دانشکده مهندسی

گروه مکانیک

مقایسه روش‌های اجزای محدود و ایزوژئومتریک در حل معادلات دیفرانسیل مرتبه فرد با طرح کاربردهای آن و تهیه کد نرم افزاری

پایان نامه کارشناسی ارشد

تهیه کننده: اسماعیل شکوری

استاد راهنما : دکتر بهروز حسنی

زمستان ۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

بسمه تعالی

مشخصات رساله /پایان نامه تحصیلی دانشجویان

دانشگاه فردوسی مشهد

عنوان رساله / پایان نامه : مقایسه روش‌های اجزای محدود و ایزوژئومتریک در حل معادلات دیفرانسیل مرتبه فرد با طرح کاربردهای آن و تهیه کد نرم افزاری

نام نویسنده : اسماعیل شکوری

نام استاد راهنما : دکتر بهروز حسنی

دانشکده : مهندسی	**گروه : مکانیک**	**رشته تحصیلی : هوافضا**
تاریخ تصویب :		**تاریخ دفاع:۱۳۹۱/۱۰/۲۰**
مقطع تحصیلی : کارشناسی ارشد ●	**دکتری ○**	**تعداد صفحات: ۱۱۴**

چکیده رساله / پایان نامه:

معادلات حاکم بر مسائلی نظیر چپ‌شدگی تیرهای بدون اتکای جانبی، کمانش پیچشی ستون‌ها و صفحات دایره‌ای شکل متقارن مرکزی که تحت اثر نیروهای شعاعی فشاری یکنواخت قرار دارند، از مرتبه فرد می‌باشند. از آنجایی که حل معادلات دیفرانسیل مراتب فرد با روش‌های اجزای محدود شکل ضعیف معادله امکان‌پذیر نیست، ابتدا به روش‌های حل با شکل قوی و اجزای محدود ترکیبی پرداخته و معادلات اجزا استحراج می‌-شوند. سپس با بکارگیری روش‌های تولید هندسه نظیر منحنی‌های بی‌-اسپلاین، فرمول‌بندی ایزوژئومتریک معادلات دیفرانسیل مراتب فرد بدست آمده است. در ادامه، با ارائه مثال‌های عددی کارائی و دقت روش‌های اجزای محدود و ایزوژئومتریک با هم مقایسه شده‌اند. در پایان، مسئله چپ‌شدگی تیرهای بدون اتکای جانبی به کمک روش‌های اجزای محدود و ایزوژئومتریک گالرکین و حداقل مربعات حل شده است. به طور کلی، در این پژوهش نحوه به‌کارگیری هرکدام از روش‌های اجزای محدود و ایزوژئومتریک گالرکین و حداقل مربعات در حل معادلات دیفرانسیل مرتبه سه با شرایط مرزی متفاوت بررسی شده‌است. مقایسه دقت نتایج روش‌های فوق در حل معادلات دیفرانسیل با پاسخ‌های تحلیلی، کارآمدی روش‌های مذکور را تایید می‌نماید.

کلید واژه:

۱- اجزای محدود

۲- ایزوژئومتریک

۳- معادله دیفرانسیل مرتبه فرد

۴- گالرکین

۵- حداقل مربعات

امضای استاد راهنما:

تاریخ :

اظهارنامه

اینجانب اسماعیل شکوری دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی هوافضا- سازه‌های هوایی دانشکده مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد نویسنده پایان نامه مقایسه روش‌های اجزای محدود و ایزوژئومتریک در حل معادلات دیفرانسیل مرتبه فرد با طرح کاربردهای آن و تهیه کد نرم افزاری تحت راهنمایی دکتر بهروز حسنی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه فردوسی مشهد می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه فردوسی مشهد » و یا « Ferdowsi University of Mashhad » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه‌ای، نرم افزارهـا و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه فردوسی مشهد می‌باشد. این مطلب باید بـه نحـو مقتضـی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

تاریخ /۱۳۹۰/۱۲ امضای دانشجو

پایان نامه حاضر تحت عنوان :

مقایسه روش‌های اجزای محدود و ایزوژئومتریک در حل معادلات دیفرانسیل مرتبه فرد با طرح کاربردهای آن و تهیه کد نرم افزاری

که توسط آقای اسماعیل شکوری تهیه و به هیات داوران ارائه گردیده است، مورد تایید کمیته تحصیلات تکمیلی گروه مکانیک می‌باشد.

