بسم اللہ الرحمٰن الرحیم

دانشکده علوم پایه

« گروه ریاضی »

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان

حلقه‌های $g(x)-$ خوش‌ترکیب

نگارش:

زهرا احمدی ورزنه

استاد راهنما:

دکتر ناهید اشرفی

استاد مشاور:

دکتر علی معدنشکاف

آبان ۱۳۸۹

توجه:

لازم به ذکر است این پایان‌نامه با عنوان حلقه‌های $g(x)-$ ترکیب [1] به تصویب رسیده است. اما با توجه به این که اخیراً واژه‌ی "$clean$" باعنوان تمیز به فارسی برگردانده شده است در سرتاسر این پایان‌نامه به جای خوش‌ترکیب از کلمه‌ی تمیز استفاده می‌شود.

[1] g(x) - clean rings

حمد و سپاس

سپاس خداوندی را که سخنوران از ستودن آن عاجزند و حساب‌گران از شمارش نعمت های او ناتوان و تلاش‌گران از ادای حق او درمانده‌اند. خدایی که افکار ژرف‌اندیش، ذات او را درک نمی‌کنند و دست غواصان دریای علوم به او نخواهد رسید. پروردگاری که برای صفات او حد و مرزی وجود ندارد و تعریف کاملی نمی‌توان یافت و برای خدا وقتی معین و سرآمدی مشخص نمی‌توان تعیین کرد. مخلوقات را با قدرت خود آفرید، و با رحمت خود بادها را به حرکت درآورد و به وسیله‌ی کوه ها اضطراب و لرزش زمین را به آرامش تبدیل کرد.

نهج البلاغه، خطبه‌ی ۱.

تقدیم به :

ساحت مقدس کریمه‌ی اهل بیت فاطمه‌ی معصومه (سلام اللّه علیها).

و

امام شهیدان (رحمة اللّه علیه) و شهیدانی که کلام عشق گفتند و طریق دوست پیمودند. آنانکه با ریختن خون پاکشان، سلاح علم و دانش را در دستان ما به یادگار گذاشتند.

و

دیده‌گان منتظر و قلب آکنده از مهر و محبت پدر و مادر عزیزم.

تشکر و قدردانی

در اینجا بر خود لازم می‌دانم از استاد گرامی و بزرگوار سرکار خانم دکتر ناهید اشرفی که حضورش همه امید و کلامش آرامش بخش وجود من بود و مرا در نگارش این پایان‌نامه یاری رسانده‌اند کمال تشکر و سپاس‌گزاری را داشته باشم. همچنین از تمامی اساتید بزرگوار که در طول دوره‌ی تحصیلی کارشناسی ارشد، مرا در تحصیل علم و معرفت و فضائل اخلاقی یاری نموده‌اند تقدیر و تشکرمی‌نمایم.

چکیده

حلقه‌ی یکدار R را تمیز[۲] می‌نامیم هرگاه هر عنصر آن را بتوان به صورت مجموع یک عنصر یکه و یک عنصر خودتوان از R نوشت. همچنین اگر علاوه بر این شرایط عنصر یکه و خودتوان با یکدیگر جابه‌جا شوند، R را حلقه‌ی به‌طورقوی تمیز[۳] نامیده می‌شود. فرض کنید $C(R)$ مرکز حلقه‌ی R و $g(x)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب در $C(R)$ باشد. عنصر $r \in R$ را $g(x) -$ تمیز نامیم هرگاه داشته باشیم $r = u + s$، که در آن $g(s) = 0$ و u در R یکه است، و حلقه‌ی R را $g(x) -$ تمیز نامیم هرگاه هر عنصر آن $g(x) -$ تمیز باشد.

