

به نام خدا

کنترل مرزی ارتعاشات ورق های کامپوزیتی لایه ای

به کوشش

حسین راست گفتار

پایان نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه شیراز به عنوان بخشی  
از فعالیت های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته ی:

مهندسی مکانیک

از دانشگاه شیراز

شیراز

جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی کمیته ی پایان نامه، با درجه: عالی

دکتر محمد اقتصاد، دانشیار دانشکده مهندسی مکانیک (رئیس کمیته) .....

دکتر علیرضا خیاطیان، دانشیار دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر (رئیس کمیته) .....

دکتر مهرداد فرید، دانشیار دانشکده مهندسی مکانیک .....

دکتر محمد رحیم نامی، استادیار دانشکده مهندسی مکانیک .....

دی ماه ۸۸

با یک هنجره سپاس به

مادرم، پدرم

و امتداد زحمت هاشان ...

## فهرست مطالب

۱	فصل اول: معرفی پایان نامه
۱	مقدمه
۶	مروری بر کارهای صورت گرفته
۱۰	فصل دوم: معادلات حاکم بر ورق های مرکب
۱۱	معادلات هندسی
۱۲	معادلات هندسی برای ورق با فرض جابه جایی کوچک
۱۳	معادلات هندسی برای ورق با فرض جابه جایی کوچک
۱۴	معادلات ارتعاشاتی حاکم بر ورق مرکب لایه ای
۱۵	معادلات ارتعاشاتی برای ورق با فرض جابه جایی کوچک
۱۶	معادلات ارتعاشاتی برای ورق با فرض جابه جایی بزرگ
۱۷	روابط بین نیروها و گشتاورهای درون صفحه ای با کرنش ها و انحنا ها برای ورق مرکب لایه ای
۲۳	روابط گشتاورهای درون صفحه ای با کرنش ها و انحنا ها برای ورق مرکب لایه ای متقارن با فرض جابه جایی کوچک

۲۵	روابط گشتاورهای درون صفحه ای با کرنش ها و انحنا ها برای ورق مرکب لایه ای غیر ایزوتروپیک برای جابه جایی کوچک
۲۸	روابط گشتاورهای درون صفحه ای با کرنش ها و انحنا ها برای ورق مرکب لایه ای انیزوتروپیک برای جابه جایی بزرگ
۳۱	فصل سوم: کنترل مرزی ارتعاشات ورق غیر ایزو تروپیک
۳۱	کنترل مرزی ارتعاشات ورقهای انیزو تروپیک با فرض کرنش خطی
۳۶	کنترل مرزی ارتعاشات ورقهای انیزو تروپیک با فرض کرنش غیر خطی
۴۵	فصل چهارم: کنترل تطبیقی
۴۸	شناسایی
۵۰	قانون تطبیق
۵۱	فصل پنجم: مدلسازی
۵۱	مدلسازی پایدار سازی ارتعاشات با دامنه بزرگ با استفاده از روش کنترل مرزی در ورق غیر ایزوتروپیک
۵۳	نتایج مدلسازی برای ورودی کنترلی پیوسته
۶۰	نتایج مدلسازی برای ورودی کنترلی گسسته ( <i>point-wise</i> )
۶۷	نتایج مدلسازی
۶۹	نتایج و پیشنهادات
۷۱	پیوست الف
۷۳	پیوست ب
۷۹	فهرست مراجع

## چکیده

در این پایان نامه، کنترل مرزی ارتعاشات کوچک<sup>۱</sup> و خطی<sup>۲</sup> همچنین ارتعاشات با دامنه بزرگ<sup>۳</sup> و غیر خطی<sup>۴</sup> ورق های مرکب غیر ایزو تروپیک (که هیچ محدودیتی در تعداد و جهت لایه ها<sup>۵</sup> موجود نمی باشد)، به علاوه کنترل وقتی<sup>۶</sup> ارتعاشات در آنها ارائه می گردد. هدف اصلی این پایان نامه استفاده از کنترل مرزی برای پایدار سازی ارتعاشات در ورق های لایه ای غیر ایزوتروپیک لایه ای می باشد. در فصل دوم معادلات حاکم بر ارتعاشات با دامنه کم (خطی) و زیاد (غیر خطی) ورق غیر ایزوتروپیک لایه ای ارائه شده است. در فصل سوم روش کنترل مرزی برای ارتعاشات با دامنه کم و زیاد ورق غیر ایزوتروپیک لایه های که مبتنی بر تئوری لیپانوف می باشد ارائه می گردد. در فصل چهارم روش کنترل وقتی مرزی برای ارتعاشات در ورق های غیر ایزوتروپیک ارائه می گردد. مدلسازی های نرم افزاری ارتعاشات و نتایج عددی در فصل چهارم ارائه خواهد شد. در پایان نیز نتایج و پیشنهادات ارائه می گردد.

---

<sup>1</sup> Small vibration  
<sup>2</sup> Linear  
<sup>3</sup> Large Vibration  
<sup>4</sup> Nonlinear  
<sup>5</sup> Laminas  
<sup>6</sup> Adaptive control

# فصل اول

## معرفی پایان نامه

### مقدمه

کلمه کامپوزیت در عبارت "مواد کامپوزیتی"، به معنی ترکیب کردن دو یا چند ماده در ابعاد میکروسکوپی به منظور ایجاد ماده ای مفیدتر می باشد. مزیت مواد مرکب در این است که اگر به خوبی طراحی شوند، بهترین خواص مواد تشکیل دهنده خود و یا خواص جدید که در مواد تشکیل دهنده وجود ندارد را به نمایش می گذارند. برخی خواص که با تشکیل مواد مرکب بهبود می یابند عبارتند از: مقاومت ماده<sup>۱</sup>، سختی ماده<sup>۲</sup>، مقاومت در برابر خوردگی<sup>۳</sup>، مقاومت در برابر ساییدگی<sup>۴</sup>، وزن<sup>۵</sup>، عمر خستگی<sup>۶</sup>، عایق بودن در برابر گرما<sup>۷</sup>، رسانش گرمایی<sup>۸</sup> و غیره [۱].

