دانشکده علوم ریاضی

ارائه شده جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی کاربردی- آنالیز عددی

عنوان:

تبدیل فوریهٔ سریع و کاربردهایی از آن

استاد راهنما:

آقای دکتر اصغر کرایه‌چیان

استاد مشاور:

خانم دکتر فائزه توتونیان

نگارنده:

محمد گلچیان

بهمن ۸۸

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به روح پدرم که زندگیم از اوست

تقدیم به مادرم که روح زندگیم از اوست

فهرست مطالب

پیشگفتار

روش و ایدهٔ کلی تبدیل فوریهٔ سریع با انتشار کارهای کولی و توکی در سال ۱۹۶۵ معرفی شد، امّا بعدها کشف شد که هر دو نویسنده مستقلاً یک الگوریتم منسوب به کارل فردریک گاوس را مربوط به حدود سال ۱۸۰۵، مجدّداً ابداع کرده‌اند.گاوس اولین کسی بود که روشی را که ما امروزه تبدیل فوریهٔ سریع می‌نامیم، برای محاسبهٔ ضرایب در بسط مثلثاتی بنیان نهاد. هرچند، این کارهای کولی و توکی در سال ۱۹۶۵ بود که توجه انجمن علوم و مهندسی را به این روش معطوف داشت. تأثیر تبدیل فوریهٔ سریع کولی و توکی تا حدی فراوان بود که مسائلی می‌توانستند به سرعت حل شوند که حتی تا چند سال قبل امکان بررسی آنها وجود نداشت.

تحقیقات فراوان باعث پیشرفت نظریه‌ها و برنامه‌های عملی شدند. در سال ۱۹۹۷ فریگو و جانسون برنامه‌ای ساختند و آن را FFTW (Fastest Fourier Transform in West) نامیدند که نتایج جدید این کار جایزهٔ ویلکینسون را برای نرم‌افزارهای عددی در سال ۱۹۹۹ از آن خود کرد. نظر به کاربرد فراوان و قدمتی که به بیش از ۲۰۰ سال قبل برمی‌گردد، بدون شک می‌توان تبدیل فوریهٔ سریع را یکی از مهمترین الگوریتمهای عددی در علوم، مهندسی، و ریاضیات کاربردی دانست.

در فصل اول این پایان‌نامه به معرفی تبدیل فوریهٔ سریع و برخی از مهمترین الگوریتمهای آن می‌پردازیم. الگوریتمهای توان۲، صفرگذاری و نیز نگاشت اندیس از جمله بخشهای این فصل می‌باشند.

در فصل دوم، کاربرد تبدیل فوریهٔ سریع را در محاسبات مربوط به ماتریسهای توپلیتز مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این فصل ابتدا در مورد روش گرادیان مزدوج، پیش شرط سازی و خواص ماتریسهای مدور بحث خواهیم کرد و سپس محاسبهٔ ماتریسهای توپلیتز را با استفاده از تبدیل فوریهٔ سریع مورد مطالعه قرار می‌دهیم. سرانجام به بیان پیش شرطهای مدور و ارائهٔ مثال عددی می‌پردازیم.

در فصل سوم، به کاربرد تبدیل فوریهٔ سریع در حاصلضرب اعداد صحیح بزرگ می‌پردازیم. مرتبهٔ زمانی الگوریتم معمول برای حاصلضرب دو عدد صحیح $O(N^2)$ است اما در این فصل نشان خواهیم داد که با استفاده از تبدیل فوریهٔ سریع و استفاده از قضیهٔ باقیماندهٔ چینی می‌توان این عمل را با مرتبهٔ زمانی $O(N \log^2 N \log\log N)$ محاسبه کرد.

