بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی گرایش جبر

عنوان:

ایده‌ال های خطی مولفه‌ای

استاد راهنما:
دکتر شیرویه پیروی

استاد مشاور:
دکتر محمد اخوی زادگان

توسط:
خدیجه دوست صمغی

مهر ۱۳۸۸

کلیه حقوق مادی مرتبط و نتایج
مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی
از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به
دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره) است.

تشکر و قدردانی

خاطرات هر چند زیبا به قاب فراموشی سپرده می‌شوند، اما آنچه آموختیم و آنکه به ما آموخت هرگز از یاد و خاطرمان نخواهند رفت.

از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر پیروی که در طی این پروژه رهنمودهای ایشان گره گشای کارم بود، صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایم.

از استاد گرامی جناب آقای دکتر اخوی زادگان که مشاوره این پایان‌نامه را به عهده داشته‌اند، سپاسگزارم.

همچنین، از عزیزان و همراهانی که بودنشان، امید من برای ادامه این راه بود، تشکر می‌نمایم.

اگر شایسته تقدیم باشد به

پدر و مادر عزیزم

چکیده

ایده‌آل مدرج I از حلقه چندجمله‌ای را ایده‌آل خطی مولفه‌ای نامیم، هرگاه برای هر q، ایده‌آل تولید شده توسط چندجمله‌ای‌های از درجه q متعلق به I، تحلیل خطی داشته باشد. ایده‌آل‌های پایدار و $Gotzmann$ مثال‌هایی از ایده‌آل‌های خطی مولفه‌ای هستند. در این پایان‌نامه نشان می‌دهیم که اعداد بتی یک ایده‌آل خطی مولفه‌ای را می‌توان توسط اعداد بتی مولفه‌های آن محاسبه کرد. همچنین ایده‌آل‌های خطی مولفه‌ای بدون مربع را بررسی می‌کنیم. ثابت می‌شود ایده‌آل $Stanley - Reisner$، I_Δ حاصل از مجتمع سادکی Δ خطی مولفه‌ای است اگر و تنها اگر Δ به‌طور دنباله‌ای کوهن $-$ مکولی باشد. این نتیجه تعمیمی از قضیه ایگن و ری آینر است که بیان می‌کند ایده‌آل $Stanley - Reisner$ از یک مجتمع سادکی تحلیل خطی دارد اگر و تنها اگر دوگان آن کوهن $-$ مکولی باشد.

فهرست مندرجات

پیشگفتار

فرض کنید $A = K[X_1, \dots, X_n]$ حلقه چندجمله‌ای با n متغیر روی میدان K باشد که در آن برای هر $i = 1, \dots, n$، $degX_i = 1$. فرض کنید I یک ایده‌آل مدرج از حلقه A باشد. هدف این پایان نامه، محاسبه اعداد بتی مدرج $\beta_{i,j} = \beta_{i,j}(I)$ است که در تحلیل آزاد مینیمال I روی A

$$0 \longrightarrow \oplus_{j\in\mathbb{Z}} A(-j)^{\beta_{h,j}} \longrightarrow \dots \longrightarrow \oplus_{j\in\mathbb{Z}} A(-j)^{\beta_{0,j}} \longrightarrow I \longrightarrow 0$$

ظاهر می‌شوند.

الیاهو[1] و کرویر [2] در [۱۴] یک تحلیل آزاد مینیمال ساختند و با استفاده از آن، اعداد بتی ایده‌آل‌های تک‌جمله‌ای پایدار را محاسبه کردند. با استفاده از این محاسبات بیگاتی [3] در [۶] و هالت [4] در [۲۲] کران‌های بالای اعداد بتی ایده‌آل‌های مدرج با یک تابع هیلبرت را مورد بحث قرار دادند. همچنین، کارهایی مشابه در مورد ایده‌ال‌های بدون مربع در [۲] و [۳] و [۶] و [۱۴] و [۲۲] مورد مطالعه قرار گرفته است.

