بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

عنوان :

آشفتگی قاب ها و پایه ریس در فضای هیلبرت C^*- مدول

استاد راهنما:
دکتر عبدالمجید فتاحی

نگارش:
سمیه سلیمی

بهمن ۱۳۹۱

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

نام دانشجو:
سمیه سلیمی

تحت عنوان :

آشفتگی قاب ها و پایه ریس در فضای هیلبرت C^*- مدول

در تاریخ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه به تصویب نهایی رسید.

استاد راهنمای پایان‌نامه دکتر عبدالمجید فتاحی با مرتبه‌ی علمی امضاء:

استاد داور داخل گروه دکتر شاپور حیدر خانی با مرتبه‌ی علمی امضاء:

استاد داور خارج گروه دکتر محمد ابوالقاسمی با مرتبه‌ی علمی امضاء:

خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر عبدالمجید فتاحی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از برادران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

سمیه سلیمی

بهمن ۱۳۹۱

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم

چکیده

در این تحقیق برخی نتایج جدید برای قاب ها و پایه ریس در هیلبرت C^*- مدول را ارائه می‌دهیم. سپس خواص آن ها را در فضای هیلبرت C^*- مدول بررسی می‌کنیم. در پایان آشفتگی قاب ها و پایه ریس در فضای هیلبرت C^*- مدول را مشخص می‌کنیم، یعنی شرط لازم و کافی را تحت آشفتگی پایه ریس در فضای هیلبرت C^*- مدول به دست می‌آوریم تا پایه ریس باقی بماند.

کلمات کلیدی:

هیلبرت C^*- مدول، پایه ریس، آشفتگی قاب ها

فهرست مطالب

عنوان صفحه

پیشگفتار

در سال ۱۹۵۲ برای اولین بار قاب ها توسط دافن[۱] وشیفر[۲] برای مطالعه برخی مسائل مربوط به آنالیز فوریه غیر هارمونیک تعریف شدند. قاب ها که تعمیمی از پایه های ریس هستند نقش کاربردی در زمینه های مختلف نظیر پردازش سیگنال و تصاویر، متراکم سازی داده ها و نظریه نمونه گیری ایفا می‌کنند. در سال ۱۹۹۹ لارسن[۳] و فرانک[۴] قاب استاندارد را در هیلبرت C^*- مدول تعریف کردند و یک سری نتایج برای قاب های استاندارد در مولد شمارا یا متناهی تولید شده هیلبرت C^*- مدول روی C^*- جبر یکانی به دست آوردند و در همین سال مفهوم قاب مدول را در C^*- جبر و هیلبرت C^*- مدول معرفی کردند. هیلبرت C^*- مدول تعمیمی از مفهوم فضای هیلبرت است. تفاوت های اساسی بین فضاهای هیلبرت و هیلبرت C^*- مدول وجود دارد. به عنوان مثال در هیلبرت C^*- مدول، a ناتهی وجود دارد به طوری که $ax_j = ۰$ که $\{x_j\}_{j\in J}$ پایه ریس است، اما در فضای هیلبرت این امر اتفاق نمی‌افتد.

بنابراین انتظار داریم مشکلات قاب ها در هیلبرت C^*- مدول پیچیده تر از فضای هیلبرت باشد. در حالی که نتایج به دست آمده درباره قاب ها در فضای هیلبرت را به سادگی می‌توان به قاب های هیلبرت C^*- مدول توسیع داد. بسیاری دیگر را به سهولت و با تغییر روش های مورد نیاز در فضای هیلبرت را می‌توان به دست آورد.اخیرا لای[۵] نشان داده است که هر هیلبرت C^*- مدول یک قاب نمی‌پذیرد در حالی که هر فضای هیلبرت دارای یک قاب است. با این وجود قضیه مشهور تثبیت کاسپاروف[۶] حاکی از آن است که هر هیلبرت C^*- مدول شمارا یا متناهی تولید شده دارای قاب است. پس در این پایان نامه روی هیلبرت C^*- مدول شمارا یا متناهی تولید شده روی C^*- جبر یکانی A بحث می‌کنیم . در سال ۲۰۰۹ هان[۷]، مهاپاترا[۸] و همکارانشان آشفتگی برای قاب و پایه ریس در فضای هیلبرت C^*- مدول را بررسی کردند و نشان دادند که قضیه آشفتگی کازا - کریستین[۹] همانطور که در هیلبرت C^*- مدول برقرار است در هیلبرت C^*- مدول نیز پایدار است. در واقع آشفتگی به معنی