در فصل چهارم این پایان‌نامه مسألهٔ یافتن جوابهای عددی دستگاههای جبری خطی $a \times x = b$، در حالتی که ماتریس ضرایب $N \times N$ بوده و بدوضع می‌باشد، مطالعه کرده‌ایم. یک روش جدید ساده را مورد بررسی قرار داده‌ایم که با به‌کارگیری تبدیل فوریهٔ سریع ماتریس ضرایب و مقادیر سمت راست مسأله را از حالت بدوضعی خارج می‌کند. روش کاهش گاوس- جردن برای حل دستگاه خطی حاصل مورد استفاده قرار می‌گیرد و معکوس تبدیل فوریهٔ سریع برای به‌دست آوردن یک جواب عددی از دستگاه خطی اصلی به‌کار برده می‌شود. در ادامه، روش پیشنهادی با روش تجزیهٔ مقدار تکین و روش QR در قالب یک مثال مقایسه خواهد شد.

در فصل پنجم به کاربرد تبدیل فوریهٔ سریع در حل عددی معادلهٔ پواسن، به عنوان نمونه‌ای از معادلات با مشتقات جزئی می‌پردازیم. از آنجا که پیش از به‌کار بردن تبدیل فوریهٔ سریع در حل عددی معادلهٔ پواسن لازم است تا با استفاده از روش تفاضلات متناهی، که یک روش اساسی در حل عددی معادلات با مشتقات جزئی است، معادله را گسسته‌سازی کنیم، در این فصل ابتدا مختصراً روش تفاضلات متناهی را مورد بررسی قرار خواهیم داد. در ادامه به تعریف تبدیل فوریهٔ گسستهٔ دوبعدی و چگونگی بهره جستن از تبدیل فوریهٔ سریع در حل عددی معادلهٔ پواسن می‌پردازیم. این فصل را با ارائهٔ یک مثال عددی خاتمه می‌دهیم.

در انتها نیز برنامه‌های Matlab متناظر با هر فصل در ضمیمهٔ متناظر با شمارهٔ همان فصل ارائه شده است.

فصل ۱

تبدیل فوریهٔ سریع

۱–۱ تبدیل فوریهٔ گسسته[1]

تبدیل فوریهٔ گسسته یک تبدیل پایه‌ای است که برای محاسبات عددی در پردازش سیگنال دیجیتال به‌کار برده می‌شود. این تبدیل دارای کاربردهای فراوان در پردازش تصاویر، ضرب دو چندجمله‌ای، حل معادلات با مشتقات جزئی و غیره است. تبدیل فوریهٔ گسسته، N نمونهٔ زمان گسسته را به همان تعداد نمونهٔ فرکانس گسسته تبدیل می‌کند، و به این صورت تعریف می‌شود:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(x(n) e^{-\left(j \frac{2\pi nk}{N}\right)} \right) \qquad k = 0,1,\ldots,N-1 \qquad (1\text{-}1\text{-}1)$$

که در آن $j^2 = -1$ یکّهٔ موهومی و $X(k)$ و $x(n)$ در حالت کلی مختلط هستند. یکی از دلایلی که تبدیل فوریهٔ گسسته دارای کاربرد فراوان می‌باشد، به دلیل محاسبهٔ آن توسط یک الگوریتم بسیار کارآ به نام *تبدیل فوریهٔ سریع*[2] است.

با فرض $\omega = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$، شکل ماتریسی تبدیل فوریهٔ گسسته را می‌توان به‌صورت زیر ذکر کرد:

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-2) \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{(N-1)} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{(N-1)} & \omega^{2(N-1)} & \cdots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-2) \\ x(N-1) \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}1\text{-}1)$$

ماتریس فوریه، که از این پس آن را با F یا F_N نشان می‌دهیم عبارت است از:

$$F = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{(N-1)} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{(N-1)} & \omega^{2(N-1)} & \cdots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}1\text{-}1)$$

---

[1] Discrete Fourier Transform (DFT)

[2] Fast Fourier Transform (FFT)

۱-۱-۱ معکوس تبدیل فوریهٔ گسسته[۳]

معکوس تبدیل فوریهٔ گسسته N نمونهٔ فرکانس گسسته را به همان تعداد نمونهٔ زمان گسسته تبدیل می‌کند. معکوس تبدیل فوریهٔ گسسته شکلی بسیار مشابه تبدیل فوریهٔ گسسته دارد

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(X(k)e^{j\frac{2\pi nk}{N}}\right) \qquad n = 0,1,\dots,N-1 \qquad (۴-۱-۱)$$

و لذا می‌تواند به صورت کاراً توسط تبدیل فوریهٔ سریع محاسبه شود.