تاریخ دفاع : نمره: درجه ارزشیابی:

اعضای هیات داوران:

نام و نام خانوادگی	هیات داوران	مرتبه علمی	امضاء
۱- دکتر بهروز حسنی	استاد راهنما	دانشیار	
۲- دکتر محمد حسین ابولبشری	استاد ممتحن	استاد	
۳- دکتر حمید اختراعی طوسی	استاد ممتحن	دانشیار	
۴- دکتر مجید معاونیان	نماینده تحصیلات تکمیلی	دانشیار	

تشکر و قدردانی

با یاری خداوند متعال توانستم این طرح پژوهشی را در غالب پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد به پایان برسانم. بر خود لازم می‌دانم از تلاش‌ها و کمکهای عالمانه و و دلسوزانه استاد راهنمای عزیزم، جناب آقای دکتر بهروز حسنی کمال تشکر و سپاسگزاری را داشته باشم.

همچنین از کلیه عزیزانی که به هر نحوی در به ثمر نشستن این پایان نامه مرا یاری نمودند تشکر می‌نمایم.

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

فهرست جداول

فصل اول

مقدمه

۱-۱ مقدمه

جهت شناخت و ارزیابی صحیح مسائلی که در حوزه مکانیک سازه‌ها مطرح هستند ناگزیر به حل معادلات دیفرانسیلی می‌باشیم که در حالت کلی پیچیدگی بسیار زیادی دارند؛ لذا جهت شناخت و توسعه علم خود نسبت به این مسائل باید به دنبال روش‌های حل این معادلات باشیم. در دهه‌های گذشته روش‌های بسیاری برای تحلیل مسائل مهندسی در حیطه مکانیک محاسباتی[1] ارائه شده است که برخی از مشهورترین آن‌ها روش تفاضل محدود[2]، روش اجزای محدود[3] و دسته‌ای از روش‌ها با عنوان روش‌های بدون شبکه[4] می‌باشند. این روش‌ها در پی یکدیگر و با هدف توانمندتر نمودن و رفع مشکلات روش‌های پیش از خود ارائه شده‌اند. اما وجود دلایلی سبب شده است تا هنوز خلاء بزرگی در مسیر پر فراز و نشیب محققین در تحلیل مسائل پیش رویشان وجود داشته باشد. برخی از این دلایل عبارتند از:

ضعف روش‌ها در تولید دقیق شکل مسائل، عدم اقناع دقیق شرایط مرزی، مواجهه با مسائل پیچیده‌تر، نیاز به تولید شبکه و مسائل و مشکلات مربوط به آن، پیچیده بودن برخی از الگوریتم‌های مورد استفاده و غیره.

امروزه روش‌های قدرتمندی برای حل مسائل در اختیار محققین قرار دارد. شاید بتوان گفت که اصلی‌ترین دلیل پیشرفت و توانایی این روش‌ها، توسعه علم کامپیوتر در بعد سخت افزاری و نرم افزاری می‌باشد. بدون وجود کامپیوترهای قدرتمند هیچ‌گاه قادر به حل دستگاه‌های معادلاتی که گاه دارای میلیون‌ها مجهول بوده و به عنوان خروجی روش‌های کنونی ارائه می‌شوند نمی‌بودیم. لذا اغلب ملاحظه می‌شود که کیفیت، هزینه و زمان حل در روش‌های موجود، ارتباط مستقیم با توانایی‌های کامپیوتر مورد استفاده دارد.

