بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

گراف کلی حلقه جابه‌جایی بدون عنصر صفر

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

کریم محمدلو

اساتید راهنما: **دکتر محمدعلی اسم‌خانی**
دکتر بهنام خسروی

شهریور ۱۳۹۲

به بهشت نمی‌روم

اگر

پدر و مادرم آنجا نباشند.

تشکر و قدردانی

در آغاز لازم می‌دانم از زحمات بی‌دریغ خانواده‌ام به ویژه پدر سخت‌کوش و مادر مهربانم و همه کسانی که در دوران تحصیل پشتیبان من بوده‌اند سپاسگزاری نمایم. از تلاش‌های بی‌وقفه و راهنمایی‌های اساتید بزرگوارم، دکتر بهنام خسروی و دکتر محمد علی اسم‌خانی به پاس کمک‌های دلسوزانه‌شان متشکرم.

از زحمات اساتید محترم، هم‌اتاقی‌هایم در خوابگاه و دانشگاه و تمامی دانشجویان صمیمی و مهربان مرکز نیز کمال تشکر را دارم.

چکیده

ساختارهای جبری در سال‌های اخیر توسط گراف‌ها مطالعه شده‌اند که این مطالعات موجب سوالات و نتایج بسیاری شده‌اند. شاید در این بین، یکی از معروفترین گراف‌هایی که مورد مطالعه قرار گرفته است، گراف مقسوم‌علیه صفر یک حلقه است. در این پایان‌نامه، گراف کلی یک حلقه‌ی جابه‌جایی R که با $T(\Gamma(R))$ نشان داده می‌شود مورد بحث قرار می‌گیرد. راس‌های گراف کلی R، همه عناصر R بوده و دو راس متمایز x و y مجاورند اگر و فقط اگر $x + y$ مقسوم‌علیه صفر باشد. ما به مطالعه دو زیرگراف $T_\circ(\Gamma(R))$ و $Z_\circ(\Gamma(R))$ از گراف $T(\Gamma(R))$ می‌پردازیم که در آن‌ها مجموعه‌ی راس‌ها به ترتیب، مجموعه‌ی عناصر غیر صفر R و مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر R به جز صفر هستند. به عنوان مهمترین بخش‌هایی که در این پایان‌نامه به مطالعه آن خواهیم پرداخت، بررسی همبندی این گراف‌ها و محاسبه‌ی برخی از کمیت‌های گرافی مانند قطر، کمر و غیره است.

فهرست

پیش‌گفتار

اخیراً توجه ویژه‌ای به رابطه‌ی ساختارهای جبری و گراف‌ها شده است که شاید در این میان یکی از محبوبترین آنها، گراف مقسوم‌علیه صفر یک حلقه‌ی جابه‌جایی R است. ایده‌ی گراف مقسوم‌علیه صفر یک حلقه‌ی جابه‌جایی، اولین بار در سال ۱۹۸۸ توسط *ا.* بک[۱] در مقاله‌ای با عنوان *"رنگ آمیزی حلقه‌های جابه‌جایی"* ([۱۰]) بوجود آمد که در واقع علاقه‌ی او بیشتر در رنگ آمیزی این گراف بود. بعدها این ایده توسط د. *د. اندرسون*[۲] و م. *نصیر*[۳] ادامه و توسیع داده شد ([۶])، اگر چه تعریف گراف مقسوم‌علیه صفر ارائه شده توسط آنها کمی با تعریف بک متفاوت بود. در تعریف آنها تمام عناصر حلقه به عنوان رأس‌ها در نظر گرفته می‌شود و بین دو راس متمایز x و y یالی وجود دارد اگر و فقط اگر $xy = ۰$. این گراف را معمولاً با نماد $\Gamma(R)$ نمایش می‌دهند. بعد از آن *دیوید.ف. اندرسون*[۴] و *فیلیپ. س. لیوینگستون*[۵] گراف مقسوم‌علیه صفری را معرفی کردند که در آن رأس‌ها، عناصر مقسوم‌علیه صفر ناصفر حلقه بودند ([۳]).