در ادامه به بررسی برخی از خواص معروف تبدیل فوریهٔ گسسته و معکوس آن می‌پردازیم. به منظور سهولت، اگر $X(k)$ تبدیل فوریهٔ گسستهٔ $x(n)$ باشد، که در نتیجه $x(n)$ معکوس تبدیل فوریهٔ گسستهٔ $X(k)$ خواهد شد، از نماد زیر برای نشان دادن این امر استفاده می‌کنیم:

$$x(n) \quad \underset{IDFT}{\overset{DFT}{\rightleftarrows}} \quad X(k)$$

۲-۱-۱ خواص تبدیل فوریهٔ گسسته و معکوس آن

۱. خطی بودن:

برای هر دو عدد $a,b \in \mathbb{C}$ داریم:

$$ax(n) + by(n) \underset{IDFT}{\overset{DFT}{\rightleftarrows}} \quad aX(k) + bY(K)$$

۲. تقارن:

$$x(-n) \underset{IDFT}{\overset{DFT}{\rightleftarrows}} \quad \frac{1}{N}X(k)$$

۳. انتقال زمان:

$$x(n-m) \qquad \underset{IDFT}{\overset{DFT}{\rightleftarrows}} \quad e^{-j\frac{2nm\pi}{N}}X(k)$$

۴. انتقال فرکانس:

$$e^{j\frac{2nm\pi}{N}}x(n) \quad \underset{IDFT}{\overset{DFT}{\rightleftarrows}} \quad X(k-m)$$

---

[۳] Inverse Discrete Fourier Transform (IDFT)

۵. تناوب:

$$\begin{cases} x(n+N) = x(n) \\ X(k+N) = X(k) \end{cases}$$

۶. پیچش مدور:

$$x(n) * y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \Big(x(m)(y(n-m)\Big)_N \quad \xrightleftharpoons[IDFT]{DFT} \quad X(k)Y(k)$$

که در آن $((x))_N$ نشان‌دهندهٔ باقیماندهٔ x به پیمانهٔ N است.

۷. خاصیت حاصلضرب:

$$x(n)y(n) \qquad \xrightleftharpoons[IDFT]{DFT} \quad \frac{1}{N} X(k) * Y(k)$$

۸. قضیهٔ پارسوال:

$$\sum_{n=0}^{N-1} (|x(n)|)^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (|X(k)|)^2$$

برای اثبات این خواص مرجع [۱] را مشاهده کنید.

در بخش بعدی مختصراً به تاریخچهٔ تبدیل فوریهٔ سریع می‌پردازیم

۱–۱–۳ تاریخچهٔ تبدیل فوریهٔ سریع

می‌دانیم که *کارل فردریک گاوس*[۴] اولین کسی بود که در سال ۱۸۰۵ تبدیل فوریهٔ سریع را برای محاسبهٔ مدار سیارات به‌وسیلهٔ سریهای فوریهٔ گسسته ابداع کرد. الگوریتمهای تبدیل فوریهٔ سریع گوناگونی در دو قرن بعد از آن به صورت مستقل اختراع شدند، اما تبدیلات فوریهٔ سریع اعتبار و تأثیر خود را تنها با معرفی الگوریتم *کولی*[۵] و *توکی*[۶] در سال ۱۹۶۵ کسب کردند. از آن پس تاکنون الگوریتمهای گوناگونی کشف شده‌اند و یا تعمیم یافته‌اند و امروزه الگوریتمهای تبدیل فوریهٔ سریع کارآیی برای تبدیلات فوریهٔ گسسته با هر طول دلخواه موجود است.

