بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

(گرایش کاربردی)

جواب ℓ_1 نامعادلات خطی

از:

اسلام حسینی ریک

استاد راهنما:

دکتر مازیار صلاحی

شهریور ۱۳۸۹

تقدیم به

پدر و مادرم بپاس

زحمات

بی دریغشان

و

همسرم برای همراهی

صبورانه‌اش

تشکر و قدردانی

سپاس و ستایش برای خداست، آن نخستین بی‌آغاز و آن واپسین بی‌انجام. او که دیده بینندگان از دیدنش فرو مانده و اندیشه وصف کنندگان ستودنش نتواند.

این نوشته اگر ارزشی در مجموعه‌ی تلاش‌های تحقیقاتی داشته باشد، مدیون راهنمائی‌ها و همدلی انسان‌های بسیاری است که بدون آنها چارچوب این پژوهش شکل نمی‌گرفت. وظیفه‌ی خود می‌دانم که در این مجال از اساتید گرانقدری که شاگردی در حضورشان سبب افتخار این جانب است سپاسگزاری کنم. قبل از همه از استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر مازیار صلاحی که راهنمائی‌های ارزشمند و دقیق ایشان پیشرفت این مجموعه را برایم آسان نمود، تشکر و قدردانی می‌کنم.

همچنین از اساتید داور آقایان دکتر سعید کتابچی و دکتر محمد کیانپور که زحمت داوری این پایان نامه را کشیده و نظرات ارزنده‌ای در بهبود آن ارائه نمودند کمال تشکر را دارم.

فهرست مطالب

فهرست جدول‌ها

عنوان	صفحه

فهرست شکل‌ها

عنوان صفحه

چکیده

جواب ℓ_1 نامعادلات خطی اسلام حسینی ریک

در این پایان نامه جواب ℓ_1 دستگاه نامعادلات خطی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. با توجه به اینکه این مساله را می‌توان به صورت برنامه ریزی خطی بیان کرد، لذا ابتدا روش‌های نقطه ـ درونی از جمله الگوریتم مهروترا را برای حل آن معرفی می‌کنیم. سپس با معرفی قضیه‌ی جدیدی از نوع جانشینی، یک الگوریتم مقیاس شده‌ی آفینی برای حل این مساله ارائه می‌شود.مثال-های عددی متعددی که نشان از برتری روش مقیاس شده‌ی آفینی در مقایسه با linprog و الگوریتم مهروترا دارد، آورده شده است. همچنین در ادامه مدل توانمند این مساله مورد مطالعه قرار می‌گیرد.جواب حاصل از این مدل نشان از حساسیتآن به تغییرات اندک در داده‌های مساله دارد.

واژه‌های کلیدی: نامعادلات خطی، دستگاه نشدنی، قضیه جانشینی، روش‌های نقطه ـ درونی، الگوریتم مقیاس شده‌ی آفینی،الگوریتم مهروترا، مدل توانمند.

مقدمه

نیاز به حل دستگاه نامعادلات خطی یکی از مسائل بنیادی در بسیاری از کاربردها می‌باشد که حتی ممکن است دستگاه حاصل ناسازگار نیز باشد. از جمله دلایل ناسازگاری می‌تواند خطای اندازه گیری در داده‌های مساله باشد. شاید یکی از شناخته‌ترین کاربردهای این دستگاه‌ها به دست آوردن یک نقطه‌ی شروع شدنی در روش سیمپلکس باشد. از کابردهای مهم دیگر آن می‌توان به استفاده در بازسازی تصاویر پزشکی، مسائل وارون در رادیوتراپی، اقتصاد، مسائل مالی، نفت و غیره اشاره نمود [۴، ۵، ۶ و ۱۸].