۱-۲ روش‌های تحلیل سازه‌ها

۱-۲-۱ تاریخچه روش‌های عددی

تحلیل سازه‌ها با استفاده از روش اجزای محدود در دهه ۱۹۵۰ میلادی مرسوم شده و با تحلیل سازه‌های ساخته شده از تیرها شروع به گسترش و پیشرفت نمود. در سال‌های پس از معرفی این روش محققان بسیاری در سراسر جهان بر روی توسعه این روش کار کرده‌اند. همچنین ابهامات و اشکالات بسیاری مورد موشکافی و بررسی قرار گرفته و اغلب با تولید راه حل‌هایی رفع شده‌اند. با گسترش تحقیقات و رفع برخی از معایب این روش در اواسط دهه ۱۹۶۰ تا ۱۹۷۰ میلادی، تعداد زیادی از نرم افزارهای آکادمیک و تجاری بر مبنای این روش تهیه گردید. از جمله می‌توان به نرم افزارهایی مانند NASTRAN، ANSYS، ADINA، ASKA، PLAXIS، ABAQUS، CATIA، SAP و غیره اشاره نمود. این نرم افزارها همگی بر مبنای

---

[1] Computational mechanic
[2] Finite difference method
[3] Finite element method
[4] Mesh less method

دانشی بودند که تا آن زمان بدست آمده بود. محدودیت‌های نرم افزاری و سخت افزاری کامپیوترها نیز در آن زمان سبب ایجاد و حل نشدن برخی از مشکلات بود. پس از این زمان پیشرفت‌های قابل توجهی در توسعه و نفوذ این روش به حوزه‌های دیگر علم اتفاق افتاد، اما با بررسی دقیق‌تر هنوز می‌توان اشکالات و یا نقاط ضعفی را برای آن برشمرد که ناشی از فلسفه برخورد این روش با معادلات حاکم بر مسأله مورد نظر می‌باشد. مثلاً نیاز به تولید شبکه‌ای از المان‌ها[1] برای تولید هندسه یک مسأله در مکانیک جامدات از ضعف‌های این روش محسوب می‌شود. نحوه شبکه بندی، نوع المان مورد استفاده و تعداد المان‌ها، از پارامترهای موثر بر جواب نهایی مسأله، می‌باشند که در صورت انتخاب نادرست آن‌ها به جواب مطلوبی دست نخواهیم یافت. از طرف دیگر خود شبکه بندی هندسه مسأله امری دشوار و زمان بر می‌باشد. با وجود تحقیقات بسیار زیادی که بر روی روش‌های تولید شبکه اجزای محدود انجام پذیرفت ولی تا به امروز هنوز یکی از جدی‌ترین مشکلات این روش می‌باشد. حداقل اشکال تولید شبکه مدت زمانی است که برای انجام آن صرف می‌شود. به طور میانگین حدود هشتاد درصد زمان حل مسأله را مدلسازی هندسی و شبکه‌بندی به خود اختصاص می‌دهد [۱]. از طرف دیگر برای بالا بردن دقت در مدل‌سازی هندسه جسم باید از تعداد بیشتری المان و یا المان‌های با مرتبه بالاتر و یا ترکیبی از این دو روش استفاده نمود که در تمام حالات سبب افزایش زمان تولید شبکه المان‌ها، زمان حل دستگاه معادلات حاکم بر مسأله و حافظه مورد نیاز کامپیوتر خواهد شد. همچنین اگر به ازای تعداد مشخصی از المان‌ها، دقت بالاتری برای تقریب تابع مجهول لازم باشد باید از تکنیک‌های بهبود شبکه بهره جست که علاوه بر زمان‌بر شدن تولید شبکه مناسب المان‌ها باید بر مشکلات ایجاد شده در مباحث تئوری غلبه نمود. در حالت کلی نیز با پیچیده‌تر شدن مسأله مورد بررسی، کلیه موارد فوق به شکل مؤثرتری اثرات منفی خود را نشان می‌دهند. ایجاد روش‌های بدون شبکه در سال‌های بعد از ۱۹۹۰ میلادی نیز به خاطر رفع این مشکلات شروع گردید که باز هم در آن‌ها نیاز به تولید شبکه‌ای از گره‌ها وجود داشت. در حدود سال ۱۹۷۴ مفهوم توابع پایه اسپلاین[2] معرفی گردید [۲]. در این روش منحنی‌ها و سطوح به هر شکل دلخواهی با استفاده از چندین تکه منحنی و سطح ساخته می‌شوند که پیوستگی بین این قطعات نیز به طور خودکار برقرار می‌گردد. با توجه به اینکه در این روش به محاسبات عددی نیاز است، لذا پیشرفت نرم افزاری و سخت افزاری کامپیوترها به همراه کار بر روی تئوری‌های این روش توسط محققین سبب توسعه بیشتر این روش گردید.

