یکنواخت و با شرایط مرزی مختلف انجام شد. بلیچ[2] در سال ۱۹۳۳، لندکویست[3] و استاول[4] در سال ۱۹٤۲ ، بولسون[5] در سال ۱۹۵۵، ساتر[6] در سال۱۹۵۹، ویتریک[7] در سال ۱۹٦۳ و تیموشنکو در سال ۱۹۷۰ از جمله محققین حل مسائل کمانش صفحات به روش‌های گوناگون می‌باشند [٤].

بررسی تحلیل کمانش موضعی یک ورق منفرد در اثر خمش و فشار داخل صفحه، مانند جان یک تیر تحت خمش، توسط برخی از محققین از جمله اسکات[8] و مک کلوچ[9] در سال ۱۹٤۷، جانسون[10] و نوئل[11] در سال ۱۹۵۳، واکر[12] در سالهای ۱۹٦٦ و ۱۹٦۷ و تیموشنکو در سال ۱۹۷۰ انجام شد. واکر بکمک روش گالرکین بطورتقریبی، تنش بحرانی ورقهای تحت فشار برون محوری را تعیین کرد[٤].

بسیاری از اعضاء جدار نازک از قطعات ورق نازک تشکیل شده‌اند که با همدیگر ، یک مقطع عرضی مناسب را ایجاد می‌کنند. در ابتدا جهت تحلیل کمانش موضعی این مقاطع، فرض بر این بود که این قطعات در طول مرزهای مشترکشان با یکدیگر مفصل شده‌اند، به نحوی که هر قطعه مانند یک ورق منفرد با لبه‌های مفصلی در مرزهای مشترک و لبه‌های آزاد در سایر مرزها می‌باشد. سپس تنش بحرانی هر قطعه محاسبه شده و کمترین مقدار بعنوان تنش بحرانی کل مقطع محسوب می‌شود. اما صلبیت اتصال قطعات موجب می‌شد که همه ورقها بطور هم زمان در تنشی بین کمترین و بیشترین مقدار تنش بحرانی قطعات ورقها، کمانش کنند و به همین دلیل نتایج تحلیل محافظه کارانه بود.

اولین تحلیل معتبر بر روی کمانش موضعی مقاطع جدار نازک متعلق به لندکویست، استاول و اسکات در سال ۱۹٤۳ می‌باشد که از روش توزیع لنگر برای پایداری سازه‌های تشکیل شده از چند قطعه ورق استفاده کردند [٤].

تحلیل ناپایداری موضعی ستونها با مقطع عرضی مستطیلی، ناودانی و Z شکل توسط استاول

---

1. Reissner
2. Bleich
3. Lundquist
4. Stowell
5. Bulson
6. Sutter
7. Wittric
8. Schuette
9. McCulloch
10. Johnson
11. Noel
12. Walker

و لندکویست در سال ۱۹۳۹ انجام شد و تحقیقات آزمایشگاهی کالبرنر[1] در سال ۱۹٤٦، هیمرل[2] در سال ۱۹٤۷ و کیلور[3] در سال ۱۹۵۱ نتایج کار ایشان را تأیید نمود [٤].

با رواج استفاده از مقاطع نورد شده سرد، که ظرفیت باربری آنها تحت تأثیر پدیدهٔ کمانش موضعی قرار داشت، اهمیت تحلیل کمانش موضعی مقاطع جدار نازک بیشتر شد. تحلیل کمانش‌موضعی مقاطع جدار نازک تحت فشار محوری توسط بلیچ در سال ۱۹۵۲، کیلور درسال ۱۹۵۳، وان درماس[4] در سال ۱۹۵٤، بکر[5] در سال ۱۹۵۷، دیواکاران[6] درسال ۱۹٦٦ و بولسون درسالهای ۱۹٦۷ و ۱۹۷۰ بررسی شد [٤].