در این پایان‌نامه که برگرفته از مقاله‌ی حلقه‌های $g(x) -$ تمیز در منبع [۱۳] است، ابتدا با این نوع از حلقه‌ها آشنا می‌شویم و سپس خواص عمومی حلقه‌های $g(x) -$ تمیز که مشابه حلقه‌های تمیز است را مورد بررسی قرار خواهیم داد. به راحتی می‌توان نشان داد حلقه‌های تمیز حالت خاصی از حلقه‌های $g(x) -$ تمیز هستند، زیرا در این حالت کافیست $g(x) = x^2 - x$، انتخاب شود. در ادامه با خاص کردن $g(x)$، حلقه‌های $(x^2 + cx + d) -$ تمیز مورد بحث قرار می‌گیرند و در این راستا نشان داده می‌شود که اگر $g(x) \in (x-a)(x-b)C(R)[x]$ با این شرایط که $a, b \in C(R)$ و $b - a \in U(R)$، آن‌گاه حلقه‌های تمیز و $g(x) -$ تمیز معادل هستند. همچنین شرایط معادلی را برای حلقه‌های $(x^2 - 2x) -$ تمیز بدست می‌آوریم و نشان خواهیم داد که حلقه‌های $(x^2 - 2x) -$ تمیز دقیقاً حلقه‌هایی هستند که هر عنصر آن را بتوان به صورت مجموع دو عنصر یکه نوشت که یکی از آنها ریشه‌ی مربع واحد است. علاوه بر این حلقه‌های $(x^n - x) -$ تمیز را معرفی کرده و رابطه‌ی آنها را با حلقه‌های $2 -$ تمیز بیان می‌کنیم.

در پایان با توجه به مقاله‌ی حلقه‌های به‌طورقوی $g(x) -$ تمیز در منبع [۱۴]، حلقه‌های به‌طورقوی $g(x) -$ تمیز را تعریف کرده و سعی می‌کنیم برخی خواص و قضایای مربوط به حلقه‌های $g(x) -$ تمیز

---

[۲] clean
[۳] strongly clean ring

را برای آن‌ها به اثبات برسانیم. نتیجه‌ی این پایان‌نامه دو مقاله با عنوان‌های حلقه‌های به‌طورضعیف[۴] $g(x)$ — تمیز و حلقه‌های $g(x)$ — تمیز یک‌طرفه[۵] است که در فصل‌های ۴ و ۵ به آنها اشاره شده است.

واژه‌های کلیدی: حلقه‌ی تمیز، حلقه‌ی $g(x)$ — تمیز، حلقه‌ی به‌طورقوی $g(x)$ — تمیز، حلقه‌ی ماتریسی، حلقه‌ی به‌طورضعیف $g(x)$ — تمیز، حلقه‌ی $g(x)$ — تمیز یک‌طرفه.

---

[۴] weakly
[۵] one-sided

فهرست مندرجات

فصل ۱

پیش‌نیازها و مفاهیم اولیه

در این فصل با تعاریف و قضایایی آشنا می‌شویم که در فصول بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند. اثبات قضایایی که کاربرد فراوان دارند ارائه می‌گردد و از اثبات سایر قضایا صرف‌نظر می‌شود و آن‌ها را به منابع مورد استفاده ارجاع می‌دهیم. همچنین اکثر تعاریف و مفاهیم اولیه از منابع [۳۲] و[۳۳] بدست آمده‌اند.

۱.۱ مقدمه

در این پایان‌نامه با مفهوم حلقه‌های $g(x)-$ تمیز و به‌طورقوی $g(x)-$ تمیز آشنا می‌شویم و مطالبی مرتبط با این حلقه‌ها را بیان می‌کنیم. حلقه‌ی یکدار R، تمیز نامیده می‌شود هرگاه هر عنصر آن را بتوان به صورت مجموع یک عنصر یکه و یک خودتوان از R بیان کرد. این مفهوم اولین بار توسط نیکلسون [۱] [۲۱] مطرح شد. حلقه‌های تمیز به واسطه ارتباطی که با سایر حلقه‌ها دارند از اهمیت بالایی برخوردار هستند و همین امر موجب ارائه مقالات زیادی در سال‌های اخیر شده که نتایج مفیدی را دربرداشته است. همچنین نیکلسون در [۲۲] حلقه‌های به‌طورقوی تمیز را تعریف کرد که در آن شرط جابه‌جایی عنصر یکه و خودتوان را به تعریف تمیز بودن حلقه اضافه نمود.