ایده استفاده از توابع پایه‌ای اسپلاین به جای توابع شکل مورد استفاده در اجزای محدود در تحلیل مسائل مهندسی توسط هولینگ و کاگان [۳,۴,۵] در سال‌های ۱۹۹۸ تا ۲۰۰۴ معرفی و تا حدودی توسعه یافت. در سال ۲۰۰۵ این ایده با استفاده از توابع نربز که از توسعه توابع اسپلاین بدست می‌آیند توسط

[1] Mesh generation
[2] Spline

هیوز[1] تکامل یافت و روش تحلیل ایزوژئومتریک نام گرفت. از سال ۲۰۰۵ به بعد هیوز و همکارانش سعی در توسعه این روش داشته‌اند که چندین مقاله نیز در این خصوص منتشر شده است [۶,۷,۸,۹].

۱-۲-۲ معرفی روش تحلیل اجزای محدود

از اولین تألیفات در تاریخچه روش اجزای محدود می‌توان به کتاب آرگریس[2] و کلسی[3] [۱۰] در سال ۱۹۶۰ اشاره نمود که در واقع مجموعه‌ای از مقالات ایشان در سال‌های ۱۹۵۴ و ۱۹۵۵ و همچنین مقالات ترنر[4] [۱۱] و همکارانش در سال ۱۹۵۶ است. نام روش اجزای محدود توسط کلاف[5] [۱۲] در سال ۱۹۶۰ انتخاب گردید. در اواخر این دهه مهندسان برای حل مسائلی مانند تحلیل تنش، جریان سیال، انتقال حرارت و غیره از این روش استفاده می‌کردند. رشد سریع این روش اثرات بسیار شگرفی در رشد علوم و تکنولوژی در نیم قرن گذشته داشته است؛ لذا در این بازه از زمان استفاده از روش اجزای محدود در حوزه‌های متنوعی از علوم سبب توسعه آن شده است. امروزه به علت رفع اغلب ابهامات و مشکلات رشد این روش دیگر سرعت گذشته را نداشته و فقط در برخی مسائل و جزئیات خاص، تحقیقات برای ارتقای این روش ادامه دارد. امروزه برنامه‌های تجاری و آکادمیک بسیاری بکمک این روش تهیه شده است که اغلب به صورت تخصصی برای حل مسائل مختلف استفاده می‌شوند. در واقع تفاوت اصلی این نرم افزارها در مباحث گرافیکی، کتابخانه المان‌ها، تکنولوژی تولید شبکه، توانایی بهبود شبکه، توانایی حل دستگاه معادلات، نیازهای سخت افزاری و غیره می‌باشد.

مزایایی از جمله پایداری عددی، قابلیت اعتماد، مدل‌سازی انواع هندسه، امکان استفاده در مسائل متنوع مهندسی، قابلیت اعمال بارگذاری‌ها و شرایط مرزی متنوع و نهایتاً پیشینه تحقیقاتی قوی سبب رشد و گسترش سریع این روش شده‌است. از طرف دیگر معایبی نظیر عدم دست‌یابی به حل دقیق، خطاهای ناشی از مدل‌سازی هندسه، استفاده از گره‌ها برای تبدیل محیط پیوسته (نامحدود) به محیط ناپیوسته (محدود)، مشکلات ناشی از تولید شبکه و بهبود آن، نیاز به قضاوت صحیح مهندسی در برخورد با جواب‌های حاصله و اشتباهات ناشی از کاربران در این روش وجود دارد که بیشتر ناشی از شرایط فرمول‌بندی در این روش می-باشند [۱۳].