با پیدایش و پیشرفت کامپیوترها، کلیه روشهای عددی حل سازه که به صورت محض بحث می‌شد به ابزار اساسی تحلیل سازه‌ها تبدیل شده و منجر به تحول بنیادی در روشهای تحلیل سازه‌ها و از جمله حل پایداری ورق‌ها گشت. روش پرقدرت اجزاء محدود که همان روش تحلیل ماتریسی سازه‌هاست توسط بسیاری از محققین از جمله گالاگر[7] و پادلوگ[8] در سال ۱۹٦۳، والاس[9]، مارتین[10]، کاپر[11] و هارتز[12] در سال ۱۹٦٦و گالاگر و پرزمینسکی[13] در سال ۱۹٦۸ جهت تحلیل پایداری ورق بکار گرفته شد. به نحوی که تا اواخر دهه شصت میلادی روشهای اجزاء محدود برای حل کمانش کاملا فرموله شده بود [٤].

برای بسیاری از سازه‌هایی که از نظر هندسی و شرایط مرزی ساده هستند، تحلیل اجزاء محدود نیاز به حافظه کامپیوتری زیادی داشته و مستلزم صرف زمان بسیار زیادی است. این مسئله بخصوص برای تحلیل استاتیکی سه بعدی، سازه‌های فضایی و مسائل پایداری صدق می‌کند. لذا نیاز به روشی که در ضمن کاهش تلاش کامپیوتری، تا حدودی تنوع روش اجزاء محدود را نیز داشته باشد احساس می‌گردید. روش نوار محدود که یک روش تعدیل یافته اجزاء محدود می‌باشد، پاسخ به این نیاز است.

در روش نوار محدود، سازه به نوارهایی تقسیم می‌شود که لبه‌های انتهایی این نوارها منطبق بر مرز سازه است. این سازه ها از لحاظ هندسی به گونه‌ایی هستند که طول آنها در راستای یک یا دو محور مختصات ثابت است، به نحوی که عرض نوارها از یک انتها تا انتهای دیگر تغییر نمی‌کند. نوارها بوسیله خطوط گرهی که موازی با مرزهای طولی هستند در امتداد طول به یکدیگر متصل می‌شوند. در بعضی حالات نیز ممکن است از خط گره‌های داخلی برای رسیدن به یک نوار با مرتبه بالاتر استفاده شود. درجات آزادی در

---

1. Kollbrunner
2. Heimerl
3. Chilver
4. Van Der Mass
5. Becker
6. Divakaran
7. Gallagher
8. Padlog
9. Wallace
10. Martin
11. Kapur
12. Hartz
13. Przemieniecki

یک خط گره از نوار، معمولا کمتر از درجات آزادی در یک گره از المان می‌باشد و بنابراین در روش نوار محدود، تعداد معادلات، پهنای نوار ماتریس سختی و حجم خروجی‌ها کمتر است.

طی سی سال اخیر، بسیاری از محققین از روش نوار محدود برای بررسی کمانش موضعی ورق استفاده کرده‌اند. در این راستا از روشهای مختلف نوار محدود استفاده شده است و برای حل هر مسئله بخصوص یکی از این روشها مناسب‌تر است. این روشها عبارتند از:

۱-روش نوار محدود معمولی

۲-روش نوار محدود مختلط [۱] که خود شامل دو روش است:

الف- روش نوار محدود دقیق [۲]

ب- روش نوار محدود نیمه تحلیلی [۳]

۳-روش نوار محدود اسپلاین [۴]

روش نوار محدود معمولی همان روش نوار محدود است که توسط چونگ [۵][۶] در سال ۱۹۶۷ ارائه شد. در این روش به علت فرض توابع شکل سینوسی و تغییر یک مسئله دو بعدی به تک بعدی، ابعاد مسئله کوچک شده و حل سریعا همگرا می‌شود. ولی به علت همین توابع سینوسی شکل، شرایط مرزی متفاوت را نمی‌توان تحلیل کرد و همچنین هنگامی که نیروی برشی وجود دارد به علت ایجاد شدن اختلاف فاز بین مودها این روش دارای همگرایی مناسب نبوده و به درستی جواب نمی‌دهد که محدودیت بزرگی در حل مسائل کمانش می‌باشد مگر اینکه از تعداد زیادی هارمونیک در طول ورق استفاده شود.