حلقه‌های تمیز وسعت زیادی پیدا کرده‌اند و نویسندگان زیادی خاصیت تمیز بودن را روی حلقه‌های

[۱] Nicholson

مختلفی مورد بررسی قرار داده‌اند. به عنوان مثال، کامیلو و یو[۲] در [۶] نشان دادند که حلقه‌های منظم یکه، تمیز هستند همچنین نیکلسون و وارادارجان[۳] در [۲۳] حلقه‌های تمیز را روی فضاهای برداری تعمیم داده و اثبات کردند که تبدیلات خطی در فضاهای برداری با بعد شمارا روی حلقه‌های تقسیم، تمیز هستند.

کامیلو و سایمون[۴][۵] اولین کسانی بودند که مفهوم تمیز بودن را روی حلقه‌ی R گسترش داده و به جای خودتوان‌ها در حلقه‌های تمیز از ریشه‌ی چند جمله‌ای هایی استفاده کردند که ضرایبشان از مرکز حلقه‌ی R باشند. باید توجه داشت که خودتوان‌ها ریشه‌های چندجمله‌ای هایی به فرم $g(x) = x^n - x$ هستند. در این حالت فرض کنیم $C(R)$ مرکز حلقه‌ی یکدار R باشد و $g(x) \in C(R)[x]$. حلقه‌ی R، $g(x) -$ تمیز نامیده می‌شود اگر هر عنصر آن را بتوان به صورت مجموع یک عنصر یکه و ریشه‌ای از چندجمله‌ای $g(x)$ نوشت. آنها علاوه بر تعریف بالا، اثبات کردند که اگر V یک فضای برداری با بعد شمارا روی حلقه‌ی تقسیم D و $g(x)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب در $K = C(D)$ باشد که حداکثر دو ریشه‌ی مجزا در K دارد، آن‌گاه $End(V_D)$، یک حلقه‌ی $g(x) -$ تمیز است. در سال ۲۰۰۶، نیکلسون و زو[۵] در [۲۴] تعمیمی از نتیجه‌ی کامیلو و سایمون را ارائه دادند که بیان می‌داشت، فرض کنیم R یک حلقه باشد و $_RM$ یک $R -$ مدول چپ نیم‌ساده باشد. اگر $g(x) \in (x-a)(x-b)C(R)[x]$ به‌طوری‌که $a, b \in C(R)$ و $b, b-a$ هر دو در R یکه باشند آن‌گاه $End_R(M)$، $g(x) -$ تمیز است.

در این پایان‌نامه که برگرفته از این دو مقاله حلقه‌های $g(x) -$ تمیز [۱۳] و حلقه‌های به‌طورقوی $g(x) -$ تمیز [۱۴] است به تشریح خواص حلقه‌های $g(x) -$ تمیز خواهیم پرداخت و ارتباط آن را با حلقه‌های خارج قسمتی، چندجمله‌ای، سری‌های توانی و حلقه‌ی ماتریسی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

در ابتدای فصل یک با تعاریف کلی از حلقه و مدول آشنا می‌شویم و قضایای مرتبط با آنها را بیان می‌کنیم که در درک بهتر مطالب بخش‌های بعد بسیار مفید خواهد بود. در اواخر فصل یک به بیان و اثبات چند قضیه و لم از حلقه‌های تمیز می‌پردازیم که در اثبات برخی از قضایا در فصل‌های بعد کارساز