[۴] C. F. Gauss

[۵] Cooley

[۶] Tukey

۱–۲ نگاهی کلی به الگوریتمهای تبدیل فوریهٔ سریع

تبدیل فوریهٔ سریع، برخلاف نامش، یک تبدیل نیست، بلکه یک الگوریتم محاسباتی کاراً برای محاسبهٔ تبدیل فوریهٔ گسسته است. روش محاسبهٔ مستقیم یک تبدیل فوریهٔ گسسته با طول N که به‌صورت (۱–۱–۱) تعریف شده باشد، محاسبهٔ هر $X(k)$ نیازمند N عمل ضرب مختلط و $N-۱$ عمل جمع مختلط می‌باشد. بنابراین محاسبهٔ تمام N نمونهٔ فرکانس نیاز به $N^۲$ عمل ضرب مختلط و $N(N-۱)$ عمل جمع مختلط دارد. البته با این فرض که ضرایب تبدیل فوریهٔ گسسته، یعنی $W_N^{nk}=e^{-\left(j\frac{۲\pi nk}{N}\right)}$، از پیش محاسبه شده باشند؛ در غیر این صورت، هزینه از این هم سنگین‌تر خواهد بود. برای تبدیلات فوریهٔ گسسته با طول بزرگ، که دارای کاربرد بسیاری نیز هستند، ممکن است محاسبهٔ $N^۲$ عمل بسیار گران یا عملاً امکانپذیر نباشد. بنابراین تبدیلات فوریهٔ گسسته در عمل تقریباً همیشه توسط یک الگوریتم تبدیل فوریهٔ سریع محاسبه می‌شوند.

راهکار اصلی در پشت اغلب الگوریتمهای تبدیل فوریهٔ سریع، تجزیهٔ یک تبدیل فوریهٔ گسسته با طول N به تعدادی تبدیل فوریهٔ گسسته با طول کوتاهتر است، که خروجیهای هریک، برای محاسبهٔ نتیجهٔ نهایی، چندین بار مورد استفادهٔ مجدد قرار می‌گیرند. چگونگی انتخاب طولهای تبدیلات فوریهٔ گسستهٔ کوتاه، که اعدادی صحیح و متناظر با عوامل طول تبدیل فوریهٔ گسسته، یعنی N، هستند منجر به ایجاد الگوریتمهای متفاوتی برای طولها و عوامل مختلف می‌گردد.

از گذشته رایج‌ترین تبدیلات فوریهٔ سریع، طول را توانی از ۲، یعنی $N=۲^M$ اختیار می‌کردند که منجر به الگوریتمهای تبدیل فوریهٔ سریع بسیار کارآیی شامل الگوریتمهای دسته‌بندی بر حسب زمان مبنا ۲ و دسته‌بندی بر حسب فرکانس مبنا ۲، الگوریتمهای تبدیل فوریهٔ سریع مبنا ٤ ($N=۴^M$)، و الگوریتمهای تبدیل فوریهٔ سریع مبنا دوبخشی می‌شود که در ادامه به بررسی آنها خواهیم پرداخت. الگوریتمهای توان ۲ کارآیی بالای خود را از دو طریق کسب می‌کنند:

۱. استفادهٔ مجدد از نتایج میانی

۲. پیچیدگی محاسباتی کم برای تبدیلات فوریهٔ گسسته با طول ۲ و ٤، زیرا نیاز به هیچ عمل ضربی ندارند.

الگوریتمهایی که برای طولهای با عامل مشترک تکراری، مانند طول ۲ یا ٤، به ترتیب، در الگوریتمهای مبنا ۲ و مبنا ٤ وجود دارند، نیازمند ضرب عاملی موسوم به *عامل صوری*[۷] بین تبدیلات فوریهٔ گسسته با طول کوتاه می‌باشند، که با هم منجر به یک پیچیدگی محاسباتی از مرتبهٔ $O(N \log N)$ می‌شوند که یک صرفه‌جویی قابل توجه نسبت به محاسبهٔ مستقیم تبدیل فوریهٔ گسسته است.

عوامل صوری در الگوریتمهای تبدیل فوریهٔ سریع، به ضرایب ثابت مثلثاتی (نمایی) اطلاق می‌شود که برای به‌دست آوردن الگوریتم در داده‌ها ضرب می‌شوند که در اصل، این عوامل صوری، همان ریشه‌های مختلط واحد می‌باشند.