مواد مرکب در بسیاری از خواص مکانیکی با مواد ایزوتروپیک<sup>۹</sup> تفاوت دارند. خواص مکانیکی در مواد ایزوتروپیک در هر نقطه از جسم و در همه جهات یکسان می باشند. در مقابل مواد مرکب و کلی ترین فرم آن که مواد غیر ایزوتروپیک<sup>۱۰</sup> می باشند، دارای خواص مکانیکی متفاوت در جهات مختلف و در نقاط مختلف ماده می باشند [۲].

در کاربردهای مهندسی، اغلب به ترکیب خواص مواد نیاز است. در صنایع هوافضا، کاربردهای زیر آبی، حمل و نقل و امثال آن ها، امکان استفاده از یک نوع ماده که همه خواص مورد نظر را فراهم نماید، وجود ندارد. به عنوان مثال در صنایع هوافضا به موادی نیاز است که ضمن داشتن استحکام بالا، سبک وزن، مقاومت سایشی و قابلیت جذب انرژی خوبی داشته باشند و ...

---

<sup>1</sup> Strength

<sup>2</sup> Stiffness

<sup>3</sup> Corrosion resistance

<sup>4</sup> Wear resistance

<sup>5</sup> Weight

<sup>6</sup> Fatigue life

<sup>7</sup> Thermal insulation

<sup>8</sup> Thermal conductivity

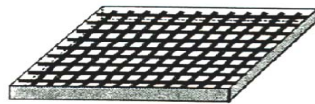
<sup>9</sup> Isotropic materials

<sup>10</sup> Anisotropic materials

از آنجا که نمی توان ماده ای یافت که همه خواص مورد نظر را دارا باشد، لذا از مواد مرکب استفاده می شود.

مواد مرکب لایه ای یکی از انواع مواد مرکب می باشد که نسبت به سایر مواد مرکب بیشتر مورد توجه قرار گرفته اند. یک لایه توسط الیاف هایی که در ماده پایه قرار گرفته مسلح شده است. این الیاف ها ممکن است یک فلز مانند آلومینیوم و یا یک ماده غیر فلزی مانند ترمو پلاستیک ها باشند. اغلب برای افزایش سختی و بهبود اتصال بین الیاف و ماده پایه مواد شیمیایی به آنها اضافه می شود. الیاف ها ممکن است پیوسته و یا غیر پیوسته باشند. در حالت کلی نحوه قرارگیری الیاف (چیدمان الیاف) در هر لایه به یکی از گونه های زیر می باشد:

۱. الیاف در یک جهت [unidirectional، (شکل ۱-۱-الف)]
۲. الیاف در دو جهت [bi-directional، (شکل ۱-۱-ب)]
۳. الیاف بافته شده [woven، (شکل ۱-۱-پ)]
۴. الیاف ریز ریز نامنظم [discontinuous fiber، (شکل ۱-۱-ت)]



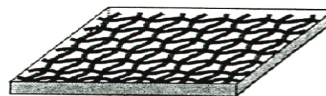
ب - الیاف در دو جهت



الف - الیاف در یک جهت



ت - الیاف ریز ریز نامنظم



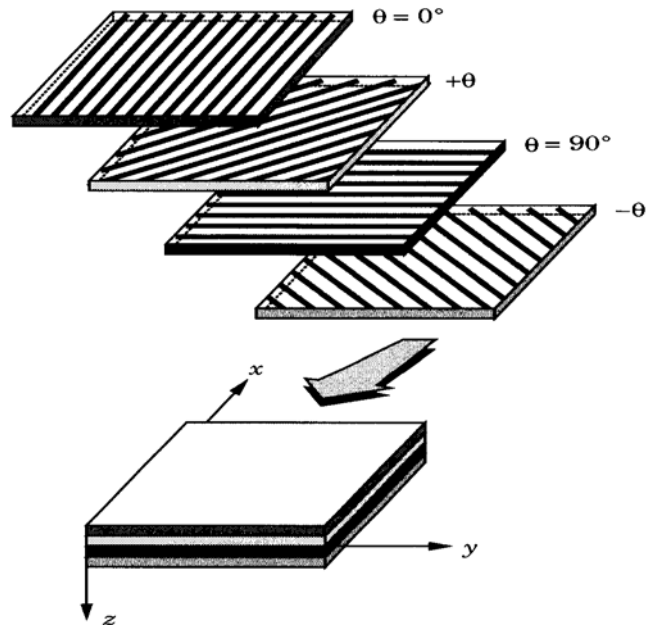
پ - الیاف بافته شده

شکل ۱-۱ نحوه قرارگیری الیاف در ماده پایه

لایه مسلح شده توسط الیاف در یک جهت (unidirectional) بیشترین مقاومت را در امتداد الیاف و مقاومت خیلی کمی در امتداد عمود بر جهت الیاف دارد. لایه مسلح شده توسط الیاف نامنظم (discontinuous fiber) کمترین مقاومت را در بین مواد مرکب دارد.