در این پایان نامه میزان ناسازگاری دستگاه‌ها را در نرم ℓ_1(نرم یک) مطالعه می‌کنیم که می‌توان آن را به یک مساله برنامه ریزی خطی تبدیل کرد و با روش‌های کلاسیک حل نمود. بدین منظور در فصل یک به مقدماتی از جبرخطی و بهینه سازی پرداخته شده است. در ابتدای فصل دوم مروری مختصر به برنامه ریزی خطی شده و سپس به معرفی روش‌های نقطه ـ درونی در بخش بعدی این فصل پرداخته‌ایم. الگوریتم مهروترا یکی از الگوریتم‌های نقطه ـ درونی پیشرو ـ اصلاح‌گری است که در انتهای این فصل معرفی گردیده است.

فصل سوم را با ارائه قضیه‌ی جدیدی از نوع جانشینی از مقاله‌ی دکس[۱] که به جواب ℓ_1 دستگاه نامعادلات خطی پرداخته است، آغاز نموده‌ایم و سپس الگوریتم مقیاس شده‌ی آفینی از این مقاله را ارائه نموده‌ایم. در پایان این فصل مدل توانمند این مساله را مورد بحث قرار داده‌ایم.

در فصل چهارم نیز به محاسبات و نتایج عددی حاصل از الگوریتم‌های نامبرده در بالا و دستور linprog نرم افزار متلب و مقایسه عملکرد آنها پرداخته‌ایم.

---

[۱] Dax

فصل اول

مقدماتی از جبر خطی

و بهینه سازی

۱-۱ مقدماتی از جبرخطی

در این بخش مقدماتی از جبر خطی بیان می‌شود که در طول پایان نامه از آن استفاده شده است [۱۷و۲۳].

۱-۱-۱ فضای برداری

تعریف ۱-۱-۱-۱: مجموعه‌ی V را همراه با دو عمل جمع (که با علامت + نشان می دهیم) و ضرب اسکالر (که با . نشان می‌دهیم) یک فضای برداری روی میدان F می‌نامیم، هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

۱) عمل + دارای خاصیت شرکت پذیری باشد،

۲) عمل + دارای عضو همانی (عضو خنثی) باشد،

۳) هر عضو در F نسبت به عمل + معکوس (قرینه) داشته باشد، یعنی

$$\forall a \in F\ , \exists \acute{a} \in F \quad a + \acute{a} = \acute{a} + a = 0.$$

۴) عمل + دارای خاصیت جابجایی باشد،

۵) عمل ضرب اسکالر دارای خاصیت عضو همانی باشد، یعنی

$$\forall a \in V \quad 1.a = a.$$

۶) $x_1.(x_2.a) = (x_1.x_2).a \quad \forall x_1, x_2 \in V\ ,\ \forall a \in F$،

۷) $x.(a+b) = x.a + x.b \quad \forall x \in V\ ,\ \forall a, b \in F$،

۸) $(x_1 + x_2).a = x_1.a + x_2.a \quad \forall x_1, x_2 \in V\ ,\ \forall a \in F$.

مثال۱-۱-۱-۲ : هر میدان[1] یک فضای برداری روی خودش است.

مثال ۱-۱-۱-۳ : هرگاه F یک میدان و F^n مجموعه‌ی تمام n-تائی‌های مرتبی به صورت $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ باشد، در این صورت F^n یک فضای برداری روی F است.

مثال ۱-۱-۱-۴ : هرگاه F یک میدان باشد، مجموعه‌ی ماتریس‌های $m \times n$ روی F یک فضای برداری روی F است.

۱-۱-۲ فضاهای نرم دار

تعریف ۱-۱-۲-۱ : اگر V یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ باشد، آنگاه تابع $\|.\|: V \to \mathbb{R}$ یک نرم در V نامیده می‌شود هرگاه در خواص زیر صدق کند:

۱) $\forall t \in V \quad \|t\| \geq 0\ ,\ \|t\| = 0 \Leftrightarrow t = 0$،

۲) $\forall t \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \|\alpha t\| = |\alpha| \|t\|$،

۱.برای آشنایی با تعاریف وابسته به میدان مرجع [۱۷] را ببینید.

۳) $\|s+t\| \leq \|s\| + \|t\| \quad \forall t, s \in V$.