ردهٔ بزرگ دیگری از الگوریتمها، الگوریتمهای عامل اول هستند. در الگوریتمهای عامل اول، طولهای تبدیلات فوریهٔ گسسته کوتاهتر باید نسبت به هم اول باشند. این الگوریتمها نیز کارآیی خود را از دو راه به‌دست می‌آورند:

۱. استفادهٔ مجدد از نتایج میانی

۲. حذف حاصلضرب عوامل صوری

هرچند الگوریتمهای عامل اول نسبت به الگوریتمهای توان ۲، نیازمند تعداد اعمال بیشتری برای محاسبهٔ تبدیلات فوریهٔ گسسته با طول کوتاه اول هستند، اما هزینهٔ نهایی محاسبات الگوریتمهای عامل اول و الگوریتمهای توان ۲، برای تبدیلات فوریهٔ گسسته با طول یکسان تقریباً یکسان است و می‌توان با مقایسهٔ این هزینه‌های نهایی، کارآیی آنها را مورد بررسی قرار داد.

با توجه به اینکه تبدیلات فوریهٔ گسسته‌ای که دارای طول اول هستند، نمی‌توانند به تبدیلات کوچکتر تجزیه شوند، دو روش تبدیل *ریدر*[۸] و تبدیل Z، این تبدیلات فوریهٔ گسسته با طول اول را به یک پیچش با طولی متفاوت برمی‌گردانند که این پیچشها سپس می‌توانند به صورت کارآیی با استفاده از تبدیلات فوریهٔ سریع به‌وسیلهٔ پیچش سریع محاسبه گردند.

در این فصل ما تنها به الگوریتمهای تبدیل فوریهٔ سریع توان۲ و چگونگی تعمیم آنها به هر طول دلخواه، با استفاده از عمل صفرگذاری، و نیز نگاشت اندیس می‌پردازیم.

---

[۷] Twiddle Factor

[۸] Rader

۳–۱ تبدیلات فوریهٔ سریع توان۲

از گذشته، تبدیلات فوریهٔ سریع با طول $N = ۲^M$ رایج‌ترین الگوریتمهای مورد استفاده برای تبدیل فوریهٔ گسسته بوده‌اند. این الگوریتمها، بسیار کاراً و نسبتاً ساده هستند و نیز تنها یک برنامه می‌تواند هر تبدیل فوریهٔ سریع توان۲ با طولهای مختلف را محاسبه کند. کارآیی این الگوریتمها در محاسبهٔ همزمان تمام نقاط با استفادهٔ مجدد از محاسبات میانی حاصل می‌شود، لذا این برنامه‌ها در حالتی که تعداد نمونه‌های فرکانس تبدیل فوریهٔ گسسته زیاد باشد کارآیی بیشتری دارند. ساده‌ترین تبدیل فوریهٔ سریع توان۲، تبدیل فوریهٔ دسته‌بندی برحسب زمان مبنا ۲ و دسته‌بندی برحسب فرکانس مبنا ۲ می‌باشد. این الگوریتمها محاسبهٔ یک تبدیل فوریهٔ گسسته با طول $N = ۲^M$ را به یک سری محاسبات تبدیل فوریهٔ گسسته به طول۲، همراه با ضرب مختلط عوامل صوری بین آنها، کاهش می‌دهند.

الگوریتم تبدیل فوریهٔ سریع مبنا ٤، به‌طور مشابه، محاسبهٔ تبدیل فوریهٔ گسسته با طول $N = ۴^M$ را به یک سری محاسبات تبدیل فوریهٔ گسسته با طول٤، همراه با ضرب عوامل صوری بین آنها، کاهش می‌دهد. تبدیل فوریهٔ سریع مبنا ٤، تنها به ٧٥٪ اعمال ضرب مختلط نسبت به تبدیل فوریهٔ سریع مبنا ۲ نیاز دارد؛ اما تعداد اعمال جمع مختلط در هر دو الگوریتم یکسان است. برای اندکی کاهش بیشتر در محاسبات، الگوریتمهای مبنا۸ و بالاتر نیز می‌توانند با استفاده از نگاشت اندیس چندبعدی، که در بخشهای بعد به آن اشاره می‌کنیم، استخراج شوند. همچنین از ترکیب دو الگوریتم مبنا ۲ و مبنا ٤ الگوریتمی به نام الگوریتم مبنا دوبخشی به‌دست می‌آید که از هر مبنایی بهتر عمل می‌کند و تعداد اعمال ضرب مختلط آن تنها $\frac{۲}{۳}$ الگوریتم مبنا ۲ است.