مواد مرکب لایه ای ترکیبی از لایه های مختلف با جهت و نوع الیاف متفاوت هستند که به منظور رسیدن به سختی و ضخامت مورد نیاز به هم متصل شده اند. به عنوان مثال یک ماده (unidirectional) ممکن است متشکل از چندین لایه باشد و امتداد الیاف آنها در هر لایه، همانند و یا متفاوت باشد. ترتیب تغییرات جهت الیاف در یک ماده مرکب چند لایه ای به طرح لایه ای (lamination scheme) یا به ترتیب روی هم گذاری (stacking sequence) موسوم است. معمولاً لایه ها به وسیله یک ماده پایه به هم پیوند می خورند. اگر امتداد الیاف

۳۰ یا ۴۵ درجه باشد باعث ایجاد نیروهای برشی می شود. در شکل (۲-۱) یک ماده لایه ای مرکب که از چهار لایه با امتدادهای مختلف ساخته شده نشان داده شده‌اند.



شکل ۲-۱ نحوه شماتیک قرارگیری لایه ها در ماده مرکب لایه ای

یک اتصال ضعیف بین الیاف و ماده پایه باعث ایجاد یک ماده مرکب با مشخصات ضعیف و خرابی که در الیاف ممکن است رخ دهد می شود. نبودن اتصال کافی بین لایه ها، الیاف ها و ماده پایه در هر لایه می تواند باعث جدایی، پارگی و یا کمانش الیاف آنها از یکدیگر شده و عملکرد اصلی آنها را تحت تأثیر قرار دهد. بنابراین این اتصالات باید به گونه ای باشد که پدیده جدایی رخ ندهد. به علت غیر همگن بودن ماده مرکب، پیش بینی رفتار این مواد بسیار دشوار و در مواردی غیر ممکن است و بیشتر از طریق آزمایشات تجربی می توان به چگونگی رفتار آنها پی برد. با توجه به پیچیدگی رفتاری مواد مرکب برای اینکه بتوانیم معادلات حاکم بر رفتار این مواد را بدست آوریم فرضیاتی را اعمال می کنیم که در ادامه به بیان این فرضیات می پردازیم [۱] و ۲:

(الف) الیاف به صورت کامل توسط ماده پایه دورگیری شده است.

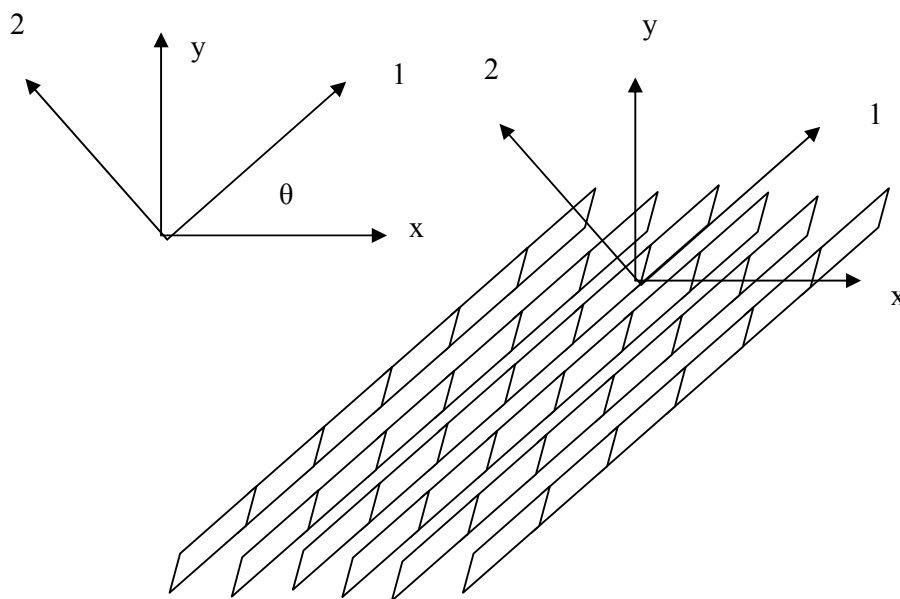
(ب) الیاف به صورت موازی و یکنواخت در ماده پایه پخش شده اند.

(ج) در ماده پایه هیچگونه حفره، ریز ترک و تنش اولیه ای وجود ندارد.



د) ماده پایه و الیاف یک ماده ارتوتروپیک را تشکیل می دهند که از قانون هوک پیروی می کند.

برای ورق های مرکب لایه ای<sup>۱</sup> جهت های اصلی هر یک از لایه ها موازی و عمود بر فایبرها می باشند که در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل ۱-۳ جهت های اصلی و زاویه دوران دستگاه مختصات X-Y نسبت به دستگاه مختصات اصلی (۱-۲)

برای مواد ایزوتروپیک، ثابت های مهندسی،  $E$  (شیب منحنی تنش-کرنش وقتی که  $\sigma_x = \sigma$  و بقیه تنشها برابر با صفر باشند)،  $\nu$  (نسبت کرنش در راستای  $y$  به کرنش در راستای  $x$  وقتی که  $\sigma_x = \sigma$  و بقیه تنشها برابر با صفر باشند) و  $G$  که به مقدار  $\nu$ ،  $E$  بستگی دارد ( $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ) می باشند.