ایده‌آل خطی مولفه‌ای اولین بار توسط هرزگ [5] و هبی [6] در [۱۷]، مقاله اصلی این پایان نامه، معرفی شده است. در بخش هفتم از فصل اول، تحلیل خطی برای یک ایده‌آل را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

تعریف. ایده‌آل مدرج I تحلیل خطی دارد، هرگاه عدد صحیح $m \geq 0$ موجود باشد به‌طوری‌که برای

---

[1] $Eliahou$

[2] $Kervaire$

[3] $Bigatti$

[4] $Hullet$

[5] $Herzog$

[6] $Hibi$

هر $j \neq m$، $\beta_{i,i+j} = 0$.

با توجه به تعریف تحلیل خطی، ایده‌آل خطی مولفه‌ای را چنین تعریف می‌کنیم

تعریف. ایده‌آل مدرج $I \subset A$ خطی مولفه‌ای است، هرگاه برای هر j، ایده‌ال تولید شده توسط چندجمله‌ای‌های از درجه j در I تحلیل خطی داشته باشند.

همچنین نشان می‌دهیم اعداد بتی یک ایده‌آل خطی مولفه‌ای را می‌توان توسط اعداد بتی مدرج مولفه‌های آن محاسبه کرد.

قضیه. فرض کنید $I \subset A$ ایده‌آل مدرج خطی مولفه‌ای باشد. در این صورت برای هر j داریم

$$\beta_{i,i+j}(I) = \beta_i(I_{<j>}) - \beta_i(\mathfrak{m}I_{<j-1>})$$

از قضیه فوق نتیجه مهم زیر در مورد ایده‌آل $Gotzmann$ بدست می‌آید

نتیجه. فرض کنید I ایده‌آل مدرج باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند

۱) I ایده‌آل $Gotzmann$ است.

۲) برای هر i و j، $\beta_{i,i+j}(I) = \beta_{i,i+j}(I^{lex})$.

۳) برای هر i، $\beta_i(I) = \beta_i(I^{lex})$.

در فصل دوم این پایان‌نامه، مجتمع سادکی را تعریف می‌کنیم.

تعریف. فرض کنید $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ مجموعه رأس‌ها باشد. مجتمع سادکی Δ روی مجموعه رأس‌های $[n]$، مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های $[n]$ است به‌طوری‌که

۱) اگر $G \in \Delta$ و $F \subset G$، آن‌گاه $F \in \Delta$.

۲) برای هر $i = 1, \ldots, n$ داشته باشیم $\{i\} \in \Delta$.

در بخش سوم، حلقه $Stanley - Reisner$ و ایده‌آل وابسته به مجتمع سادکی Δ، I_Δ، را تعریف می‌کنیم. در بخش پنجم، دوگان مجتمع سادکی Δ را چنین تعریف می‌کنیم $\Delta^* = \{[n] - F : F \notin \Delta\}$.

ایگن [۷] و ری‌آینر [۸] در [۹] قضیه زیر را برای ایده‌ال وابسته به یک مجتمع سادکی ثابت کردند.

قضیه. I_Δ تحلیل خطی دارد اگر و تنها اگر Δ^* روی K کوهن − مکولی باشد.

هدف اصلی در فصل دوم تعمیم قضیه فوق است. این تعمیم در قضیه اصلی در بخش هشتم به‌صورت زیر بیان می‌شود.

قضیه. ایده‌آل $I_\Delta \subset A$ وابسته به مجتمع سادکی Δ، خطی مولفه‌ای است اگر و تنها اگر برای هر q، $\Delta^*(q)$ کوهن − مکولی باشد.

این پایان نامه، با قضیه زیر به پایان می‌رسد

قضیه. فرض کنید Δ مجتمع سادکی محض از بعد $d-۱$ با $f-$ بردار $(f_۰, f_۱, \ldots, f_{d-۱})$ باشد و فرض کنید $\partial_{d-۱}(f_{d-۱}) = f_{d-۲}$. در این صورت Δ روی هر میدان دلخواه کوهن − مکولی است.

در سراسر این پایان‌نامه، حلقه جابجایی و یکدار است.

این پایان‌نامه بر اساس مقاله زیر است:

[1] Herzog J. and Hibi T., Componentwise Linear Ideals, Nagoya Math. J. Vol. 153 (1999), 141-153.