در فصل اول این پایان‌نامه، پس از یادآوری مقدماتی در مورد حلقه‌ها و گراف‌ها به ارائه‌ی مفهوم گراف کلی یک حلقه‌ی جابه‌جایی و یکدار R می‌پردازیم که نخستین بار در سال ۲۰۰۸ توسط دیوید اندرسون و *ایمن بداوی*[۶] معرفی شد. این گراف با نماد $T(\Gamma(R))$ نمایش داده می‌شود که همه‌ی عناصر R

---

[۱] Istvan Beck

[۲] D. D. Anderson

[۳] M. Naseer

[۴] David. F. Anderson

[۵] Philip S. Livingston

[۶] A. Badawi

به عنوان رأس‌های این گراف در نظر گرفته می‌شوند و در آن دو راس متمایز x و y مجاورند اگر و فقط اگر $x+y$ یک مقسوم‌علیه‌صفر باشد ([۵]). همچنین در این بخش، زیرگراف‌های (القایی) این گراف، از جمله $Z_\circ(\Gamma(R))$ و $T_\circ(\Gamma(R))$ که رأس‌های آنها به ترتیب مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های ناصفر و همه‌ی عناصر ناصفر حلقه R هستند، معرفی خواهند شد. توجه داریم که گراف $Z_\circ(\Gamma(R))$ گرافی ناتهی و متناهی است، هرگاه R حلقه‌ای متناهی باشد که میدان نیست. گراف‌های معرفی شده توسط این اشخاص، نشان دهنده‌ی برخی از خواص مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه هستند. در واقع گراف مقسوم‌علیه صفر و گراف کلی یک حلقه‌ی جابه‌جایی، یک روش مطالعه و بیان خواص جبری با استفاده از ابزارهای گرافی است. در حقیقت با استفاده از این گراف‌ها، ما می‌توانیم برخی از خواص حلقه‌ها و زیرمجموعه‌های آنها از جمله مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر را به زبان گرافی ترجمه کرده و با استفاده از خواص هندسی گراف، نتایج جالبی از ساختارهای جبری مانند مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر را بدست آوریم.

در واقع می‌توان گراف $Z_\circ(\Gamma(R))$ را یک ساختار جمعی از گراف $\Gamma(R)$ دانست. در فصل دوم مشخص خواهیم کرد که برای چه حلقه‌های Rای، گراف $Z_\circ(\Gamma(R))$ همبند است. همچنین نشان می‌دهیم که $diam(Z_\circ(\Gamma(R))) \in \{۰, ۱, ۲, \infty\}$ و با محاسبه‌ای صریح برای $gr(Z_\circ(\Gamma(R)))$، نشان می‌دهیم که $gr(Z_\circ(\Gamma(R))) \in \{۳, \infty\}$. نکته‌ی جالب دراین زمینه این است که در بررسی قطر، کمر و همبندی گراف $Z_\circ(\Gamma(R))$، جواب‌های بدست آمده بستگی به کاهش‌یافته بودن و یا نبودن حلقه‌ی R و همچنین تعداد ایده‌آل‌های اول مینیمال دارد. در فصل سوم ثابت می‌کنیم هنگامی که $|R| \geq ۴$ داریم $diam(T_\circ(\Gamma(R))) = diam(T(\Gamma(R)))$. همچنین در این فصل قطر و کمر گراف $T_\circ(\Gamma(R))$ را بدست می‌آوریم. در نهایت در آخرین فصل این پایان‌نامه، مسیرهای ویژه‌ای در گراف $T_\circ(\Gamma(R))$ که موسوم به مسیرهای مقسوم‌علیه صفر و مسیرهای منظم هستند را معرفی می‌کنیم. در آخرین بخش این فصل، پس از تعریف حلقه‌ی PP، نشان می‌دهیم که در این نوع حلقه‌ها، بین هر دو راس متمایز در

گراف $T_\circ(\Gamma(R))$ مسیر منظم وجود دارد. لازم به ذکر است که منبع اصلی این پایان‌نامه مرجع [۷] است.