[۲] Camillo, V. P.,Yu
[۳] Varadarajan
[۴] Simon
[۵] Zhou

خواهد بود. در فصل دوم با مفهوم عنصر $g(x)$ — تمیز و همچنین حلقه‌ی $g(x)$ — تمیز آشنا خواهیم شد. این فصل در چهار بخش ارائه شده است. ابتدا خواصی از حلقه‌های $g(x)$ — تمیز را بیان می کنیم و همچنین قضایای مقدماتی در مورد حلقه‌های $g(x)$ — تمیز که کاربرد آنها در فصل‌های بعد بیشتر به چشم می‌خورد، اثبات خواهد شد. به عنوان مثال از مهمترین قضایای این فصل می‌توان به قضیه‌ی ۱.۲.۲ و قضیه‌ی ۳.۳.۲ اشاره کرد. علاوه بر این در این بخش توسیع‌های دیگری از حلقه‌های $g(x)$ — تمیز را معرفی کرده و با خاص کردن چندجمله‌ای $g(x)$، حلقه‌های $(x^۲+cx+)$ — تمیز و حلقه‌های (x^n-x) — تمیز را به همراه چند قضیه‌ی مهم بیان می‌کنیم. در فصل سوم حلقه‌های به‌طورقوی $g(x)$ — تمیز را تعریف می‌کنیم و قضایایی مشابه فصل دوم را در مورد این حلقه‌ها اثبات می‌کنیم. یکی از مهمترین مباحث فصل سوم در مورد حلقه‌ی گوشه‌ای eRe است. نویسنده در[۱۱ ،۹ ،۴] نشان داده است که اگر R به‌طورقوی تمیز باشد و $e^۲=e\in R$، آن‌گاه حلقه‌ی گوشه‌ای eRe به‌طورقوی تمیز است. در این قسمت از فصل ۳ و در قضیه‌ی ٦.۲.۳ مشابه این امر را برای حلقه‌های به‌طورقوی $g(x)$ — تمیز بررسی می‌کنیم. در ادامه، ما در فصل ۴ و ۵ با معرفی مفاهیم جدید حلقه‌های به‌طورضعیف $g(x)$ — تمیز و حلقه‌های $g(x)$ — تمیز یک‌طرفه، حلقه‌های $g(x)$ — تمیز را گسترش داده و نتایج و قضایایای را بیان می‌کنیم که برگرفته از مطالب موجود در فصل ۲ و ۳ می‌باشد و این مطالب در قالب ۲ مقاله توسط استاد راهنما و نویسنده‌ی پایان‌نامه ارائه گردیده است.

در اینجا همه‌ی تعاریف، لم ها و قضایا و نتایجی که مورد استفاده قرار گرفته، ابتدا شماره‌ی فصل، بعد شماره‌ی زیر بخش و سپس شماره‌ی تعریف، قضیه، ...آورده شده است. به طور مثال منظور از (طبق لم ۲.۲.۳) این است که ما به لم ۲ از بخش ۲ فصل ۳ اشاره کرده‌ایم.

۲.۱ تعاریف و قضایای اولیه

در این بخش به بیان و اثبات تعاریف و قضایایی می‌پردازیم که ما را در درک و فهم بهتر مطالب یاری رسانده و برای اثبات قضیه‌های فصل‌های بعد مورد نیاز هستند.

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنید G و G' دو گروه باشند، تابع $\varphi : G \longrightarrow G'$ را یک همریختی گروه‌ها نامیم هرگاه برای هر $a, b \in G$،

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$$

تعریف ۲.۲.۱ فرض کنید G یک گروه باشد، در این صورت هر یکریختی از G به G را یک خودریختی می‌نامیم و مجموعه تمام یکریختی‌های G را با نماد $Aut(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۲.۱ حلقه عبارت است از یک مجموعه‌ی غیر تهی مانند R همراه با دو عمل دوتایی (که معمولاً به صورت جمع $(+)$ و ضرب نموده می شوند) به‌طوری‌که:

۱) $(R, +)$ یک گروه آبلی است؛

۲) به ازای هر $a, b, c \in R$، $(ab)c = a(bc)$ (ضرب شرکت‌پذیر است)؛

۳) $a(b + c) = ab + ac$ و $(a + b)c = ac + bc$ (قوانین پخش‌پذیری از چپ و از راست).
هرگاه علاوه براین

۴) به ازای هر $a, b \in R$، $ab = ba$، گوییم R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر است.

۵) هرگاه R شامل عنصری مانند 1_R باشد به‌طوری‌که به ازای هر $a \in R$، $a1_R = 1_Ra = a$، گوییم R یک حلقه‌ی یکدار است.