[1] Hughes
[2] Argyris
[3] Kelsey
[4] Turner
[5] Clough

۱-۲-۳ معرفی روش تحلیل ایزوژئومتریک

روش ایزوژئومتریک بر مبنای استفاده از تکنیک‌های تولید هندسه مانند تکنیک نربز[1] بنا شده است. تکنیک نربز به عنوان راهکاری استاندارد برای تولید هندسه به کمک کامپیوتر[2] می‌باشد که در بخش‌های بعدی به تفصیل به آن اشاره خواهد شد. در این روش هندسه مسأله به صورت دقیق مدل می‌شود. سپس از همان اطلاعاتی که برای مدل‌سازی هندسه استفاده شده است، برای تقریب تابع مجهول استفاده می‌شود. به همین علت نیز نام روش ایزوژئومتریک بر روی آن قرار داده شده است که برگرفته از مفهوم المان ایزوپارامتریک در روش اجزای محدود است[۱]. المان‌های ایزوپارامتریک که از مهم‌ترین مفاهیم تاریخچه تکنولوژی المان‌هاست، در سال ۱۹۶۶ توسط آیرونز[3] [۱۴] و زینکویچ[4] و چانگ[5] در سال ۱۹۶۸[۱۵] ارائه شده‌اند. اساس استفاده از روش‌های تولید هندسه توسط کامپیوتر باعث شده است که محققان به دنبال استفاده از تکنیک‌های متنوع‌تری در تولید هندسه به جای تکنیک نربز باشند. تکنیک‌هایی مانند روش تی-اسپلاین[6]، زیر بخش[7] و غیره از جمله مهم‌ترین روش‌هایی هستند که به عنوان جایگزین تکنیک نربز در روش ایزوژئومتریک مورد استفاده قرار گرفته و مقالاتی در این خصوص منتشر شده است [۱۶,۱۷,۱۸,۱۹,۲۰,۲۱,۲۲]. از نظر کاربردی این روش در حوزه‌های متنوعی از مسائل نظیر اندرکنش سیال با سازه [۲۳]، تحلیل پوسته‌ها [۲۴,۲۵,۲۶,۲۷]، انتشار حرارت [۲۸]، مدل‌سازی جریان‌های متلاطم [۲۹]، تغییر شکل‌های بزرگ [۳۰]، ارتعاش سازه‌ها [۳۱,۳۲]، تحلیل دینامیکی [۳۳,۳۴]، اندازه‌گیری میدان کرنش [۳۵]، آیرودینامیک [۳۶]، انتگرال‌گیری عددی [۳۷]، المان دایره-ای [۳۸]، المان استوانه‌ای [۳۹]، تحلیل برخورد [۴۰,۴۱]، جریان ناویر استوکس [۴۲]، مورد توجه محققان بوده است.

روش ایزوژئومتریک در مقایسه با روش اجزای محدود از ادبیات خاص خود برخوردار است که بعداً به آن اشاره خواهد شد. ولی به طور خلاصه برخی از مزایای آن به شرح زیر می‌باشد[۴۳].

- ✓ مدل‌سازی دقیق هندسه و انعطاف پذیری فوق‌العاده در تولید و کنترل مرزهایی با اشکال پیچیده.
- ✓ عدم وابستگی هندسه تولید شده به ریز یا درشت بودن شبکه نقاط کنترلی.

[1] Non uniform rational b-splines (NURBS)
[2] Computer aided geometric design (CAGD)
[3] Irons
[4] Zienkiewicz
[5] Cheung
[6] T-Spline
[7] Subdivision