در مواد مرکب لایه ای برای هر لامینا ثابت های مهندسی ( $E_1, E_2, \nu_{12}, \nu_{21}, G_{12}$ ) به صورت زیر تعریف می شوند:

$E_1, E_2$ : مدول یانگ<sup>۱۶</sup> در جهت های اصلی ۱ و ۲

$\nu_{12}$ : منفی نسبت یا قرینه کرنش در جهت ۲ به کرنش در جهت ۱

$\nu_{21}$ : منفی نسبت یا قرینه کرنش در جهت ۱ به کرنش در جهت ۲

<sup>۱</sup> Composite laminated plate

$G_{12}$ : مدول برشی برای صفحه ۱-۲

ارتباط بین دستگاه مختصات ۱-۲ و دستگاه مختصات  $x-y$  برای هر لامینا از رابطه زیر به دست می آید:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

(۱۴-۲)

در رابطه بالا  $\bar{Q}_{ij}$  به مقدار ثابت های مهندسی ( $E_1, E_2, \nu_{12}, \nu_{21}$  و  $G_{12}$ ) هر لامینا و همچنین زاویه  $\theta$  (زاویه بین دستگاه مختصات ۱-۲ برای هر لامینا و دستگاه مختصات  $x-y$ ) بستگی دارد.

جریان های غیر دائمی<sup>۱</sup> و مغشوش<sup>۲</sup> اطراف بال هواپیما باعث ارتعاشات در ورق های مرکب که به صورت گسترده در بدنه هواپیما به کار رفته اند می شوند. به دلیل سرعت های متفاوت جریان هوا از سطوح زیرین و بالایی، یک گردابه<sup>۳</sup> در اطراف بال هواپیما به وجود آمده که سبب القای ارتعاشات در بال های هواپیما که از جنس ورق های کامپوزیتی می باشند می شود. بنابراین کنترل ارتعاشات در بال هواپیما و قسمت های دیگر آن نقش بسیار مهمی در یک پرواز ایمن و آرام دارد.

## مروری بر کار های صورت گرفته

در کارهای صورت گرفته قبلی روش های متفاوتی برای کنترل ارتعاشات عرضی<sup>۴</sup> در آنها ارائه گردیده است. مواد هوشمند<sup>۵</sup> مانند سرامیک های پیزو الکتریک<sup>۶</sup> و SMAS<sup>۷</sup> به صورت روز افزون برای کنترل ارتعاشات در این نوع ورق ها به کار می روند [۳-۱۴]. مرجع [۳] ارتعاشات فعال<sup>۸</sup> در ورق های کیرشهوف<sup>۹</sup> و میندلین<sup>۱۰</sup> را مورد بررسی قرار می دهد. ورقهای مرکب به کار رفته دارای حسگرها<sup>۱۱</sup> و عملگرهای<sup>۱۲</sup> پیزوالکتریک می باشند که با فیدبک گرفتن از

<sup>1</sup> Unsteady flow

<sup>2</sup> Turbulent

<sup>3</sup> Wake

<sup>4</sup> Transverse Vibration

<sup>5</sup> Smart materials

<sup>6</sup> Piezoelectric ceramics

<sup>7</sup> Shape memory alloys

<sup>8</sup> Active vibration

<sup>9</sup> Kirchhoff

<sup>10</sup> Mindlin

<sup>11</sup> Sensors

<sup>12</sup> Actuators

سرعت، ارتعاشات در آنها میرا می گردد. یک عملگر پیزو الکتریک چند لایه جدید ۳۲ (MPA) برای کنترل ارتعاشات در ورق های مرکب لانه زنبوری (HSP)<sup>۱</sup> به کار برده شده است [۴]. مکانیزم کنترل از یک کامپوزیت لانه زنبوری می باشد که از دو لایه نازک و یک هسته ضخیم لایه زنبوری میانی تشکیل شده است. در [۵]، یک روش تحلیلی برای فرمولسازی کنترل ارتعاشات محوری و عرضی ورق های مرکب لایه ای که از لایه های پیزوالکتریک ۱-۳ و صفحات ارتوتروپیک<sup>۲</sup> تشکیل شده اند ارائه شده است و کنترل فعال الکتریک بکار رفته در صفحات پیزوالکتریک به الکتروود های اینتردیجیتد<sup>۳</sup> (IDE). معادلات حاکمه برای یک صفحه دلخواه<sup>۴</sup> مرکب لایه ای که هندسه آن غیر خطی می باشد که با لایه های سخت کننده<sup>۵</sup> پیزوالکتریک تقویت شده اند در شماره [۶] ارائه شده است. در شماره [۷]، پاسخ معادلات خطی پیزو ترمو الاستیک ها<sup>۶</sup>، منتج شده از اصل همیلتون ارائه شده است. در شماره [۹]، طراحی کنترلر میو سینتسیز<sup>۷</sup> برای کنترل ارتعاشات در ورق های مرکب با پیزو الکتریک لایه ای ارائه شده است. در مرجع [۱۰]، یک کنترل فید بک ساده برای مطالعه اثرات لایه ها، شرایط مرزی و بار گذاری بر روی پاسخ گذرای ارتعاشات در صفحات مرکب لایه ای تقویت شده با ماده هوشمند ارائه شده است. در شماره [۱۲]، یک مدل اجزای محدود دوگانه سازه ای - الکتریکی<sup>۸</sup> برای کنترل فعال ارتعاشات غیر خطی فون کارمن<sup>۹</sup> در یک صفحه مرکب دارای لایه های پیزو الکتریک تحت تحریک خارجی اتفاقی ارائه شده است. در این مقاله سیستم تبدیل یافته معادلات به فرم فضای حالت نوشته شده است. چهار روش کنترل مختلف پس خور سرعت، پیشرو<sup>۱۰</sup>، پسرو<sup>۱۱</sup> و H<sub>1</sub> برای جابه جایی های کوچک و بزرگ به کار برده و نتایج بررسی شده است.