Duffin[۱]

Schaeffer[۲]

Larson[۳]

Frank[۴]

Li[۵]

Kasparov[۶]

Han[۷]

Mohapatra[۸]

Christensen - Casazza[۹]

تغییراتی است که در سیستم یک قاب به وجود می آید و برسی می کنیم که تحت آشفتگی یک قاب باقی می ماند.هدف اصلی این تحقیق فراهم آوردن تفاوت بین قاب ها و پایه ریس در هیلبرت C^*- مدول است و همچنین نشان خواهیم داد که قضیه آشفتگی کازا - کریستین برای قاب ها در فضای هیلبرت C^*- مدول نیز معتبر است و این قضیه برای پایه ریس در فضای هیلبرت C^*- مدول برقرار نیست و نیز شرط لازم و کافی را تحت این آشفتگی به دست می آوریم تا پایه ریس باقی بماند.

این تحقیق شامل چهار فصل بوده که در فصل اول به ذکر پیش نیازهای مورد نیاز در فصول بعد پرداخته و در فصل دوم مفاهیم و قضایای اولیه قاب ها در فضای هیلبرت را بررسی می کنیم. در فصل سوم مفاهیم مقدماتی از قاب ها در فضای هیلبرت C^*- مدول را بیان می کنیم و در فصل چهارم آشفتگی قاب ها و پایه ریس در فضای هیلبرت C^*- مدول را بیان می کنیم.

فهرست نشانه‌ها و نمادها

$\delta_{\alpha,\beta}$	دلتای کرونکر
$Span(A)$	مجموعه ترکیبات خطی متناهی از اعضای A
$\mathcal{H}$	فضای هیلبرت
$U^{\perp}$	متمم متعامد U
$\mathcal{N}(U)$	فضای پوچ U
$\mathcal{R}(U)$	فضای برد U
$L(X,Y)$	فضای عملگرهای خطی کراندار از X به Y
$\|f\|_p$	نرم L^P برای f
$U^{\dagger}$	شبه معکوس
$B(\mathcal{H},\mathcal{K})$	گردایه ای از همه نگاشت های A- خطی الحاق پذیر

فصل ۱

مفاهیم و مقدمات اولیه

در این فصل تعاریف و قضایای مورد نیاز فصول بعدی را بیان می‌نماییم.

۱-۱ فضاهای نرم دار

تعریف ۱-۱-۱. فرض می‌کنیم X یک فضای برداری مختلط مقدار باشد، نگاشت $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ را یک نرم روی X می‌نامیم هر گاه برای هر $x, y \in X$ و برای هر $\alpha \in \mathbb{C}$،

(الف) $\|x\| = 0$ اگر وتنها اگر $x = 0$،

(ب) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$،

(پ) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$.

فضای برداری X را همراه با نرم $\|.\|$ یک **فضای خطی نرم دار** [۱] می‌نامیم.

بنابر (پ) نامساوی مثلثی برای هر $x, y, z \in X$ برقرار است.

$$\|x - y\| \le \|x - z\| + \|z - y\|.$$

خواص فوق نشان می‌دهد که اگر فاصله x, y را برابر $\|x - y\|$ تعریف کنیم، هر فضای خطی نرم دار یک **فضای متری**[۲] است.

تعریف ۱-۱-۲. فضای تمام توابع خطی و پیوسته از X به $\mathbb{R}$ **فضای دوگان** [۳] نامیده می‌شود. و با X' نمایش داده می‌شود.

تعریف ۱-۱-۳. فرض می‌کنیم $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ دنباله ای از توابع بر X باشد.گوئیم $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ به f همگرای یکنواخت است، هر گاه به ازای هر $\epsilon > 0$ عدد صحیحی مانند $\mathbb{N}$ باشد به طوری که $n \ge \mathbb{N}$ نامساوی

$$|f_n(x) - f(x)| \le \epsilon.$$

به ازای هر $x \in X$ برقرار باشد.

---

[۱] linear normed space

[۲] metric space

[۳] dual space

قضیه ۱-۱-۴. *در فضای نرم دار X هر دنباله همگرا کوشی است.*

برهان. رجوع شود به قضیه۱-۵ از [۱۳]. $\square$

تعریف ۱-۱-۵. دو نرم $\|.\|_1$ و $\|.\|_2$ در فضای نرم دار X را **معادل (هم ارز)**[۱] می نامیم هر گاه اعداد ثابت و مثبت A, B موجود باشند به طوری که به ازای هر $x \in X$،

$$A\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant B\|x\|_1.$$

قضیه ۱-۱-۶. *در هر فضای نرم دار با بعد متناهی هر دو نرم دلخواه هم ارزند.*

برهان. رجوع شود به قضیه ۱-۳ از [۵].