فصل اول

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل به یادآوری تعاریف، نکات، مثال‌ها و مفاهیم مقدماتی از نظریه‌ی حلقه‌ها و نظریه‌ی گراف‌ها می‌پردازیم که به آنها نیاز داریم. در بخش اول مفاهیمی از نظریه‌ی حلقه‌ها وایده‌آل‌های آنها همراه با مثال‌هایی بیان می‌کنیم. در بخش دوم نیز پس از یادآوری برخی از تعاریف و مفاهیم مقدماتی از نظریه‌ی گراف‌ها، به معرفی گراف کلی یک حلقه و زیرگراف‌های القایی آن می‌پردازیم. لازم به ذکر است که مراجع اصلی ما در این زمینه‌ها [۱۲]، [۱۴]، [۱۵] ، [۱۷] و [۱۸] است.

۱.۱ مفاهیمی از نظریه‌ی حلقه‌ها

قرارداد ۱.۱.۱. الف. در سرتاسر این پایان‌نامه حلقه‌ها جابه‌جایی و یکدار با $0 \neq 1$ در نظر گرفته می‌شوند.

ب. اگر R یک حلقه و A زیرمجموعه‌ای از آن باشد، آنگاه $R^* = R \setminus \{0\}$ و $A^* = A \setminus \{0\}$.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. در این صورت عنصر $a \in R$ را یک *مقسوم‌علیه صفر* می‌نامند هرگاه عنصر $\circ \neq b \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $ab = \circ$. مجموعه‌ی تمام مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه‌ی R را با $Z(R)$ نمایش می‌دهیم. در واقع

$$Z(R) = \{a \in R | \exists \circ \neq b \in R, ab = \circ\}.$$

همچنین در این پایان‌نامه عناصری از حلقه‌ی R که مقسوم‌علیه صفر نیستند را عناصر *منظم* می‌نامیم و مجموعه‌ی این عناصر را با $\mathrm{Reg}(R)$ نمایش می‌دهیم.

حلقه‌ی R را *دامنه‌ی صحیح* می‌گویند هرگاه عنصر مقسوم‌علیه صفر ناصفر نداشته باشد.

تعریف ۳.۱.۱. عنصر $a \in R$ را *معکوس پذیر* (*یکال*) گویند هرگاه $b \in R$ چنان موجود باشد به طوری که $ab = ۱$. مجموعه‌ی همه‌ی عناصر یکال R را با $U(R)$ نمایش می‌دهیم که به وضوح تحت عمل ضرب تشکیل یک گروه می‌دهد که به گروه یکال‌های R موسوم است.

مثال ۴.۱.۱. الف. حلقه‌ی $\mathbb{Z}$ یک دامنه‌ی صحیح است و حلقه‌های $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ و $\mathbb{Z}_p$ به ازای عدد اول p میدان و در نتیجه دامنه‌ی صحیح هستند. بنابراین

$$Z(\mathbb{Z}) = Z(\mathbb{C}) = Z(\mathbb{R}) = Z(\mathbb{Q}) = Z(\mathbb{Z}_p) = \{\circ\}.$$

ب. مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه‌ی $\mathbb{Z}_n$ همان عناصری از حلقه هستند که نسبت به n اول نیستند و عناصر یکال همان عناصری هستند که نسبت به n اولند. در واقع داریم

$$U(\mathbb{Z}_n) = \{a \in \mathbb{Z}_n | (a, n) = ۱\} \, , Z(\mathbb{Z}_n) = \{a \in \mathbb{Z}_n | (a, n) \neq ۱\}.$$

برای مثال

$$Z(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}\ , U(\mathbb{Z}_6) = R \setminus Z(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{1}, \bar{5}\}.$$

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. عنصر $x \in R$ را *پوچ‌توان* گویند هرگاه توانی از آن صفر شود یعنی عددی طبیعی مانند n وجود داشته باشد به طوری که $x^n = 0$. مجموعه تمام عناصر پوچ‌توان حلقه‌ی R را با $Nil(R)$ نمایش می‌دهند. همچنین $x \in R$ را *خودتوان* گویند هرگاه $x^2 = x$. مجموعه تمام عناصر خودتوان R را با $\mathrm{Idem}(R)$ نمایش می‌دهند.