فیبرهای آلیاژی شیب مموری و به طور خاص فیبر های نیتینول در ورقهای مرکب پیشرفته جهت کنترل و بهبود سازه ورق ها به کار رفته اند. در مرجع شماره [۱۳]، تغییرات فرکانس طبیعی سازه ای کامپوزیتی که فیبر های آلیاژی شیب مموری نینتولی در آنها به کار رفته است، ارائه شده است. در این مقاله از روش آنالیز انرژی کرنشی در یک ورق استفاده شده است. همچنین یک روش برای کنترل پسرو ترجمه<sup>۱۱</sup> ارتعاشات ورقهای نازک تحت اثر نیروی برشی در مرجع شماره [۱۴] معرفی شده است که از سیم های آلیاژی شیب مموری پیش بارگذاری

<sup>1</sup> Honeycomb sandwich panels

<sup>2</sup> Orthotropic layers

<sup>3</sup> Interdigitated Electrodes

<sup>4</sup> Arbitrary

<sup>5</sup> Stiffner

<sup>6</sup> Piezo-thermoelastics

<sup>7</sup>  $\mu$ -synthesis

<sup>8</sup> structural-electrical

<sup>9</sup> Lead

<sup>10</sup> Lag

<sup>11</sup> Passive Control

شده<sup>۱</sup> در سطح ورق استفاده کرده است.

اثرات الاستیک بر روی سیستم های انعطاف پذیر<sup>۲</sup> معمولاً با مجموعه ای از معادلات پاره ای و شرایط مرزی مرتبط با آنها بیان می شود. مجموعه کار هایی که برای کنترل معادلات پاره ای صورت گرفته است در مقایسه با تکنیک های ارائه شده برای کنترل معادلات دیفرانسیل معمولی بسیار کمتر می باشد و در همه آنها از روش های عددی یا گسسته سازی<sup>۳</sup> معادلات پاره ای و تبدیل معادلات پاره ای به مجموعه ای از معادلات دیفرانسیل معمولی استفاده شده است [۱۵ و ۱۶].

روش معمول برای مدلسازی ارتعاشات در سیستم های الاستیک و ورق ها، روش مدهای پیش فرض شده<sup>۴</sup> و اجزای محدود (FEM) می باشد که در آن ها معادلات حاکمه گسسته سازی شده و از مدهای ارتعاشی با مراتب بالاتر<sup>۴</sup> صرف نظر می گردد [۱۷ و ۱۸]. از طرف دیگر در روش کنترل مرزی یک روش تحلیلی و دقیق برای کنترل ارتعاشات در سیستم های الاستیک ارائه می شود که در آن نیازی به گسسته سازی معادلات پاره ای نمی باشد.

مزیت دیگر روش کنترل مرزی در به کار بردن حسگرها و عملگرها تنها در مرزهای سیستم می باشد. بنابراین نیازی به استفاده از لایه های پیزوالکتریک و یا کرنش سنج ها که اطلاعات مربوط به ارتعاشات در نقاط درونی سیستم جمع آوری می کنند و همچنین عملگر های توزیع شده که عمل کنترل ارتعاشات را در نقاط مختلفی در درون ورق اعمال می کنند نمی باشد.

کنترلر های مرزی طراحی شده برای سیستم های پیوسته معمولاً جبران کننده های ساده ای هستند که پایداری حلقه بسته برای بینهایت مد را ارتعاشی تضمین می نمایند [۱۵]. محققان متعددی استفاده از روش کنترلر های مرزی را برای تعداد زیادی از سیستم های انعطاف پذیر مانند طناب ها<sup>۵</sup> [۱۹-۲۷]، میله ها<sup>۶</sup> [۲۸ و ۲۹]، تیرها [۱۵ و ۳۰-۴۵] و ورقها [۴۶-۵۰] پیشنهاد داده اند.

در [۲۶ و ۲۷]، نشان داده می شود که با فیدبک گرفتن از سرعت در مرزهای طناب می توان ارتعاشات در طناب را پایدار نمود. در [۱۹ و ۲۳-۲۶]، روش فیدبک مرزی از متغیر حالت برای کنترل ارتعاشات یک طناب با حرکت محوری استفاده می شود. در [۱۹ و ۲۴] قوانین کنترل به وسیله یک سیستم جرم - فنر - میراگر اعمال گردیده است. در مرجع [۲۴]، پایداری مجانبی و نمایی در یک طناب با حرکت محوری با استفاده همزمان از کنترلر های فیدبک مرزی حالت نشان داده می شود. همچنین اثبات می شود که استفاده از کنترلر فیدبک غیر خطی می تواند ارتعاشات در سیستم را به صورت نمایی میرا سازد.

---

<sup>1</sup> Preload

<sup>2</sup> Flexible systems

<sup>3</sup> Descretizing

<sup>4</sup> Higher orders

<sup>5</sup> Strings

<sup>6</sup> Rods

کنترل مرزی بهینه در یک میله در حال ارتعاش در شماره [۲۸] ارائه شده است. همچنین پایداری و ناپایداری کنترل مرزی میله در حال ارتعاش در شماره [۲۹] مطالعه گردیده است. پایدار سازی مرزی برای تیر های الاستیک در مراجع [۱۵ و ۳۰-۳۷] ارائه شده است. کنترل مرزی با استفاده از پسخور سرعت و شتاب در مراجع [۳۱-۳۳] ارائه شده اند. همچنین کنترل مرزی بهینه<sup>۱</sup> در [۳۴-۳۶] ارائه شده است.