تبصره ۴.۲.۱ ما در این جا حلقه‌ها را یکدار در نظر می‌گیریم. در بعضی مواقع برای تأکید یکدار بودن حلقه را قید می‌کنیم.

تعریف ۵.۲.۱ حلقه‌ی R را یک حلقه‌ی تقسیم گوییم اگر هر عضو مخالف صفر R تحت عمل ضرب دارای وارون باشد.

تعریف ۶.۲.۱ حلقه‌ی R را میدان گوییم هرگاه R یک حلقه‌ی بخشی جابه‌جایی باشد.

تعریف ۷.۲.۱ فرض کنید R یک حلقه یاشد. زیرمجموعه‌ی ناتهی I از حلقه‌ی R را یک ایدآل چپ (راست) می‌نامیم مشروط بر اینکه

۱) هرگاه $a, b \in I$، آن‌گاه $a - b \in I$؛

۲) هرگاه $a \in I$ و $r \in R$، آن‌گاه $ra \in I$ $(ar \in I)$.

تعریف ۸.۲.۱ I را ایدآل حلقه‌ی R می‌نامیم هرگاه هم ایدآل چپ R و هم ایدآل راست R باشد.

لم ۹.۲.۱ فرض کنید R یک حلقه‌ی یکدار و $a \in R$ عضو دلخواهی از R باشد. در این صورت مجموعه‌ی $aR = \{ar \;\;:\;\; r \in R\}$، یک ایدآل راست R است.

تعریف ۱۰.۲.۱ اگر R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد آن‌گاه aR یک ایدآل R است و اصطلاحاً به این ایدآل، ایدآل اصلی تولید شده توسط a گفته می‌شود.

تعریف ۱۱.۲.۱ فرض کنیم R یک حلقه و P یک ایدآل در R باشد، در این صورت P را یک ایدآل اول نامیم هرگاه به ازای هر $a, b \in R$، اگر $ab \in P$ آن‌گاه $a \in P$ یا $b \in P$.

تبصره: مجموعه‌ی کلیه‌ی ایدآل‌های اول از حلقه R را با $Spect(R)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱.۲.۱۲ فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابه‌جایی و یکدار باشد و P یک ایدآل از R باشد، در این صورت R/P یک حوزه صحیح است اگر و تنها اگر P یک ایدآل اول واقعی باشد.

برهان . رجوع شود به قضیه ۲.۱٦ از مرجع [۳۲]. ■

تعریف ۱.۲.۱۳ اگر R یک حلقه باشد، $a \in R$ را عضو پوچتوان گویند، هرگاه $n \in \mathbb{N}$ یافت شود به طوری که $a^n = 0$.

قضیه ۱.۲.۱۴ مجموعه‌ی متشکل از همه‌ی عضو های پوچتوان در حلقه‌ی R، ایدآل است.

تعریف ۱.۲.۱۵ مجموعه‌ی کلیه‌ی عناصر پوچتوان R را رادیکال پوچ [٦] می‌نامیم و آن را با $\sqrt{(0)}$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱.۲.۱٦ رادیکال پوچ از حلقه‌ی R، اشتراک همه‌ی ایدآل های اول در R است. یعنی

$$\sqrt{(0)} = \bigcap_{p \in Spect(R)} P$$

برهان . اثبات را در لم ۳.۴۸ از مرجع [۳۱] ببینید. ■

[٦] Nilradical

تعریف ۱۷.۲.۱ فرض کنید I یک ایدآل R باشد. I را ایدآل ماکسیمال نامیم هرگاه سره باشد و هیچ ایدآل سره‌ی دیگری از R که به طور سره شامل I باشد، موجود نباشد. به عبارت دیگر بین I و R هیچ ایدآل سره‌ی دیگری موجود نباشد.