فضای برداری دارای نرم را فضای نرم دار می‌نامند.

تعریف ۱-۱-۲-۲ : (نرم یک یا ℓ_1) برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

تعریف ۱-۱-۲-۳ : نرم-۲ یا ℓ_2 (نرم اقلیدسی) برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\|x\|_2 = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

تعریف ۱-۱-۲-۴: نرم-∞ یا ℓ_∞ (نرم ماکسیمم) برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

تعریف ۱-۱-۲-۵ : فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد. نرم ماتریس A یک عدد حقیقی است که دارای خواص زیر می‌باشد:

۱) $\|A\| \geq 0$ و $\|A\| = 0$ اگر و تنها اگر A ماتریس صفر باشد.

۲) برای هر اسکالر α داشته باشیم:

$$\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|.$$

۳) برای ماتریس‌های A و B داشته باشیم:

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

قضیه ۱-۱-۲-۶ :

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{i\,j}| \,,$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{m} |a_{i\,j}| \,,$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}.$$

(λ_{max} ماکسیمم مقدار ویژه‌ی ماتریس A^TA است. مقادیر ویژه‌ی A^TA حقیقی و نامنفی‌اند).

برهان : به [۸] رجوع شود. ■

قضیه ۱-۱-۲-۷ : برای هر بردار $x \in \mathbb{R}^n$ روابط زیر برقرار است:

۱) $\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|_2$،

۲) $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty$،

۳) $\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty$.

برهان : به [۸] رجوع شود. ■

قضیه ۱-۱-۲-۸ : برای ماتریس $m \times n$ ، A داریم:

۱) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \le \|A\|_2 \le \sqrt{m}\|A\|_\infty$،

۲) $\frac{1}{\sqrt{m}}\|A\|_1 \le \|A\|_2 \le \sqrt{n}\|A\|_1$،

برهان : به [۸] رجوع شود. ■

۱-۱-۳ تجزیه‌ی طیفی ماتریس

عدد λ یک مقدار ویژه‌ی ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ است اگر بردار غیر صفر v وجود داشته باشد به طوری که

$$Av = \lambda v,$$

که بردار v بردار ویژه‌ی A متناظر با λ نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۱-۳-۱ : ماتریس $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ را متعامد گویند هرگاه

$$Q^TQ = I\,, QQ^T = I.$$

قضیه ۱-۱-۳-۲ : فرض کنید ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ متقارن باشد، آنگاه ماتریس متعامد $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ وجود دارد به طوری که

$$Q^TAQ = P,$$

که در آن $P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ و $n, \dots, i = 1,2$ ، λ_i به ازای $i = 1,2, \dots n$ ، مقادیر ویژه‌ی A هستند.

تجزیه‌ی طیفی ماتریس متقارن A برابر است با:

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, q_i q_i^T.$$

برهان : به [۸] رجوع شود. ■

تعریف ۱-۱-۳-۳ : ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ را معین مثبت گویند اگر برای هر x غیر صفر در $\mathbb{R}^n$ داشته باشیم:

$$x^T A x > 0.$$

اگر در تعریف بالا $x^T A x \geq 0$ ، آنگاه A را نیمه معین مثبت گویند.

مثال ۱-۱-۳-۴ : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ معین مثبت است زیرا به ازای هر x غیر صفر در $\mathbb{R}^2$ داریم:

$$x^T A x = [x_1 x_2] \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 3x_1^2 + 2x_1 x_2 + 4x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + 2x_1^2 + 3x_2^2 > 0.$$

قضیه ۱-۱-۳-۵ : ماتریس مربعی A معکوس پذیر است اگر و تنها اگر به ازای هر $x \neq 0$ داشته باشیم :

$$Ax \neq 0.$$

برهان : به [۸] رجوع شود.■

قضیه ۱-۱-۳-۶ : هر ماتریس معین مثبت معکوس پذیر است.