کنترلر های مرزی برای رباتهای حامل جثقیل که مانند یک تیر انعطاف پذیر عمل می نمایند، در [۳۸-۴۰] پیشنهاد شده اند. در [۳۸ و ۳۹] استرژژی کنترل که کنترل پسخور مستقیم نامیده می شود، برای کنترل ارتعاشات یک بازوی انعطاف پذیر که با یک تیر مدل شده به کار رفته است. این قانون کنترل با اعمال میرایی در معادلات حاکمه ارتعاشات را کاهش می دهد. در شماره [۴۰]، یک قانون کنترل که پسخوری از نیروی برشی در انتهای یک بازوی الاستیک است، برای کنترل ارتعاشات بازو استفاده شده است. همچنین پایداری نمایی حلقه بسته سیستم نشان داده شده است. در مراجع [۴۱-۴۴]، کنترلر های مرزی برای تیر انعطاف پذیر در حال دوران به کار برده شده است. در بیشتر این مراجع مولفان فرض نموده اند که دیسک حول محورش دوران می نماید. حرکت تیر در راستای عمود بر سطح مقطع محدود شده است. در مراجع [۴۳-۴۵]، نشان داده شده است که برای هر سرعت زاویه ای دلخواه کو چکتر از سرعت زاویه ای بحرانی، ارتعاشات تیر اجبارا به صورت نمایی میرا خواهد شد و دیسک با سرعت زاویه دلخواه به حرکت خود ادامه خواهد داد.

لاگنس<sup>۲</sup> در سال ۱۹۸۹ پیشنهاد داد که با استفاده از مرزهای ورق ارتعاشات آن را پایدار نمود [۴۶]. سپس رائو<sup>۳</sup> نشان داد که پایداری ارتعاشات عرضی در ورقهای الاستیک با استفاده از کنترل مرزی و برای شرایط مرزی خاص امکان پذیر می باشد [۴۶]. همچنین لیو<sup>۴</sup> جیانگ<sup>۵</sup> و هوانگ<sup>۶</sup> با استفاده از روش رائو نتایج یکسانی منطبق با تحقیقات لاگنس به دست آوردند، اما آنها نشان دادند که تنها پایداری مجانبی امکان پذیر است و پایداری نمایی امکان پذیر نیست [۴۷ و ۴۸]. همچنین در [۴۹-۵۰] ما نشان داده ایم که روش کنترل مرزی برای ارتعاشات با دامنه کم در ورقهای مرکب لایه های متقارن و غیر ایزوتروپیک امکان پذیر می باشد.

---

<sup>1</sup> Optimal boundary control

<sup>2</sup> Lagnese

<sup>3</sup> Rao

<sup>4</sup> Liu

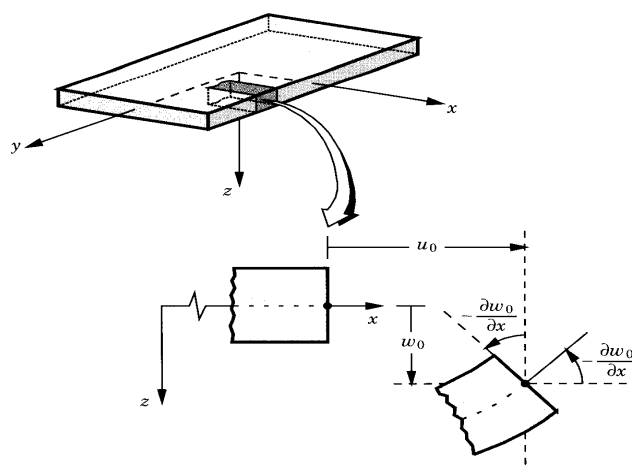
<sup>5</sup> Jiang

<sup>6</sup> Huang

## فصل دوم

### معادلات حاکم بر ورق های مرکب

مهمترین تئوری در زمینه خمش ورق ها، تئوری کلاسیک صفحات (CLPT) مبتنی بر فرضیه کیرشهف (Kirchhoff) می باشد [۱ و ۲]. بر اساس این فرضیه، بردارهای واحد مادی که قبل از تغییر شکل عمود بر صفحه میانی ورق بوده اند، بعد از تغییر شکل نیز واحد و عمود باقی خواهند ماند. لذا، کرنش عمودی عرضی صفر شده ( $\epsilon_z = 0$ ) و در نتیجه جابجایی عرضی مستقل از متغیر مکانی در جهت ضخامت صفحه خواهد شد. همچنین کرنش های برشی عرضی ( $\gamma_{xz}$  و  $\gamma_{yz}$ ) نیز صفر خواهند شد.



شکل ۱-۲ شکل تغییر فرم نیافته و تغییر فرم یافته لبه ای از ورق، با توجه به فرضیات کیرشهف

به طور کلی معادلات حاکم بر مواد الاستیک به سه دسته کلی معادلات هندسی، معادلات تعادل یا معادلات ارتعاشاتی و رابطه بین نیروها و گشتاور های درون صفحه ای با کرنش<sup>۱</sup> ها و انحنا<sup>۲</sup> ها تقسیم بندی می شوند. دو دسته اول از معادلات حاکمه برای ساختار های مختلف

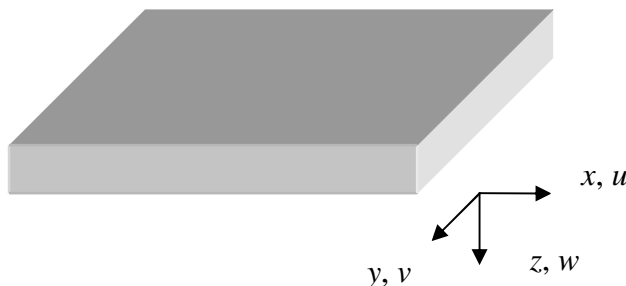
<sup>1</sup> Strain

<sup>2</sup> curvature

مواد اعم از ایزوتروپیک، مرکب، اف. جی. ام<sup>۱</sup> (FGM) یکسان می‌باشند. ما در این قسمت هریک از این معادلات را به اختصار توضیح خواهیم داد:

## ۱-۲ معادلات هندسی

در این قسمت برای به دست آوردن معادلات هندسی حاکم بر ورق‌ها از مدل کیرشهوف استفاده می‌نماییم [۱ و ۲]. بنابراین فرض می‌شود تغییر طول و در نتیجه تغییر مساحت در صفحه میانی ورق قابل نظر می‌باشد. همچنین فرض می‌شود که در اثر انحنای ورق سطح مقطع صفحه نسبت به محورهای  $x$  و  $y$  قائم باقی می‌ماند. در اثر نیروهای محوری و برشی درون صفحه ای هر نقطه دلخواه از یک جسم الاستیک می‌تواند جابه‌جایی<sup>۲</sup> و تغییر زاویه داشته باشد. جابه‌جایی در جهت  $x$  را با  $u$  و جابه‌جایی در جهت  $y$  را با  $v$  و جابه‌جایی در راستای  $z$  را با  $w$  نشان می‌دهیم. در شکل ۲-۲ یک المان از یک ماده الاستیک که جابه‌جایی‌ها در راستای  $x$ ،  $y$  و  $z$  یعنی  $u$ ،  $v$  و  $w$  بر روی آن مشخص است، نشان داده شده است.



شکل ۲-۲ المانی دلخواه از یک ورق با جابه‌جایی‌های نشان داده شده در سه راستا

اکنون مسئله مهم به دست آوردن کرنش‌های محوری<sup>۳</sup> و زاویه‌ای<sup>۴</sup> می‌باشد. برای این منظور بایستی مشخص گردد که آیا جابه‌جایی‌ها کوچک<sup>۵</sup> یا بزرگ<sup>۶</sup> هستند. در صورتی که جابه‌

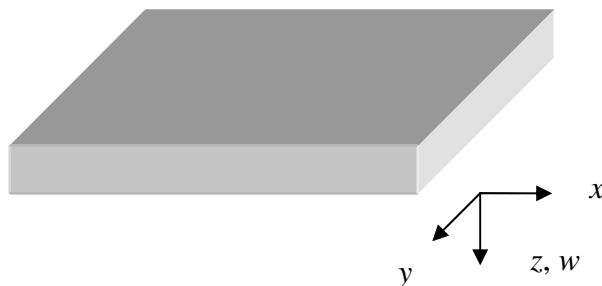
---

<sup>1</sup> Functionally graded materials  
<sup>2</sup> Displacements or Deflections  
<sup>3</sup> Axial strains  
<sup>4</sup> Shear strains  
<sup>5</sup> Small  
<sup>6</sup> Large

جایی ها بزرگ باشند روابط کرنش و جابه جایی ها غیر خطی و در صورتی که جابه جایی کوچک باشند روابط خطی خواهند بود [۵۱].  
 در قسمت‌های بعد به ترتیب روابط تنش<sup>۱</sup> و کرنش را با فرض جابه جایی کوچک و جابه جایی بزرگ در ورق ها ارائه می‌نماییم [۱ و ۲].

## ۲-۱- الف معادلات هندسی برای ورق با فرض جابه جایی کوچک

برای ورق های نازک با فرض جابه جایی کوچک از جا به جایی در راستای محور  $x$ ,  $u$  و جا به جایی در راستای محور  $y$ ,  $v$ , مربوط به صفحه میانی ورق صرف نظر می شود [۵۱] و تنها جابه جایی در راستای  $z$ ,  $w$ , لحاظ می گردد. این بدان معنی است که تغییر طول و تغییر مساحت در صفحه میانی ورق قابل صرف نظر کردن می باشد.



شکل ۲-۳ راستاهای محور  $x$ ,  $y$  و  $z$  همچنین جابه جایی در راستای  $z$  در شکل مشخص شده اند.

برای ورق های نازک در دو راستا کرنش محوری،  $\epsilon_x$  و  $\epsilon_y$  و همچنین کرنش صفحه ای  $\gamma_{xy}$  در نظر گرفته می شود.

روابط بین کرنش ها و جابه جایی ها به صورت زیر بیان می شوند:

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

(۱-۲)

<sup>1</sup> Stress



$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

(۲-۲)

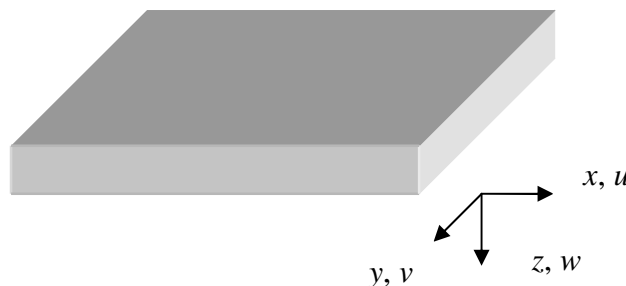
$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

(۳-۲)

در روابط بالا،  $\varepsilon_x$ ، کرنش محوری در راستای محور  $x$  بر حسب فاصله از محور میانی ورق،  $\varepsilon_y$ ، کرنش محوری در راستای محور  $y$  بر حسب فاصله از محور میانی ورق،  $z$ ، فاصله از محور خنثی و  $w$ ، جابه جایی در راستای محور  $z$  می‌باشند. همانطور که از روابط (۲-۲ تا ۳-۲) مشخص است کرنشها در صفحه میانی ورق برابر با صفر می‌باشند و این بدان دلیل است که از تغییر طول و در نتیجه تغییر مساحت صفحه میانی ورق صرف نظر شده است. همچنین کرنشها خطی می‌باشد که این امر به دلیل کوچک فرض شدن جابه جایی در راستای  $z$ ،  $w$ ، می‌باشد.