[۷] $Eagon$

[۸] $Reiner$

فصل ۱

ایده‌آل خطی مولفه‌ای

در بخش‌های اول تا پنجم در این فصل، تعاریف و قضیه‌هایی از مفاهیم حلقه مدرج، ایده‌آل مدرج، همبافت، تابع هیلبرت، جبر بیرونی و همبافت کزول را بیان می‌کنیم که این تعاریف و قضیه‌ها در بخش‌های بعد استفاده خواهند شد. در بخش ششم، مفهوم تحلیل آزاد مینیمال یک ایده‌آل را بررسی می‌کنیم. در بخش هفتم، ایده‌آل خطی مولفه‌ای را تعریف می‌کنیم و قضیه مهمی را در مورد اعداد بتی مدرج یک ایده‌آل خطی مولفه‌ای بیان و اثبات می‌کنیم. در بخش پایانی، ایده‌آل خطی مولفه‌ای بدون مربع را تعریف می‌کنیم و قضیه‌هایی را بیان و اثبات می‌کنیم.

۱.۱ حلقه مدرج

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید R یک حلقه باشد. R را حلقه $\mathbb{Z}-$ مدرج نامیم، هرگاه خانواده $\{R_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ از زیرگروه‌های R موجود باشد به‌طوری‌که

۱) $R= \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n$.

۲) برای هر m و n، $R_n.R_m \subseteq R_{m+n}$.

حلقه R را $\mathbb{N}-$ مدرج گوییم، هرگاه برای هر $n \leq 0$، $R_n = 0$.

عنصر ناصفر $x \in R_n$ را همگن از درجه n می‌نامیم.

توجه ۲.۱.۱ اگر $R = \bigoplus_n R_n$ حلقه مدرج باشد، در این صورت R_0 زیرحلقه‌ای از R است و برای هر n، R_n یک R_0- مدول است. چون $R_0.R_0 \subseteq R_0$، پس R_0 نسبت به ضرب بسته است. نشان می‌دهیم $1 \in R_0$. قرار دهید $\sum_n X_n = 1$ که در آن هر $X_n \in R_n$ و جز تعداد متناهی، تمام X_n ها صفرند. لذا برای هر i،

$$X_i = 1.X_i = \sum_n X_i X_n$$

با مقایسه درجه‌ها، نتیجه می‌گیریم برای هر i، $X_i = X_i.X_0$. لذا

$$X_0 = 1.X_0 = \sum_n X_n X_0 = \sum_n X_n = 1$$

بنابراین $1 = X_0 \in R_0$. پس R_0 زیرحلقه‌ای از R است.

اگر R یک حلقه باشد، R را می‌توان به یک حلقه مدرج (با درجه‌بندی بدیهی) تبدیل کرد. قرار دهید $R = R_0$ و برای هر $n \neq 0$، $R_n = 0$.

مثال ۳.۱.۱ فرض کنید R حلقه و X یک متغیر مستقل روی R باشد. قرار می‌دهیم $A = R[X]$. با درجه‌بندی $A_0 = R$ و $A_n = \{rX^n : r \in R\}$، حلقه A یک حلقه مدرج است.

مثال ۴.۱.۱ فرض کنید R حلقه و $X_1, \ldots, X_d$ متغیرهای مستقل روی R باشند. برای $m = (m_1, \ldots, m_d) \in \mathbb{N}^d$، قرار می‌دهیم $X^m = X_1^{m_1} \ldots X_d^{m_d}$. در این صورت حلقه

چندجمله‌ای $A = R[X_1, \ldots, X_d]$ که در آن برای هر i، $degX_i = 1$ یک حلقه مدرج است و برای هر n،

$$A_n = \{ \sum_{m \in \mathbb{N}_d} r_m X^m | \; r_m \in R \; , \; m_1 + \ldots + m_d = n \}$$

واضح است $A_0 = R$.

درجه‌بندی فوق را درجه‌بندی استاندارد می‌گوییم.