برهان : فرض کنیم A یک ماتریس معین مثبت باشد که معکوس پذیر نیست. لذا با توجه به (۱-۱-۳-۵) ، x غیر صفری در $\mathbb{R}^n$ موجود است به طوری که $Ax = 0$ در نتیجه $x^T A x = 0$ که این با معین مثبت بودن A در تناقض است.■

تعریف ۱-۱-۳-۷ : فرض کنیم A یک ماتریس $m \times n$ باشد، زیرفضای تولید شده توسط بردارهای سطری A را زیرفضای سطری و زیرفضای تولید شده توسط بردارهای ستون‌های A را زیرفضای ستونی A می‌گویند.

تعریف ۱-۱-۳-۸: بعد زیرفضای سطری را رتبه‌ی سطری و بعد زیرفضای ستونی را رتبه‌ی ستونی ماتریس A می نامند.

تعریف ۱-۱-۳-۹ : ماتریس A را رتبه کامل سطری (ستونی) گویند، هرگاه سطرهای (ستون‌های) A مستقل خطی باشند.

تعریف ۱-۱-۳-۱۰ : ماتریس A را رتبه کامل گویند، هرگاه A رتبه‌ی سطری کامل یا رتبه‌ی ستونی کامل باشد، یعنی A رتبه کامل است هرگاه $rank(A) = \min\{m, n\}$.

قضیه ۱-۱-۳-۱۱: اگر A یک ماتریس $m \times n$، $(n \geq m)$،و رتبه کامل باشد آنگاه $A^T A$ معین مثبت است.

برهان : به [۸] رجوع شود. ■

قضیه ۱-۱-۳-۱۲ : مقادیر ویژه‌ی ماتریس متقارن حقیقی A ، همگی حقیقی‌اند.

برهان : به [۸] رجوع شود. ■

قضیه ۱-۱-۳-۱۳ : مقادیر ویژه‌ی یک ماتریس حقیقی معین مثبت، همگی مثبت‌اند.

برهان : به [۸] رجوع شود. ■

۱-۲ فضاهای ضرب داخلی

تعریف ۱-۲-۱ : فرض می‌کنیم V یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ باشد. منظور از ضرب داخلی روی V ، نگاشتی است به صورت $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ که $f(x, y)$ را با $< x, y >$ یا $x.y$ نشان می‌دهیم و دارای خواص زیر است:

۱) $< x + y, z > =< x, z > +< y, z >$ $\forall x, y, z \epsilon V$ ،

۲) $< \alpha x, y > = \alpha < x, y >$ $\forall x, y \epsilon V , \forall \alpha \in \mathbb{R}$ ،

۳) $< x, y > = < y, x >$ $\forall x, y \epsilon V$,.

۴) $\forall x \epsilon V , < x, x > \geq 0 , \ < x, x > = 0 \iff x = 0$.

مثال ۱-۲-۲ : می‌دانیم که $\mathbb{R}^n$ یک فضای برداری است. برای دو عضو x و y در $\mathbb{R}^n$ داریم:

$$< x, y > = x.y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

تعریف ۱-۲-۳ : دو بردار x و y در فضای حاصل ضرب داخلی V متعامد نامیده می‌شوند اگر $< x, y > = 0$.

تعریف ۱-۲-۴ : یک زیر مجموعه‌ی غیر تهی از بردارهای غیر صفر مانند S از فضای برداری V را متعامد گویند هرگاه هر دو عضو متمایز S بر هم عمود باشند.

تعریف ۱-۲-۵ : زیر مجموعه‌ی S از زیرفضای V را یکا متعامد می‌نامند، هرگاه S متعامد و داشته باشیم :

$$\forall x \in S \quad \|x\| = 1.$$

مثال ۱-۲-۶ : پایه‌های متعارف $\mathbb{R}^n$ زیر مجموعه‌ی یکا متعامداند.

در صورت نیاز می‌توان از هر مجموعه‌ی متعامد یک مجموعه‌ی یکا متعامد به دست آورد. این کار با در نظر گرفتن بردارهای $x^* = \frac{x}{\|x\|}$ حاصل می‌شود.