مثال ۶.۱.۱. در حلقه‌ی $\mathbb{Z}_8$ عنصر $\bar{4}$ یک عنصر پوچ‌توان ناصفر است چون $(\bar{4})^2 = \bar{0}$. همچنین در حلقه‌ی $\mathbb{Z}_6$ عنصر $\bar{3}$ یک عنصر خودتوان ناصفر است چون $(\bar{3})^2 = \bar{3}$.

تعریف ۷.۱.۱. حلقه‌ی R را حلقه‌ای *کاهش‌یافته* می‌گویند هرگاه برای هر $x \in R$ اگر $x^2 = 0$، آنگاه $x = 0$.

تعریف ۸.۱.۱. اگر R حلقه‌ای جابه‌جایی و I ایده‌آل سره‌ای از آن باشد، آنگاه رادیکال I را با $\sqrt{I}$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\sqrt{I} = \{r \in R | r^n \in I\ , n \text{ به ازای عددی طبیعی مانند } \}.$$

توجه کنید که $\sqrt{0}$ همان رادیکال پوچ حلقه‌ی R، $Nil(R)$ است و در واقع داریم

$$Nil(R) = \{r \in R | r^n = 0\ , n \text{ به ازای عددی طبیعی مانند } \}.$$

گزاره ۹.۱.۱. *R حلقه‌ای کاهش یافته است اگر و فقط اگر* $Nil(R) = \{0\}$.

اثبات. فرض کنیم R حلقه‌ای کاهش‌یافته باشد. با استقرا قوی روی عدد طبیعی n ثابت می‌کنیم که

اگر $a \in Nil(R)$ و $a^n = 0$، آنگاه $a = 0$. فرض کنیم که حکم برای هر $k \leq n$ برقرار باشد. در این صورت اگر n زوج باشد یعنی $n = 2l$، آنگاه داریم $r^l.r^l = r^n = 0$ که بنا بر فرض کاهش‌یافته بودن R ایجاب می‌کند که $r^l = 0$. حال بنا بر فرض استقرای قوی $r = 0$. اما اگر n فرد باشد، آنگاه $r^{n+1} = 0$ که مشابه بالا چون $n + 1$ زوج است ایجاب می‌کند که $r = 0$.

برعکس، فرض کنیم که $Nil(R) = \{0\}$. در این صورت اگر $r^2 = 0$، آنگاه $r \in Nil(R)$ و بنابراین $r = 0$ که این نشان می‌دهد حلقه‌ی R کاهش‌یافته است. □

مثال ۱۰.۱.۱. الف. اگر I ایده‌آل رادیکال حلقه‌ی R باشد (یعنی $I = \sqrt{I}$)، آنگاه حلقه‌ی خارج قسمت R/I کاهش‌یافته است.

حل: برای اینکه نشان دهیم R/I کاهش‌یافته است، با استفاده از گزاره‌ی (۹.۱.۱) کافی است ثابت کنیم که $Nil(R/I) = \{0\}$. داریم

$$Nil(R/I) = \{r + I \in R/I | r^n + I = I \ , n \text{ به ازای عددی طبیعی مانند }\}.$$

فرض کنیم که $r + I \in Nil(R/I)$ عضو دلخواهی باشد. بنابراین عددی طبیعی چون $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $r^n + I = I$ و لذا $r^n \in I$. اما از آنجایی که I ایده‌آل رادیکالی از حلقه‌ی R است نتیجه می‌شود که $r \in I$. بنابراین $r + I = I$ و در نتیجه $Nil(R/I) = I = 0_{R/I}$.

ب. به طور کلی با یک بررسی ساده مشاهده می‌شود که هر دامنه‌ی صحیح، حلقه‌ای کاهش‌یافته است.

ج. با محاسبه‌ای ساده می‌توان نشان داد که حلقه‌ی $\mathbb{Z}_6$ مثالی از یک حلقه‌ی کاهش‌یافته است که دامنه‌ی صحیح نیست.