- ✓ در روش اجزای محدود گره‌ها تحت تأثیر شرایط مرزی قرار دارند ولی در این روش یک مرز تحت تأثیر قرار می‌گیرد بنابراین امکان اقناع دقیق شرایط مرزی در این روش وجود دارد.
- ✓ داشتن تئوری مشابه روش اجزای محدود و دارا بودن اغلب مزایای این روش.
- ✓ عدم نیاز به شبکه بندی مجدد در مسائلی که هندسه مسأله در حین حل تغییر می‌کند.
- ✓ کاهش چشمگیر در ابعاد دستگاه معادلات حاکم و در نتیجه کاهش زمان حل دستگاه معادلات.
- ✓ کاهش در حجم حافظه کامپیوتری مورد نیاز برای ذخیره سازی اطلاعات مسأله.
- ✓ نیاز به فایل‌های ورودی بسیار ساده و قابل درک.
- ✓ ایجاد امکانات بیشتر در خصوص مسأله بهبود شبکه و بالا بردن دقت حل.
- ✓ حل معادلات دیفرانسیل با ضرایب متغیر.

۱-۳ اهمیت حل معادلات دیفرانسیل مرتبه فرد در مهندسی سازه

نیم رخ‌های فولادی تیرهایی از قبیل آی شکل (I)، ناودانی ([) و بال پهن که از نظر مقاومت خمشی و فشاری دارای مزایای قابل توجهی می‌باشند، از لحاظ پیچشی مقاومت خوبی ندارند، و اگر به علتی تحت پیچش قرار گیرند، تغیر شکل‌ها و تنش‌های قابل توجه و یا ناپایداری‌های ناخواسته از کمانش ممکن است در آن‌ها به وجود آید. به طور کلی وقتی که یک عضو با مقطع غیر دایره تحت پیچش قرار می‌گیرد. مقاطع صفحه‌ای عمود بر محور عضو، پس از پیچش دیگر به صورت صفحه باقی نمی‌مانند و سطح تاب برداشته‌ای[1] به وجود می‌آورند. در این‌گونه اعضا اگر مقاطع برای تاب برداشتن آزاد نباشند علاوه بر تنش‌های برشی، تنش‌های قائم بر مقطع نیز خواهیم داشت. بنابراین تحلیل مسئله چپ‌شدگی در سازه پرکاربردی مانند تیر از اهمیت خاصی برخوردار می‌باشد [۴۴]. به علت آنکه معادله‌ی حاکم بر مسائل چپ‌شدگی پیچشی تیرها بدون اتکای جانبی و کمانش پیچشی ستون‌ها مانند کمانش صفحات دایره‌ای شکل متقارن مرکزی که تحت اثر نیروهای فشاری شعاعی یکنواخت قرار دارند، یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه سه می‌باشد [۴۵,۴۶]. لذا ناگزیر به حل معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه فرد با استفاده از روش‌های عددی کارآمد می‌باشیم. روش عددی دیفرانسیل کوادرچر[2] که توسط چانگ نیو چنگ معرفی شده است روش مناسبی می‌باشد که از آن در حل معادلات چپ‌شدگی پیچشی استفاده شده است [۴۷]. روش اجزای محدود از جمله روش‌های عددی بسیار نیرومند در حل انواع معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی با هر مرتبه‌ای با قدمتی شصت ساله است. نرخ همگرائی بالا و استفاده‌ی آسان برای شرایط مرزی با هندسه‌ی نسبتاً پیچیده و الگوریتمه شدن آن، جهت تهیه برنامه‌های کامپیوتری از جمله مزایای شناخته شده این روش می‌باشد [۴۸]

---

[1] Warped surfaced
[2] Differential quadrature element method (DQEM)

که از آن به طور گسترده در حل معادلات دیفرانسیل حاصل از مسائل مکانیک مهندسی، که اکثراً معادلاتی از مراتب زوج هستند استفاده شده است. در این تحقیق با بررسی این روش شناخته شده برای حل مسئله چپ‌شدگی، نشان داده شده است که حل معادلات دیفرانسیل مراتب فرد هم به آسانی و با دقت بسیار بالا با استفاده از شکل‌های قوی[1] اجزای محدود و ایزوژئومتریک قابل دست‌یابی می‌باشد.