قضیه ۱-۲-۷ : مجموعه‌های متعامد مستقل خطی‌اند.

برهان: فرض کنید S یک زیر مجموعه‌ی متعامد از V، $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$ و $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 0$ که در آن $c_i \in \mathbb{R}, i = 1,2, \dots, n$ در این صورت به ازای $i = 1,2, \dots, n$ داریم:

$$0 =< \sum_{k=1}^{n} c_k x_k \, , x_i > = \sum_{k=1}^{n} c_k < x_i, x_k > = c_i < x_i, x_i >.$$

با توجه به اینکه $< x_i, x_i >$ غیر صفر است باید داشته باشیم :

$$c_i = 0 \, , i = 1,2, \dots, n$$

یعنی S مستقل خطی است. ■

نتیجه ۱-۲-۸ : هر مجموعه‌ی متعامد یکه مستقل خطی است.

۱-۳ دستگاه معادلات خطی

دستگاه معادلات خطی نقش مهمی در ریاضیات و در بسیاری از علوم مانند فیزیک، اقتصاد، زیست شناسی، مهندسی، ... ایفا می‌کند[۱۷و۲۳].

یک دستگاه از m معادله خطی با n متغیر $x_1, x_2, \dots, x_n$ به صورت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} a_{1\,1}x_1 + a_{1\,2}x_2 + \cdots + a_{1\,n}x_n = b_1 \\ a_{2\,1}x_1 + a_{2\,2}x_2 + \cdots + a_{2\,n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m\,1}x_1 + a_{m\,2}x_2 + \cdots + a_{m\,n}x_n = b_m \end{cases} \tag{۱-۱}$$

mn ضریب $a_{i\,j}$ و m اسکالر b_k اعداد معلومی در نظر گرفته می‌شوند.دستگاه (۱-۱) را دستگاه خطی و nـ تایی مرتب $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ که مولفه‌های x_i در (۱-۱) صدق می‌کنند را جواب دستگاه می‌نامیم. شکل ماتریسی (۱-۱) به صورت $Ax = b$ می‌باشد یعنی

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \cdots & a_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m\,1} & a_{m\,2} & \cdots & a_{m\,n} \end{pmatrix}.$$

تعریف ۱-۳-۱ : اگر دستگاه (۱-۱) دست کم یک جواب داشته باشد، دستگاه را سازگار و اگر جوابی نداشته باشد، آن را ناسازگار گویند.

تعریف ۱-۳-۲ : در دستگاه (۱-۱) اگر $b = 0$ آنگاه دستگاه همگن در غیر این صورت نا همگن نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۳-۳ : در دستگاه (۱-۱) اگر A یک ماتریس $m \times n$ و $m > n$ ، آنگاه آن را فرا معین گویند، یعنی تعداد معادلات این دستگاه بیشتر از مجهولات آن است.

قضیه ۱-۳-۴ : $Ax = b$ سازگار است اگر $b \in R(A)$ ، به عبارت دیگر $rank(A) = rank(A, b)$.

($R(A) = \{b \in \mathbb{R}^m : \exists x \in \mathbb{R}^n \ , \ Ax = b\}$).

برهان : به [۸] رجوع شود. ■

قضیه ۱-۳-۵ :

۱) دستگاه $Ax = 0$ جواب غیر بدیهی دارد اگر و تنها اگر ستون های A وابسته‌ی خطی باشند.

۲) هر گاه دستگاه $Ax = 0$ جواب غیر بدیهی داشته باشد آنگاه بی شمار جواب خواهد داشت.

۳) اگر $m = n$ ، آنگاه $Ax = 0$ جواب غیر بدیهی دارد اگر و تنها اگر A منفرد باشد.

برهان : به [۸] رجوع شود. ■

قضیه ۱-۳-۶ : جواب دستگاه شدنی $Ax = b$ تحت هر کدام از عملیات زیر تغییر نمی‌کند.