د. حلقه‌ی $\mathbb{Z}_4$ کاهش‌یافته نیست. زیرا $\bar{2}$ عضوی ناصفر است در $Nil(R)$ است که $(\bar{2})^2 = \bar{0}$.

گزاره ۱.۱.۱۱. *الف. هر زیر حلقه‌ی یک حلقه‌ی کاهش‌یافته، حلقه‌ای کاهش‌یافته است.*

ب. حاصل‌ضرب هر دو حلقه‌ی کاهش‌یافته، حلقه‌ای کاهش‌یافته است.

اثبات. الف. اگر S زیر حلقه‌ی دلخواهی از حلقه‌ی R باشد، آنگاه $Nil(S) \subseteq Nil(R)$. بنابراین بنا بر گزاره‌ی (۱.۱.۹) حکم واضح است.

ب. فرض کنیم R_1 و R_2 حلقه‌های کاهش‌یافته باشند. می‌دانیم که ضرب روی حلقه‌ی $R_1 \times R_2$ به صورت مولفه‌ای است. برای اثبات حکم، نشان می‌دهیم که اگر $(x_1, x_2)^2 = 0$، آنگاه $(x_1, x_2) = 0$. داریم

$$(x_1, x_2)^2 = (x_1, x_2)(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2^2).$$

حال چون R_1 کاهش‌یافته است پس اگر $x_1^2 = 0$، آنگاه $x_1 = 0$. به طور مشابه چون R_2 کاهش‌یافته است لذا اگر $x_2^2 = 0$، آنگاه $x_2 = 0$. بنابراین نتیجه می‌شود که $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

□

تعریف ۱.۱.۱۲. فرض کنیم I ایده‌آل سره‌ای از حلقه‌ی R باشد. ایده‌آل اولی از R مانند P را که شامل I است، *ایده‌آل اول مینیمال* I می‌نامیم هرگاه ایده‌آل اولی از R مانند Q موجود نباشد که $I \subseteq Q \subsetneqq P$.
هر ایده‌آل اول مینیمال ایده‌آل (0) به *ایده‌آل اول مینیمال* R معروف است و مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های اول مینیمال R را با $Min(R)$ نمایش می‌دهیم.

گزاره ۱.۱.۱۳. *اگر R حلقه‌ای کاهش‌یافته باشد، آنگاه R دامنه‌ی صحیح است اگر و فقط اگر $|Min(R)| = 1$.*

اثبات. در هر دامنه‌ی صحیح، (0) ایده‌آلی اول است (بنا بر فرض جابه‌جایی بودن حلقه‌ی R، فرض

$ab = \circ$ نتیجه می‌دهد که $a = \circ$ یا $b = \circ$ و لذا $(\circ)$ اول است). حال فرض کنیم که P ایده‌آل اول مینیمال دلخواهی از R باشد. P شامل $(\circ)$ است و از مینیمال بودن P نتیجه می‌شود که $P \subseteq \{\circ\}$. لذا $P = (\circ)$، بنابراین $|Min(R)| = ۱$.

بر عکس، فرض کنیم P تنها ایده‌آل اول مینیمال R باشد. نشان می‌دهیم که R یک دامنه‌ی صحیح است. برای این منظور فرض کنیم $a, b \in R$ و $ab = \circ$. کافی است نشان دهیم $a = \circ$ یا $b = \circ$. اگر $ab = \circ$، آنگاه $ab \in (\circ)$. از طرفی R کاهش‌یافته است بنابراین با توجه به نتیجه‌ی ۳.۴۹ در [۱۷]، خواهیم داشت

$$\{\circ\} = Nil(R) = \bigcap_{P \in \mathrm{Spec}(R)} P = P.$$

از آنجایی که P ایده‌آلی اول است و $P = \{\circ\}$، لذا $a \in (\circ)$ یا $b \in (\circ)$. در نتیجه $a = \circ$ یا $b = \circ$ و اثبات تمام است. $\square$