## ۲-۱- ب معادلات هندسی برای ورق با فرض جابه جایی بزرگ

برای ورق‌های نازک با فرض جابه جایی بزرگ، جابه جایی در راستای محور  $x$ ،  $u$  و جابه جایی در راستای محور  $y$ ،  $v$ ، مربوط به صفحه میانی ورق قابل نظر کردن نمی‌باشد همچنین جابه جایی در راستای  $z$ ،  $w$  بزرگ در نظر گرفته می‌شود [۵۱].



شکل ۲-۴. راستای محور  $x$ ،  $y$  و  $z$  همچنین جابه جایی در راستای  $x$ ،  $y$  و  $z$  در شکل مشخص شده است

به دلیل جابه جایی زیاد در راستای محور  $z$ ،  $w$  روابط بین کرنش ها و جابه جایی ها غیر خطی می باشند. حد بالایی  $w$  محدوده پلاستیک در نظر گرفته می شود یعنی جابه جایی در راستای  $z$  تا حدی می تواند بزرگ باشد که ورق وارده محدوده پلاستیک نشود.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (4-2)$$

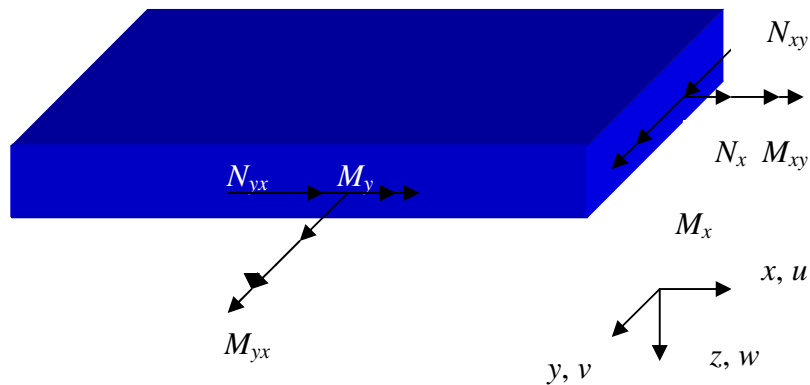
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (5-2)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (6-2)$$

دو ترم اول در طرف چپ معادلات (۴-۲ تا ۶-۲) ناشی کرنشهای محوری و زاویه ای در صفحه میانی ورق هستند که قابل صرف نظر کردن نمی باشند.

## ۲-۲ معادلات ارتعاشاتی حاکم بر ورق مرکب لایه ای

گشتاورها و نیروهای درون صفحه ای که بر یک المان از ورق عمل می نمایند در شکل (۵-۲) نشان داده شده اند:



شکل ۲-۵ نیروها و گشتاورهای درون صفحه ای وارد بر المان دلخواه از ورق به علاوه جابه جایی ها در سه راستا

در شکل بالا  $N_x$  نیروی محوری بر واحد طول در راستای محور  $x$  عمود بر سطح مقطع عمود بر محور  $x$ ،  $N_y$  نیروی محوری بر واحد طول در راستای محور  $y$  عمود بر سطح مقطع عمود بر محور  $y$ ،  $N_{xy}$  نیروی برشی بر واحد طول در راستای محور  $y$  مماس بر سطح مقطع عمود بر محور  $x$ ،  $N_{yx}$  نیروی برشی بر واحد طول در راستای محور  $x$  مماس بر سطح مقطع عمود بر محور  $y$ ،  $M_x$  و  $M_{xy}$  گشتاور خمشی بر واحد طول و گشتاور برشی بر واحد طول وارد بر سطح مقطع عمود بر محور  $x$  و  $M_y$  و  $M_{yx}$  گشتاور خمشی بر واحد طول و گشتاور برشی بر واحد طول وارد بر سطح مقطع عمود بر محور  $y$  می باشند.

## ۲-۲ الف معادلات ارتعاشاتی برای ورق با فرض جابه جایی کوچک

در این حالت جابه جایی  $w$  کوچک فرض می شود. در حالت کلی اگر نیروهای درون صفحه ای صرف نظر نگردد، معادلات حاکمه به صورت زیر بیان می گردند:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (7-2)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (8-2)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (9-2)$$

اگر از تغییر طول و در نتیجه تغییر مساحت صفحه میانی ورق صرف نظر شود، آنگاه اثر نیروی های درون صفحه ای  $N_x$ ،  $N_y$ ،  $N_{xy}$  و  $N_{yx}$  ناچیز می باشد. در این حالت معادله ارتعاشاتی خطی و به صورت زیر بیان می شود [۵۱]:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (10-2)$$

## ۲-۲-ب معادلات ارتعاشاتی برای ورق با فرض جابه جایی بزرگ

به دلیل اینکه در این قسمت جابه جایی  $w$  بزرگ می باشد، نمی توان از تغییر طول صفحه میانی ورق صرف نظر کرد و در نتیجه اثر نیروهای درون صفحه ای  $N_x$ ،  $N_y$ ،  $N_{xy}$  و  $N_{yx}$  لحاظ می گردد. در این حالت معادلات ارتعاشاتی غیرخطی و به صورت زیر بیان می شوند:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (11-2)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (12-2)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( N_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( N_{yx} \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$