۱-۲ عملگرهای خطی روی فضاهای نرم دار

تعریف ۱-۲-۱. فرض می‌کنیم X, Y دو فضای برداری باشند، یک **عملگر خطی**[۲] از فضای برداری X به فضای برداری Y، نگاشتی است مانند T که به ازای هر $x, y \in X$ و هر دو اسکالر α, β داشته باشیم:

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

در حالت خاصی که Y میدان اسکالرهاست، T را یک **تابعک خطی**[۳] می‌نامیم.

مجموع ه های $\mathcal{N}(\mathcal{T}) := \{x \in X \ ; \ T(x) = 0\}$ و $\mathcal{R}(\mathcal{T}) := \{T(x) \ ; \ x \in X\}$ را به ترتیب **فضای پوچ** و **فضای برد** T می‌نامیم.

همچنین عملگر همانی روی X رابا نماد I_x یا به طور خلاصه با I نشان می‌دهیم.

تعریف ۱-۲-۲. فرض می‌کنیم X وY فضاهای برداری نرم دار باشند، عملگر خطی $T : X \to Y$ را **کراندار**[۴] گویند، هر گاه یک عدد مثبت M وجود داشته باشد به طوری که برای هر x داشته باشیم:

$$\|T(x)\| \leq M\|x\|.$$

کوچکترین مقدار M با خاصیت فوق را نرم T می نامیم. بنابراین رابطه زیر را داریم:

$$\|T\| = sup\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \ ; \ \ x \in X \ \text{و} \ x \neq 0\}.$$

---

[۱] equivalent

[۲] linear operator

[۳] linear functional

[۴] bounded

فضای تمام عملگرهای خطی، کراندار از X به Y را با $L(X,Y)$ نشان می‌دهیم و در حالت خاص $X = Y$ از نماد $L(X)$ استفاده می‌کنیم. همچنین اگر $Y = \mathbb{C}$، $L(X,\mathbb{C})$ را با X' نشان می‌دهیم و هر یک از اعضای X' را یک **تابعک خطی کراندار**[1] می‌نامیم.

تعریف ۱-۲-۳. فرض کنیم X, Y دو فضای نرم دار باشند

(الف) زیر مجموعه A را **نرم - کراندار** [2] می‌نامیم هر گاه ثابتی مانند M موجود باشد که برای هر $x \in A$، $\|x\| \leq M$.

(ب) زیر مجموعه ی A از $L(X,Y)$ را **نقطه ای کراندار**[3] می‌نامند هر گاه برای هر $x \in X$

$$A(x) := \{T(x) \ ; \ T \in A\}$$

زیر مجموعه ای کراندار از Y باشد.

تعریف ۱-۲-۴. دو فضای نرم دار X, Y را **یکریخت** [4] می‌نامیم هر گاه عملگری خطی مانند $T \in L(X,Y)$ موجود باشد که یک به یک، پوشا و وارون آن پیوسته باشد و در این حالت می‌نویسیم $X \cong Y$.

قضیه ۱-۲-۵. *اگر T_1 و T_2 عملگرهای خطی کراندار باشند، آنگاه ترکیب آنها یعنی T_1T_2 نیز عملگری خطی و کراندار است و*

$$\|T_1T_2\| \leq \|T_1\|\|T_2\|.$$

۱-۳ فضاهای باناخ و هیلبرت

تعریف ۱-۳-۱. اگر فضای خطی نرم دار X کامل باشد، یعنی هر دنباله کوشی با متر تعریف شده توسط نرم در X همگرا باشد، آنگاه X را یک **فضای باناخ (کامل)** [5] می‌نامیم.

مثال ۱-۳-۲. مجموعه اعداد مختلط $\mathbb{C}$، همراه با نرم قدر مطلق، فضای باناخ است .