گزاره ۱۴.۱.۱. *فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد و $I_۱, \ldots, I_n$ تعدادی متناهی ایده‌آل از R باشد. فرض کنیم S زیرمجموعه‌ای از R باشد که مشمول در اجتماع $I_۱ \cup \cdots \cup I_n$ باشد. در این صورت اگر حداقل $n - ۲$ تا از Iها اول باشد، آنگاه kای وجود دارد که $۱ \leq k \leq n$ و S مشمول در I_k است.*

اثبات. به اثبات قضیه‌ی ۸۱ در [۱۲] مراجعه شود. $\square$

گزاره ۱۵.۱.۱. *فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد که شرط زنجیر صعودی برای ایده‌آل‌های رادیکال آن برقرار باشد و I ایده‌آلی از R باشد. در این صورت فقط تعداد متناهی ایده‌آل اول مینیمال حول I وجود دارد.*

اثبات. به اثبات قضیه‌ی ۸۸ در [۱۲] مراجعه شود. $\square$

تعریف ۱۶.۱.۱. زیرمجموعه‌ی S از حلقه‌ی R را *زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی* از حلقه‌ی R گویند

هرگاه $۱ \in S$ و به ازای هر $a, b \in S$ داشته باشیم $ab \in S$.

قضیه‌های زیر در اثبات لم (۳.۱.۲) به ما کمک خواهند کرد.

قضیه ۱۷.۱.۱. *اگر S زیر مجموعه‌ای بسته‌ی ضربی در حلقه‌ی R باشد و ایده‌آل P در مجموعه‌ی ایده‌آل‌هایی از R که با S اشتراک ندارند ماکسیمال باشد، آنگاه P اول است.*

اثبات. به اثبات قضیه‌ی ۱ در [۱۲] مراجعه شود. □

قضیه ۱۸.۱.۱ (قضیه‌ی ۲.۱ در [۱۵])**.** *فرض کنیم I ایده‌آل سره‌ای از حلقه‌ی R باشد. همچنین فرض کنیم که S زیرمجموعه‌ای بسته‌ی ضربی از R باشد به طوری که $I \cap S = \varnothing$. در این صورت ایده‌آل اول P از حلقه‌ی R موجود است به طوری که $P \cap S = \varnothing$ و $I \subseteq P$.*

تعریف ۱۹.۱.۱. حلقه‌ی R را شبه‌موضعی گویند هرگاه دارای فقط یک ایده‌آل ماکسیمال باشد.

مثال ۲۰.۱.۱. در حلقه‌ی $\mathbb{Z}_۴ = \{\bar{۰}, \bar{۱}, \bar{۲}, \bar{۳}\}$ ایده‌آل $M = \{\bar{۰}, \bar{۲}\}$ و در حلقه‌ی

$$\frac{\mathbb{Z}_۲[x]}{(x^۲)} = \{(x^۲), ۱ + (x^۲), x + (x^۲), ۱ + x + (x^۲)\}$$

ایده‌آل $M = \frac{x\mathbb{Z}_۲[x]}{(x^۲)} = \{(x^۲), x + (x^۲)\}$ تنها ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقه‌های ذکر شده هستند. لذا این حلقه‌ها شبه‌موضعی هستند.

فرض کنیم S زیرمجموعه‌ای بسته‌ی ضربی از حلقه‌ی R باشد در این صورت با محاسبه‌ای ساده می‌توان نشان داد که رابطه‌ی زیر یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی $R \times S$ است

$$(a, s) \sim (b, t) \iff (at - bs)u = ۰, \ u \in S$$ به ازای یک .

کلاس هم‌ارزی $(a, s) \in R \times S$ را با a/s نمایش داده و قرار می‌دهیم $S^{-۱}R = \{a/s | a \in R, \ s \in S\}$.