حلقه A را به طریق زیر نیز می‌توان مدرج کرد. فرض کنید $(a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{Z}^d$. قرار می‌دهیم

$$A_n = \{ \sum_{m \in \mathbb{N}_d} r_m x^m | \; r_m \in R \; , \; m_1 a_1 + \ldots + m_d a_d = n \}$$

در این صورت حلقه چندجمله‌ای $A = R[X_1, \ldots, X_d]$ که در آن برای هر i، $degX_i = a_i$ یک حلقه مدرج است.

مثال ۵.۱.۱ فرض کنید $A = K[X, Y, Z]$ (K میدان) و $F = X^3 + YZ \in A$. طبق درجه‌بندی استاندارد، X^3 و YZ مولفه‌های همگن هستند. اگر $degX = 3$ و $degY = 4$ و $degZ = 5$، آن‌گاه عنصر F همگن از درجه ۹ است.

تعریف ۶.۱.۱ فرض کنید $S = \oplus_{n \in \mathbb{Z}} S_n$ حلقه مدرج باشد. زیرحلقه R از S را مدرج نامیم، هرگاه $R = \oplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$ که در آن $R_n = R \cap S_n$.

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنید R حلقه مدرج و M یک $R-$ مدول باشد. M را یک $R-$ مدول مدرج نامیم، هرگاه خانواده $\{M_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ از زیرگروه‌های M موجود باشد به‌طوری‌که

۱) $M = \bigoplus_n M_n$

۲) برای هر m و n، $R_n.M_m \subseteq M_{n+m}$.

قضیه ۸.۱.۱ فرض کنید $\{M_n\}_n$ خانواده‌ای از $R-$ مدول‌های مدرج باشد. در این صورت $\oplus_n M_n$ یک $R-$ مدول مدرج است.

برهان. ۱) برای هر i و j، داریم $R_i.(\oplus_n M_n)_j = \oplus_n R_i.(M_n)_j \subseteq \oplus_n (M_n)_{i+j}$.

۲) چون برای هر n، M_n مدرج است، لذا $M_n = \oplus_i (M_n)_i$. در نتیجه

$$\oplus_n M_n = \oplus_n \oplus_i (M_n)_i = \oplus_i (\oplus_n M_n)_i$$

بنابراین $\oplus_n M_n$ یک $R-$ مدول مدرج است. □

بنابراین برای هر $n \geq ۱$، $R^n = R \oplus \ldots \oplus R$ (n بار) یک $R-$ مدول مدرج است.

فرض کنید R حلقه مدرج و M یک $R-$ مدول باشد. اگر مدول مدرج M را دوباره درجه‌بندی کنیم، آن‌گاه $R-$ مدول مدرج جدیدی حاصل می‌شود. فرض کنید $n, k \in \mathbb{Z}$. قرار دهید $(M(n))_k = M_{n+k}$. در این صورت $M(n)$ یک $R-$ مدول مدرج است.

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنید $M = \oplus_n M_n$ یک $R-$ مدول مدرج و N یک زیرمدول M باشد. برای هر $n \in \mathbb{Z}$ قرار می‌دهیم $N_n = N \cap M_n$. اگر خانواده $\{N_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$، N را به یک $R-$ مدول مدرج تبدیل کند، آن‌گاه N را زیرمدول مدرج (همگن) M گوییم.

چون برای هر n و m، $R_n.N_m \subseteq N_{n+m}$، بنابراین برای مدرج بودن N کافیست شرط اول برقرار باشد. به عبارت دیگر، N مدرج است اگر و تنها اگر $N = \oplus_n N_n$.

قضیه ۱۰.۱.۱ فرض کنید R حلقه مدرج، M یک $R-$ مدول مدرج و N یک زیرمدول M باشد. در این صورت $\sum_n N \cap M_n$ یک زیرمدول مدرج M است.

برهان. چون برای هر $i \neq j$، $M_i \cap M_j = \circ$، لذا برای هر $i \neq j$، $(M_i \cap N) \cap (M_j \cap N) = \circ$. پس $\sum_n N \cap M_n$ یک جمع مستقیم است. یعنی $\sum_n N \cap M_n = \oplus_n (N \cap M_n)$. همچنین برای هر $i \neq j$،

$$R_i.(M_j \cap N) = R_i.M_j \cap N \subseteq M_{i+j} \cap N$$

در نتیجه $\sum_n N \cap M_n$ یک زیرمدول مدرج M است. □

قضیه ۱۱.۱.۱ فرض کنید R حلقه مدرج، M یک $R-$ مدول مدرج و N یک زیرمدول M باشد. در این صورت گزاره‌های زیر هم‌ارزند

۱) N یک $R-$ مدول مدرج است.