---

[1] linear buonded functional

[2] norme-bounded

[3] bounded pointwise

[4] isomorphic

[5] banach space

قضیه ۱-۳-۳. *اگر Y کامل باشد، $L(X,Y)$ کامل است.*

برهان. رجوع شود به قضیه ۴-۵ از [۱۳]. □

ملاحظه ۱-۳-۴. *فرض می‌کنیم $\|.\|_۱$ و $\|.\|_۲$ دو نرم هم ارز روی فضای برداری X باشند، در این صورت $(X,\|.\|_۱)$ باناخ است اگر وتنها اگر $(X,\|.\|_۲)$ باناخ باشد.*

قضیه ۱-۳-۵. **(*اصل کرانداری یکنواخت*)** [1] *فرض می‌کنیم X,Y دو فضای نرم دار باشد و $\mathcal{A}\subset L(X,Y)$ در این صورت اگر X باناخ باشد و برای هر $x\in X$ ، $sup_{T\in\mathcal{A}}\|T(x)\|<\infty$ آنگاه:*

$$sup_{T\in\mathcal{A}}\|T\|<\infty.$$

برهان. رجوع شود به قضیه ۱۳-۵ از [۱۳]. □

تعریف ۱-۳-۶. فضای برداری مختلط $\mathcal{H}$ را یک **فضای ضرب داخلی** [2] می‌نامیم، اگر نگاشت

$$\langle .,.\rangle:\mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{C}\quad ; \quad (x,y)\to\langle x,y\rangle$$

موجود باشد که به ازای هر $x,y,z\in\mathcal{H}$ وهر $\alpha\in\mathbb{C}$ داشته باشیم:

(الف) $\langle y,x\rangle=\overline{\langle x,y\rangle}$،

(ب) $\langle \alpha x+y,z\rangle=\alpha\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$،

(پ) $\langle x,y\rangle\geq ۰$،

(ت) $\langle x,x\rangle=۰$ اگر و تنها اگر $x=۰$.

به عدد مختلط $\langle x,y\rangle$ ضرب داخلی x در y و نگاشت فوق را **ضرب داخلی** می‌نامیم. با توجه به تعریف ضرب داخلی، نرم را در فضای $\mathcal{H}$ را چنین تعریف می‌کنیم: $\|x\|=\langle x,x\rangle^{\frac{۱}{۲}}$.

نتیجه ۱-۳-۷. *از تعریف ضرب داخلی نتایج زیر به دست می‌آید:*

(الف) $\langle ۰,x\rangle=۰$،

(ب) $\langle z,\alpha x+y\rangle=\overline{\alpha}\langle z,x\rangle+\langle z,y\rangle$،

(پ) نامساوی ***کوشی - شوارتز***[3]*: به ازای هر $x,y\in\mathcal{H}$ داریم:*

$$|\langle x,y\rangle|\leq\|x\|.\|y\|,$$

---

[1] uniform bounded principle

[2] inner product space

[3] schwarz - cauchy inequality

(ت) *نامساوی **مثلثی**[۱]: به ازای هر* $x,y \in \mathcal{H}$ *داریم:*

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

(ث)***اتحاد متوازی الاضلاع***[۲]*: برای هر* $x,y \in \mathcal{H}$ *و هر* $\alpha \in \mathbb{C}$ *داریم:*

$$\|x+y\|^۲ + \|x-y\|^۲ = ۲(\|x\|^۲ + \|y\|^۲).$$

ملاحظه ۱-۳-۸. *از نامساوی مثلثی نتیجه می‌گیریم* $\|x-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\|$*. بنابراین اگر فاصله ی بین* x,y *را با* $d(x,y) = \|x-y\|$ *نشان دهیم،* $(\mathcal{H},d)$ *در تمام شرایط فضای متریک صدق می‌کند و از شرط (ت) تعریف (۱-۳-۶) نتیجه می گیریم اگر* $\|x\| = ۰$ *آنگاه* $x = ۰$ *لذا* $\mathcal{H}$ *یک **فضای نرم دار**[۳] است.*

تعریف ۱-۳-۹. اگر فضای ضرب داخلی $\mathcal{H}$با نرم $\|x\| = \langle x,x\rangle^{\frac{۱}{۲}}$ کامل باشد، آنگاه $\mathcal{H}$ را یک **فضای هیلبرت**[۴] می‌نامیم.

مثال ۱-۳-۱۰. (الف) فضای برداری $\mathbb{C}^n$ مرکب از تمام nتایی های مرتب $X = (x_۱, x_۲, ..., x_n)$ است که در آن x_iها مختلط اند را در نظر بگیرید. جمع و ضرب اسکالر و نیز ضرب داخلی را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$X+Y = (x_۱+y_۱, x_۲+y_۲, ..., x_n+y_n)\ ,\ \alpha X = (\alpha x_۱, \alpha x_۲, ..., \alpha x_n) \quad (X,Y \in \mathbb{C}^n), \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\text{و} \quad \langle X,Y\rangle = \sum_{i=۱}^{i=n} x_i \overline{y_i}.$$

در این صورت $\mathbb{C}^n$ یک فضای هیلبرت است.