حال به وسیله‌ی جمع و ضرب زیر روی این کلاس‌ها ساختاری حلقه‌ای روی $S^{-1}R$ قرار می‌دهیم

$$(a/s)+(b/t)=(at+bs)/st,\ (a/s)(b/t)=ab/st.$$

(برای اطلاعات بیشترو همچنین جزئیات اثبات خوش تعریفی اعمال بالا می‌توانید به [۱۴]، [۱۵] و [۱۷] مراجعه کنید.) بنابراین می‌توان دید که $S^{-1}R$ حلقه‌ای جابه‌جایی و یکدار است که به ازای هر $s\in S$ عنصر $0/s$ عنصر همانی جمعی $S^{-1}R$ و $s/s=1/1$ عنصر همانی عمل ضرب $S^{-1}R$ است. همچنین اگر حلقه‌ی R دامنه‌ی صحیح باشد و $0\notin S$، آنگاه $S^{-1}R$ نیز دامنه‌ی صحیح خواهد بود. در صورتی که S زیرمجموعه‌ای بسته‌ی ضربی از R باشد، حلقه‌ی $S^{-1}R$ را *حلقه‌ی کسرهای* R روی S می‌گویند. اگر R یک دامنه‌ی صحیح باشد و $S=R-\{0\}$، آنگاه $S^{-1}R$ را *میدان کسرهای* حلقه‌ی R می‌نامند.

قضیه ۲۱.۱.۱ (قضیه‌ی ۳۲.۵ در [۱۷]). *فرض کنیم S زیرمجموعه‌ای بسته‌ی ضربی از R باشد.*

الف. نگاشت $\varphi:R\longrightarrow S^{-1}R$ با ضابطه‌ی $\varphi(a)=a/1$ یک همریختی حلقه‌ای است. همچنین اگر $S\cap Z(R)=\varnothing$، آنگاه φ یک به یک است.

ب. هر حوزه‌ی صحیح قابل نشاندن در میدان کسرهای خود است.

ج. اگر I ایده‌آلی از R باشد، آنگاه $S^{-1}I=\{a/s|a\in I,\ s\in S\}$ ایده‌آلی از $S^{-1}R$ است.

د. $Spec(S^{-1}R)=\{S^{-1}P|P\in Spec(R),\ P\cap S=\varnothing\}$.

و. اگر R یک دامنه‌ی صحیح باشد و $0\notin S$، آنگاه $S^{-1}R$ هم یک دامنه‌ی صحیح است.

می‌خواهیم حلقه‌ی $S^{-1}R$ را به حلقه‌ای موضعی تبدیل کنیم که این عمل را *موضعی سازی* حلقه‌ی R نسبت به مجموعه‌ی S می‌گویند.

فرض کنیم P ایده‌آلی اول از حلقه‌ی R باشد. در این صورت $S = R \setminus P$ یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی است(در واقع $R \setminus P$ بسته‌ی ضربی است اگر و فقط اگر P اول باشد). در این مورد حلقه‌ی $S^{-1}R$ را با R_P نشان می‌دهیم. ادعا می‌کنیم که $S^{-1}P = \{a/s | a \in P, \ s \in S\}$ تنها ایده‌آل ماکسیمال R_P است. برای اثبات این ادعا فرض کنیم $b/t \in R_P \setminus S^{-1}P$ عضو دلخواهی باشد. در این صورت $b \notin P$ و لذا $b \in S = R \setminus P$ و $(b/t)(t/b) = ۱$. این یعنی هر عنصر خارج از $S^{-1}P$ معکوس‌پذیر است و لذا $S^{-1}P$ تنها ایده‌آل ماکسیمال R_P است.

در فصل دوم ثابت می‌کنیم که اگر $Z(R)$ ایده‌آلی از حلقه‌ی R باشد، آنگاه $S = \mathrm{Reg}(R)$ یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی است. بنابراین می‌توان حلقه‌ی R را نسبت به $\mathrm{Reg}(R)$ موضعی کرد.

تعریف ۲۲.۱.۱. حلقه‌ی خارج قسمت حلقه‌ی R نسبت به مجموعه‌ی $S = \mathrm{Reg}(R)$ را *حلقه‌ی خارج قسمت کلی* از حلقه‌ی R می‌گوییم و در این پایان‌نامه با $T(R)$ نمایش داده می‌شود.

قضیه ۲۳.۱.۱. *فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و $T(R)$ حلقه‌ی خارج قسمت کلی آن باشد در این صورت*

الف. $|Min(R)| = |Min(T(R))|$.