۱) تعویض جای دو معادله،

۲) ضرب هر معادله در یک ضریب غیر صفر،

۳) جمع هر مضرب غیر صفری از یک معادله با معادله دیگر.

برهان : به [۸] رجوع شود.■

تعریف ۱-۳-۷ : هر دو دستگاه که یکی از دیگری با عملیات بالا تولید شده باشد را دستگاه‌های معادل می‌نامند.

نکته ۱-۳-۸ : مجموعه‌ی جواب‌های دستگاه‌های معادل یکسان است.

۱- ۴ توابع و مجموعه‌های محدب

۱-۴-۱ مجموعه‌های محدب

تعریف ۱-۴-۱-۱ : مجموعه‌ی S را در $\mathbb{R}^n$ محدب گویند اگر به ازای هر $x_1, x_2 \in S$ و هر عدد حقیقی λ ، $\lambda \in [0\,,1]$ داشته باشیم:

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S.$$

این تعریف را می‌توان به طریق هندسی چنین تعبیر کرد، یک مجموعه محدب است اگر با انتخاب هر دو نقطه از آن مجموعه، هر نقطه روی خط واصل بین آن دو نقطه عضوی از آن مجموعه باشد.

لم ۱-۴-۱-۲ : اگر S_1 و S_2 دو زیر مجموعه‌ی محدب از $\mathbb{R}^n$ باشند، آنگاه مجموعه‌های زیر محدب‌اند.

۱) $S_1 \cap S_2$ ،

۲) $S_1 \oplus S_2 = \{x_1 + x_2 :\ x_1 \in S_1\,, x_2 \in S_2\}$ ،

۳) $S_1 \ominus S_2 = \{x_1 - x_2 :\ x_1 \in S_1\,, x_2 \in S_2\}$.

مثال ۱-۴-۱-۳ : مجموعه‌های زیر محدب‌اند.

۱) $S = \{x :\ P^T x = \alpha\}$ ،

که در آن P یک بردار غیر صفر و α یک اسکالر می‌باشد.

۲) $S = \{x : Ax \leq b\}$،

که A یک ماتریس $m \times n$ و b یک بردار m تایی است.

۳) $S = \{y : y = min\,\{c^T x : Ax = b\,,\ x \geq 0\}\}$.

۱-۴-۲ توابع محدب

تعریف ۱-۴-۲-۱ : فرض کنید S زیر مجموعه‌ای محدب و نا تهی در $\mathbb{R}^n$ باشد، تابع $f: S \to \mathbb{R}$ را بر S محدب گویند اگر به ازای هر $x_1, x_2 \in S$ و هر $\lambda \in (0,1)$ داشته باشیم:

$$f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

اگر نا مساوی بالا اکید باشد به تابع f اکیداً محدب می‌گویند. همچنین تابع f را یک تابع مقعر نامند هرگاه تابع $g = -f$ محدب باشد.

مثال ۱-۴-۲-۲ : تابع $f(x) = \|Ax - b\|^2$ روی مجموعه‌ی $\mathbb{R}^n$ محدب است.

حل: اگر $x_1\,, x_2 \in \mathbb{R}^n$ ، $\lambda \in (0,1)$ و قرار دهیم $z = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ داریم:

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) - f(z)$$

$$= (\lambda - \lambda^2)\big(\|Ax_1 - b\|^2 + \|Ax_2 - b\|^2 - 2(Ax_1 - b)^2(Ax_2 - b)\big)$$

$$= (\lambda - \lambda^2)\|Ax_1 - Ax_2\|^2 \geq 0$$

که در آن $\|.\|$ نرم اقلیدسی است.

تعریف ۱-۴-۲-۳ : فرض کنیم $a \in \mathbb{R}$ در این صورت داریم:

$$(a)_+ = \max\{a\,, 0\}.$$

۱-۵ شرایط کاروش-کان- تاکر[۱] (KKT)

مساله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

[۱] Karush-Kuhn-Tucker