۲) $N = \sum_n N \cap M_n$

۳) برای هر $u \in N$، تمام مولفه‌های همگن u در N قرار دارند.

۴) N یک مجموعه مولد از عناصر همگن را دارد.

برهان. ۱ $\Rightarrow$ ۲: طبق قضیه قبل، واضح است.

۴ $\Rightarrow$ ۳: واضح است.

۲ $\Rightarrow$ ۴: فرض کنید $N^* = \sum_n N \cap M_n$ و $S = \{u_\lambda\}$ یک مجموعه مولد از عناصر همگن برای N باشد. پس $S \subset N^*$. بنابراین $N^* \subseteq N \subseteq \sum_\lambda Ru_\lambda \subseteq N^*$. در نتیجه $N = N^*$.

۳ $\Rightarrow$ ۱: فرض کنید $N = \oplus_n N_n$ و $u \in N$. در این صورت $u = \sum_n u_n$ که در آن برای هر n، $u_n \in N_n$ و چون $N_n = M_n \cap N$، پس برای هر n، $u_n \in N$ و چون $u_n \in M_n$، لذا همگن است. بنابراین برای هر n، $u_n \in N$، پس تمام مولفه‌های همگن u در N قرار دارند. □

ایده‌آل I از حلقه مدرج R، مدرج (همگن) است اگر و تنها اگر دارای مجموعه مولدی با عناصر همگن باشد.

برای مثال، فرض کنید $R = K[X,Y,Z]$ حلقه مدرج با درجه‌بندی استاندارد باشد. ایده‌آل $I =< X^۲, X^۳ + yz^۲, Z^۳ >$ یک ایده‌آل همگن است، اما $J =< X^۲ + Y^۳Z >$ همگن نیست.

قضیه ۱۲.۱.۱ فرض کنید R حلقه مدرج، M یک $R-$ مدول مدرج و N یک زیرمدول مدرج M باشد. دراین صورت M/N با درجه‌بندی زیر یک $R-$ مدول مدرج است.

$$(\frac{M}{N})_n = \frac{M_n+N}{N} = \{m + N : m \in M_n\}$$

برهان. بوضوح $\{(M/N)_n\}_n$ خانواده‌ای از زیرگروه‌های M/N است و

$$R_k.(\frac{M}{N})_n = R_k.\frac{M_n + N}{N} \subseteq \frac{M_{n+k} + N}{N} = (\frac{M}{N})_{n+k}$$

حال نشان می‌دهیم برای هر i و j که $i \neq j$، $(M/N)i \cap (M/N)_j = \emptyset$. فرض کنید $x + N \in (M/N)i \cap (M/N)_j$. در این صورت $x \in M_i \cap M_j$ و این تناقض است. بنابراین $M/N = \oplus_i(M/N)_i$. □

تعریف ۱۳.۱.۱ فرض کنید R یک حلقه مدرج و M و N دو $R-$ مدول مدرج باشند. فرض کنید $f : M \longrightarrow N$ یک $R-$ همریختی باشد. f را همگن از درجه d نامیم، هرگاه برای هر $n \in \mathbb{Z}$، $f(M_n) \subseteq N_{n+d}$.

مثال ۱۴.۱.۱ فرض کنید R حلقه مدرج باشد و $r \in R_d$. در این صورت $f : R \longrightarrow R$ با ضابطه $f(x) = rx$ یک $R-$ همریختی از درجه d است.

توجه ۱۵.۱.۱ اگر $f : M \longrightarrow N$ یک $R-$ همریختی از درجه d باشد، آن‌گاه $f : M(-d) \longrightarrow N$ همگن از درجه صفر است.

چون $f : M \longrightarrow N$ همگن از درجه d است، لذا برای هر n، $f(M_n) \subseteq N_{n+d}$. داریم $M(-d)_n = M_{n-d}$. پس $f(M(-d)_n) = f(M_{n-d}) \subseteq N_{n-d+d} = N_n$. یعنی f همگن از درجه صفر است.