ب. R *دامنه‌ی صحیح نیست اگر و فقط اگر* $T(R)$ *دامنه‌ی صحیح نباشد.*

ج. R *کاهش‌یافته است اگر و فقط اگر* $T(R)$ *کاهش‌یافته باشد.*

د. $T(R) = (\frac{z_۱}{۱}, \frac{z_۲}{۱})$ که $z_۱, z_۲ \in Z(R)$.

اثبات. الف. فرض کنیم $P_۱, P_۲ \in Min(R)$ و همچنین $S = \mathrm{Reg}(R)$. در این صورت توجه داریم که برای هر $P \in Min(R)$ داریم $P \subseteq Z(R)$ و لذا $P \cap S = \varnothing$. بنابراین با توجه به قضیه‌ی (۲۱.۱.۱) $Q = S^{-1}P$ ایده‌آل اولی از $T(R)$ است. در نتیجه $S^{-1}P_۱, S^{-1}P_۲ \in Min(T(R))$ که $S^{-1}P_۱ \neq S^{-1}P_۲$.

حال فرض کنیم $Q \in Min(T(R))$. در این صورت طبق قضیه‌ی (۲۱.۱.۱) $P \in Min(R)$ وجود دارد به طوری که $Q = S^{-1}P$ بنابراین داریم

i. $P \in Min(R) \Rightarrow S^{-1}P \in Min(T(R))$.

ii. $Q = S^{-1}P \in Min(T(R)) \Rightarrow P \in Min(R)$.

حال از دو گزاره‌ی فوق نتیجه می‌شود که $|Min(R)| = |Min(T(R))|$.

ب. ابتدا فرض کنیم R دامنه‌ی صحیح نیست. لذا $0 \neq a, b \in R$ وجود دارند به طوری که $ab = 0$. بنابراین $a, b \in Z(R)$ و لذا $\frac{a}{1}, \frac{b}{1} \in T(R) \neq 0$. چون اگر به عنوان مثال $\frac{a}{1} = 0$، آنگاه $r \in \mathrm{Reg}(R)$ وجود دارد به طوری که $ra = 0$ که نتیجه می‌دهد $a = 0$ که تناقض است. اما $\frac{a}{1}.\frac{b}{1} = \frac{ab}{1} = 0$. بنابراین $T(R)$ دامنه‌ی صحیح نیست.

برعکس، فرض کنیم $T(R)$ دامنه‌ی صحیح نباشد. به برهان خلف فرض کنیم R دامنه‌ی صحیح باشد. در این صورت بار دیگر از قضیه‌ی (۲۱.۱.۱) نتیجه می‌شود که $T(R)$ دامنه‌ی صحیح است که این تناقض با فرض است.

ج. ابتدا فرض کنیم R کاهش‌یافته باشد و $\frac{a}{t} \in T(R)$ عنصری پوچ‌توان باشد. لذا $n \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که $(\frac{a}{t})^n = 0$. بنابراین $\frac{a^n}{t^n} = 0$. لذا $r \in \mathrm{Reg}(R)$ موجود است که $ra^n = 0$. پس $a^n = 0$ و در نتیجه $a = 0$ که نتیجه می‌دهد $\frac{a}{t} = 0$. بنابراین $T(R)$ کاهش‌یافته است.

حال فرض کنیم $T(R)$ کاهش‌یافته باشد. در این صورت فرض کنیم $a \in R$ به طوری که به ازای $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $a^n = 0$. بنابراین $(\frac{a}{1})^n = \frac{a^n}{1} = 0$. از آنجایی که $T(R)$ کاهش‌یافته است داریم $\frac{a}{1} = 0$ و لذا $r \in \mathrm{Reg}(R)$ موجود است به طوری که $ra = 0$ که نتیجه می‌دهد $a = 0$. بنابراین R کاهش‌یافته است.

د. از آنجایی که $Z(R)$ ایده‌آل حلقه‌ی R نیست بنابراین $z_1, z_2 \in Z(R)$ وجود دارند به طوری