۱-۴ ساختار کلی پایان نامه

این رساله مشتمل بر شش فصل می‌باشد. فصل حاضر به مقدمه‌ای بر تاریخچه روش‌های عددی و معرفی آن‌ها اختصاص یافته است. در فصل دوم برخی از کاربردهای معادلات دیفرانسیل مرتبه فرد در مهندسی مکانیک معرفی شده‌اند. در فصل سوم روش‌های حل اجزای محدود معادلات دیفرانسیل مرتبه فرد بررسی شده است و از رهیافت حاصل شده در فصل چهارم معادلات اجزا و توابع شکل مورد نیاز در حل معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه سه استخراج شده است. در ادامه جهت حل این معادلات توسط روش تحلیل ایزوژئومتریک در فصل پنجم ضمن معرفی روش هندسی بی-اسپلاین، فرمول‌بندی حل معادلات مرتبه سه نیز توسط روش مذکور بدست آمده است. معادلات دیفرانسیل مرتبه سه متنوعی به کمک روش‌های اجزای محدود و ایزوژئومتریک در فصل شش حل و پاسخ‌های حاصله با تعیین حداکثر خطای مطلق هر روش باهم مقایسه شده است و در پایان نتایج هر روش جمع‌بندی و ارائه شده است.

[1] Strong form

فصل دوم

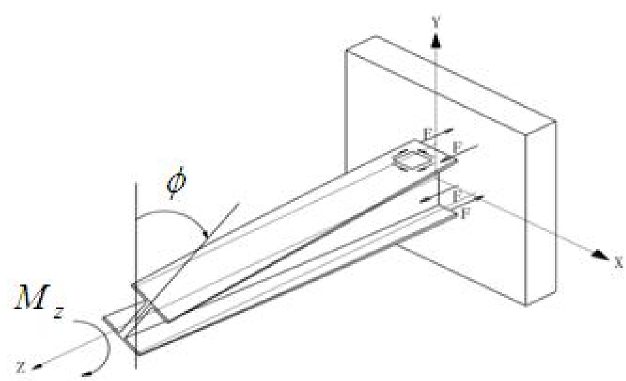
کاربرد معادلات دیفرانسیل معمولی مراتب فرد در مکانیک سازه‌ها

۲-۱ مقدمه

اکثر معادلاتی که توصیف کننده پدیده‌های مهم در مکانیک مهندسی، نظیر مسائل انتقال حرارت، جریان لزج بین صفحات، ارتعاشات و کمانش سازه‌ها هستند از نوع معادلات دیفرانسیل معمولی و یا معادلات با مشتقات جزئی از مرتبه‌های زوج می‌باشند؛ لذا کمتر شاهد کاربرد معادلات دیفرانسیلی مراتب فرد در مکانیک سازه‌ها بوده‌ایم. در این فصل سعی شده است تا مباحث مهمی را که توسط معادلات دیفرانسیلی مراتب فرد توصیف می‌شوند معرفی گردد.

۲-۲ مسئله چپ‌شدگی تیر بدون اتکای جانبی

شکل (۲-۱) تیری با مقطع (I) شکل را نشان می‌دهد که در یک انتها به صفحه‌ای سخت جوش شده و در انتهای آزادش تحت لنگر پیچششی M_z قرار دارد. مقطع عرضی این تیر در شکل (۲-۲) نشان داده شده اکه در آن جان تیر نسبت به وضعیت اولیه به اندازه ϕ دوران کرده است و بال‌های فوقانی و تحتانی نیز به اندازه u_f به وضعیت اولیه تغییر مکان جانبی نموده‌اند. در نتیجه این لنگر پیچشی، دو نوع تنش برشی در سطح مقطع بوجود می‌آید، یکی به واسطه پیچش خالص و دیگری به علت ممانعت ایجاد شده در مقابل تاب برداشتن، وجود این دو نوع تنش برشی، طبق رابطه (۲-۱) دو لنگر پیچشی مقاوم، یکی لنگر پیچشی خالص[1] و دیگری لنگر پیچشی ممانعت شده[2] ایجاد می‌کند.



شکل (۲-۱) تیر تحت پیچش

$$M_z = M_s + M_w \quad (۱-۲)$$

[1] Pure torsion
[2] Restraint warping torsion