پرزمینسکی[۷] در سال ۱۹۷۳ از روش نوار محدود نیمه تحلیلی برای حل کمانش موضعی ورق تحت فشار دو محوری استفاده کرد. روش او در فرمول بندی نوار محدود تقریبی چونگ و چونگ [۸] درسال ۱۹۷۱ بکار رفته بود، که در آن جابجایی نوار در حین کمانش در جهت طولی به صورت تغییرات سینوسی و در جهت عرضی به صورت یک چند جمله‌ای درجه ۳ فرض شده است. در این روش به دلیل استفاده از تغییرات جابجایی دقیق در جهت طولی، نیاز به استفاده از تعداد زیاد نوارها نیست و محاسبات عددی بطور قابل ملاحظه ایی ساده می‌شوند. اما این روش با وجود اینکه برای کمانش موضعی ارتجاعی اعضاء جدار نازک مناسب است، برای کمانش جانبی و تغییر شکلی قابل استفاده نمی‌باشد. علت این امر استفاده از

---

1. complex finite strip
2. exact finite strip
3. semi-analytical finite strip
4. spline finite strip
5. Cheung

فرض معمول کمانش موضعی است که همه خطوط اتصال بین اجزاء مسطح، پس از کمانش نیز کاملا مستقیم باقی می‌مانند.

این فرض برای مودهای با طول موج کوتاه که کمانش موضعی‌در آن رخ می‌دهد صحیح است. در طول موجهای بلندتر که کمانش تغییر شکلی و جانبی رخ می‌دهد، جابجائیهای غشایی، بر تنشهای کمانش موضعی اثر می‌گذارند، بنابراین فرض مستقیم باقی ماندن خطوط اتصال در طول موجهای بلند صحیح نیست.

تحلیل‌هایی که قادر به مدل‌کردن مودهای کمانش موضعی، تغییر شکلی و جانبی اعضاء جدار نازک مسطح باشند، براساس یک روش نوار محدود دقیق توسط ویتریک، ویتریک وکرزن [1] در سال ۱۹٦۸، ویلیامز [2] و ویتریک در سال۱۹٦۹ و یک روش نوار محدود نیمه تحلیلی، در ادامه کارپرزمینسکی، توسط پلانک [3] و ویتریک در سال۱۹۷٤ و هنکوک [4] در سال۱۹۷۸توسعه یافت [٤].

روش نوار محدود نیمه تحلیلی در دهه اخیر توسط برادفورد[۹] در سال ۱۹۹۰، ازهری و برادفورد[۱۰] و [۱۱] در سالهای ۱۹۹۱ و ۱۹۹٤ برای تحلیل کمانش موضعی توسعه یافت. در تحلیل پایداری مقاطع جدار نازک با استفاده از روش نوار محدود معمولی که توسط برادفورد [5] و ازهری[۱۲] در سال ۱۹۹۵ انجام گرفت شرایط مرزی متفاوت با استفاده از توابع دیگری غیر از توابع سینوسی شکل، مدل شد.

روش نوارهای محدود جهت بررسی مودهای کمانش تیرهای I شکل توسط برادفورد و ازهری [۱۳] در سال ۱۹۹٤ و کمانش ارتجاعی تیرهای متشکل از صفحات فلزی نازک توسط ازهری و برادفورد [۱٤] در سال ۱۹۹۹ بکار گرفته شد.

روش نوار محدود اسپلاین که بعلت وجود گره‌های متفاوت در طول هر نوار به روش المان محدود نزدیک‌تر است توسط فن [6] و چونگ در سال ۱۹۸۲ در مهندسی سازه استفاده شد. این روش توانایی زیادی در مدل کردن سازه‌ها، اعمال شرایط مرزی مختلف و بارگذاری‌های پیچیده دارد ولی به علت داشتن گره‌های طولی دارای درجات آزادی بیشتری بوده و به امکانات نسبتا قوی کامپیوتری نیاز دارد.

۱-۳- کمانش یکطرفه

به موازات توسعه روشهای تحلیل کمانش موضعی متعارف، وضعیت‌های‌خاص کمانش و ازجمله کمانش یکطرفه نیز مورد توجه محققین قرار گرفت که به عنوان مثال می‌توان از کمانش یکطرفه ورق نام برد. وقتی ورق درمجاورت یک سطح صلب قرارگرفته باشد و دچار کمانش شود، به دلیل حضور سطح صلب،

---

1. Curzon
2. Williams
3. Plank
4. Hancock
5. Bradford
6. Fan