قضیه ۱۶.۱.۱ اگر $f : M \longrightarrow N$ همریختی همگن از $R-$ مدول‌های مدرج باشد، آن‌گاه $Kerf$ زیرمدول مدرج M و Imf زیرمدول مدرج N است.

برهان. اگر $x \in Kerf$، آن‌گاه $x \in M$. در نتیجه $x = \sum_i x_i$ که در آن برای هر i، $x_i \in M_i$. لذا $\circ = f(x) = \sum_i f(x_i)$. در نتیجه برای هر i، $f(x_i) = \circ$. پس $x_i \in Kerf$. بنابراین برای هر $x \in Kerf$، تمام مولفه‌های همگن x در $Kerf$ قرار دارند. یعنی $Kerf$ زیرمدول مدرج M است. همچنین $Im(f) \cong M/Kerf$. لذا طبق قضیه ۱۲.۱.۱، Imf زیرمدول مدرج N است. $\square$

۲.۱ همبافت

تعریف ۱.۲.۱ همبافت $C_\bullet$ روی حلقه R، دنباله $C_\bullet = \{C_i, \partial_i\}$ از $R-$ مدول‌های C_i و همریختی‌های $\partial_i : C_i \longrightarrow C_{i-1}$ است به طوری که $\partial_i \partial_{i+1} = \circ$ و آن را با

$$C_\bullet : \ldots \longrightarrow C_{i+1} \xrightarrow{\partial_{i+1}} C_i \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1} \longrightarrow \ldots$$

نشان می‌دهیم.

چون $\partial_i \partial_{i+1} = \circ$، پس $Im\partial_{i+1} \subseteq Ker\partial_i$. $i-$ امین گروه همولوژی $C_\bullet$ را با نماد $H_i(C_\bullet)$ نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم

$$H_i(C_\bullet) = \frac{Ker\partial_i}{Im\partial_{i+1}}$$

توجه ۲.۲.۱ فرض کنید

$$C_\bullet : \ldots \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2} \longrightarrow \ldots$$

یک همبافت از $R-$ مدول‌های مدرج با همریختی‌های همگن باشد. در این صورت برای هر i، همولوژی مدول $H_i(C_\bullet)$ مدرج است.

می‌دانیم $H_i(C_\bullet) = Ker\partial_i / Im\partial_{i+1}$ و چون $Ker\partial_i$ و $Im\partial_{i+1}$ زیرمدول‌های همگن هستند، لذا طبق قضیه ۱۲.۱.۱، $H_i(C_\bullet)$ مدرج است.

تعریف ۳.۲.۱ همبافت $C^\bullet$ روی حلقه R، دنباله $C^\bullet = \{C^i, \partial^i\}$ از $R-$ مدول‌های C^i و همریختی‌های $\partial^i : C^i \longrightarrow C^{i+1}$ است به طوری که $\partial^i\partial^{i-1} = 0$ و آن را با

$$C^\bullet : \ldots \longrightarrow C^{i-1} \xrightarrow{\partial^{i-1}} C^i \xrightarrow{\partial^i} C^{i+1} \longrightarrow \ldots$$

نشان می‌دهیم.

$i-$ امین گروه کوهمولوژی $C^\bullet$ را با نماد $H^i(C^\bullet)$ نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم

$$H^i(C^\bullet) = \frac{Ker\partial^i}{Im\partial^{i-1}}$$

تعریف ۴.۲.۱ تحلیل پروژکتیو $R-$ مدول M، رشته دقیق

$$P_M : \ldots \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

از $R-$ مدول‌های پروژکتیو P_i است.

تعریف ۵.۲.۱ فرض کنید T فانکتور همورد و جمعی از C_R (کاتگوری $R-$ مدول‌ها) به $C_{\mathbb{Z}}$ (کاتگوری $\mathbb{Z}-$ مدول‌ها) باشد. فرض کنید M یک $R-$ مدول و

$$P_M : \ldots \longrightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\alpha} M \longrightarrow 0$$