تعریف ۱۸.۲.۱ فرض کنیم R یک حلقه باشد. اشتراک تمام ایدآل‌های ماکسیمال چپ از حلقه‌ی R را رادیکال ژیکوبسون[۷] R می‌نامیم و معمولاً آن را با $J(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۹.۲.۱ زیرمجموعه‌ی S از حلقه‌ی A را زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی $(\mathrm{m.c.s})$[۸] نامیم هرگاه $1 \in S$ و به ازای هر $x, y \in S$ داشته باشیم $xy \in S$.

گزاره ۲۰.۲.۱ فرض کنید I یک ایدآل واقعی از R باشد. در این صورت ایدآل ماکسیمالی از R شامل I وجود دارد. به خصوص هر حلقه نابدیهی حداقل دارای یک ایدآل ماکسیمال است.

برهان . به قضیه‌ی ۹.۳ و نتیجه ۱۰.۳ از مرجع [۳۱] مراجعه کنید. ■

لم ۲۱.۲.۱ اگر R یک حلقه باشد و $x \in R$ آن‌گاه x در R یکه است اگر و تنها اگر به هیچ ایدآل ماکسیمالی از R تعلق نداشته باشد.

برهان . فرض کنید x در R یکه باشد. به برهان خلف اگر m ایدآلی ماکسیمالی از R باشد که $x \in m$. چون x یکه است پس $xx^{-1} \in m$ یعنی $1 \in m$ بنابراین $m = R$ و این با سره بودن m در تناقض است. به عکس اگر x به هیچ ایدآل ماکسیمالی از R تعلق نداشته باشد آن‌گاه Rx به هیچ ایدآل ماکسیمالی تعلق ندارد. ادعا می‌کنیم $1 \in Rx$ زیرا در غیر این صورت Rx یک ایدآل واقعی از R است و طبق گزاره‌ی ۲۰.۲.۱ ایدآل ماکسیمالی از R شامل Rx وجود دارد. پس $1 \in Rx$ یعنی $r \in R$ موجود است به‌طوری‌که $rx = 1$، در نتیجه x در R یکه است. ■

---
[۷] Jacobson radical
[۸] multiplicatively closed subset

لم ۲۲.۲.۱ فرض کنیم R یک حلقه و $J(R)$ جیکوبسون رادیکال R باشد، در این صورت $x \in J(R)$ است اگر و تنها اگر به ازای هر $y \in R$، $1 - xy$ در R یکه باشد.

لم ۲۳.۲.۱ فرض کنید R یک حلقه یکدار باشد. اگر $r \in J(R)$ آن‌گاه برای هر $a \in U(R)$، $r + a$ در R یکه است.

برهان . چون $r \in J(R)$ است طبق قضیه‌ی ۲۲.۲.۱ برای هر $y \in R$، $1 - yr \in U(R)$. اگر قرار دهیم $y = -a^{-1}$ آن گاه داریم $1 + a^{-1}r \in U(R)$. پس $(1 + a^{-1}r)^{-1} \in U(R)$ از طرفی چون a هم در R یکه است داریم $(1 + a^{-1}r)^{-1}a^{-1} \in U(R)$. به راحتی می‌توان بررسی کرد $(1 + a^{-1}r)^{-1}$ عنصر وارون $r + a$ است. ∎

گزاره ۲۴.۲.۱ هرگاه R, S دو حلقه‌ی یکدار باشند و $f : R \longrightarrow S$ یک بروریختی حلقه‌ای باشد آن‌گاه $f(1_R) = 1_S$.

در این قسمت ما حلقه‌های نوتری و آرتینی را که کاربردهای مهمی در جبر دارند یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۲۵.۲.۱ فرض کنیم B یک حلقه باشد. گوییم B درشرط زنجیر کاهشی (DCC) بر ایدآل ها صدق می کند اگر به ازای هر زنجیر اکید

$$B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \dots$$

از ایدآل های B، عدد صحیح مانند m باشد به‌طوری‌که به ازای هر $i \geq m$، $B_i = B_m$.

تعریف ۲۶.۲.۱ حلقه‌ی R آرتینی چپ (راست) است اگر R در شرط زنجیر کاهشی بر ایدآل های چپ (راست) صدق کند.