ملاحظه ۱-۳-۱۱. *فضاهای هیلبرت، رده خاصی از فضاهای باناخ را تشکیل می‌دهند و تمام قضایای فضای باناخ در موردفضاهای هیلبرت نیز برقرار است.*
در این پایان نامه از این به بعد، $\mathcal{H}$ *را یک فضای هیلبرت در نظر می‌گیریم.*

تعریف ۱-۳-۱۲. زیر فضای بسته [۵] از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$، زیر فضایی برداری است که با توپولوژی حاصل از نرم در$\mathcal{H}$ بسته باشد.

---

[۱] triangle inequality
[۲] paralleogram identity
[۳] normed space
[۴] Hilbert space
[۵] closed subspace

تعریف ۱-۳-۱۳. دو فضای هیلبرت $\mathcal{H}_۱, \mathcal{H}_۲$ را به ترتیب با ضرب های داخلی $\langle .,. \rangle_۱, \langle .,. \rangle_۲$ **یکریخت**[۱] نامیده می شود هر گاه عملگری خطی، کراندار و دوسویی مانند $T : \mathcal{H}_۱ \to \mathcal{H}_۲$ موجود باشند که ضرب داخلی را حفظ کند، یعنی به ازای هر $x, y \in \mathcal{H}_۱ \quad , \quad \langle Tx, Ty \rangle_۲ = \langle x, y \rangle_۱$، در این حالت می‌نویسند $\mathcal{H}_۱ \cong \mathcal{H}_۲$.

تعریف ۱-۳-۱۴. مجموعه ی $\{u_\alpha \quad : \quad \alpha \in A\}$ در $\mathcal{H}$ را

(الف) **متعامد**[۲] می‌نامند هر گاه به ازای هر $\alpha, \beta \in A$ که $\alpha \neq \beta$, $\langle u_\alpha, u_\beta \rangle = ۰$.

(ب) **متعامد یکه** [۳] نامند هر گاه به ازای هر $\alpha, \beta \in A \quad \langle u_\alpha, u_\beta \rangle = \delta_{\alpha,\beta}$.

که در آن $\delta_{\alpha,\beta}$، **دلتای کرونکر**[۴] می‌باشد.

تعریف ۱-۳-۱۵. فرض می‌کنیم V یک فضای برداری باشد و $\varnothing \neq A \subseteq V$، $span(A)$ را مجموعه تمام ترکیبات خطی متناهی از اعضای A تعریف می‌کنیم. یعنی

$$span(A) = \{\sum_{i \in F} c_i x_i : \text{ متناهی است } F \, , x_i \in A, \ c_i \in \mathbb{C}\}$$

در واقع $span(A)$ کوچکترین زیر فضای برداری V است که شامل A است و آن را زیر فضای تولید شده توسط A می‌نامند.

تعریف ۱-۳-۱۶. دنباله $\{x_i\}_{i \in I}$ را در $\mathcal{H}$ **کامل** [۵] گوییم اگر تنها عضو عمود بر این خانواده عضو صفر باشد. یعنی اگر $x \in \mathcal{H}$ چنان باشد که به ازای هر $i \in I$ ، $\langle x, x_i \rangle = ۰$ آنگاه $x = ۰$. این معادل است با اینکه $Span\{x_i\}_{i \in I}$ در $\mathcal{H}$ چگال باشد.

تعریف ۱-۳-۱۷. گوییم $\{x_i\}_{i \in I}$ در $\mathcal{H}$ **ماکسیمال**[۶] است اگر به طور سره درون هیچ مجموعه متعامد یکه دیگری از $\mathcal{H}$ قرار نگیرد.

تعریف ۱-۳-۱۸. گوییم $\{x_i\}_{i \in I}$ یک **پایه متعامد یکه**[۷] است اگر یک مجموعه متعامد یکه ماکسیمال باشد. یعنی یک پایه باشد و در دو شرط زیر صدق کند:

---

[۱] isomorphic

[۲] orthogonal

[۳] orthonormal

[۴] kronecher delta

[۵] complete

[۶] maximal

[۷] orthonormal base