تمام این الگوریتمها باعث صرفه‌جویی چشمگیری نسبت به محاسبهٔ مستقیم تبدیل فوریهٔ گسسته می‌شوند و پیچیدگی محاسباتی آن را از $O(N^۲)$ به $O(N \log N)$ کاهش می‌دهند. البته کارآیی یک پیاده‌سازی تبدیل فوریهٔ سریع مناسب، تنها به کاهش تعداد اعمال بستگی ندارد، بلکه ترفندهای برنامه‌نویسی نیز می‌توانند باعث کاهش در زمان اجرای برنامهٔ تبدیل فوریهٔ سریع شوند.

۱-۳-۱ الگوریتم دسته بندی برحسب زمان مبنا ۲

این الگوریتم تبدیل فوریهٔ گسسته را به دو بخش تقسیم می‌کند:

۱. یک جمع‌بندی روی اندیسهای زوج زمان $n = [0, 2, 4, \ldots, N-2]$

۲. یک جمع‌بندی روی اندیسهای فرد زمان $n = [1, 3, 5, \ldots, N-1]$

یعنی

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1}\left(x(n)\, e^{-\frac{2k\pi j}{N}}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}\left(x(2n)\, e^{-\frac{2k\pi j(2n)}{N}}\right) + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}\left(x(2n+1)\, e^{-\frac{2k\pi j(2n+1)}{N}}\right) \qquad (1\text{-}3\text{-}1)$$

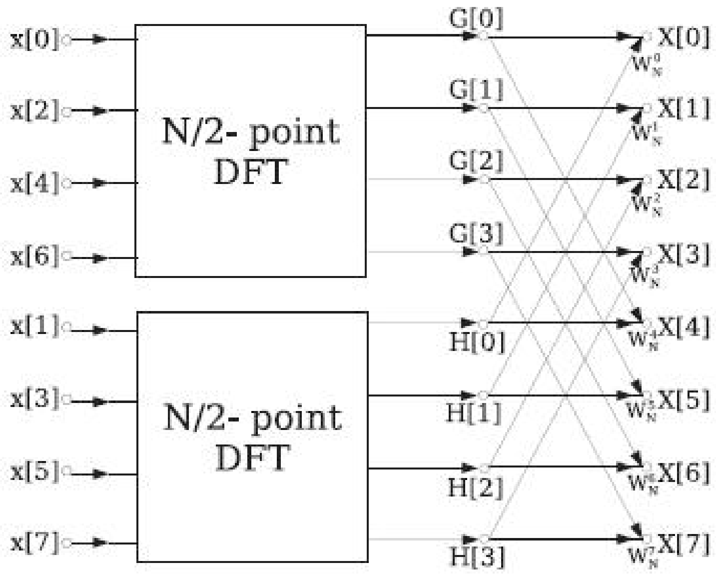
$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}\left(x(2n)\, e^{-\frac{2k\pi jn}{\frac{N}{2}}}\right) + e^{-\frac{2k\pi j}{N}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}\left(x(2n+1)\, e^{-\frac{2k\pi jn}{\frac{N}{2}}}\right)$$

$$= DFT_{\frac{N}{2}}\Big[\big[x(0), x(2), \ldots, x(N-2)\big]\Big] + W_N^k DFT_{\frac{N}{2}}\Big[\big[x(1), x(3), \ldots, x(N-1)\big]\Big]$$

ساده‌سازیهای ریاضی در (۱-۳-۱) معلوم می‌کند که تمام خروجیهای فرکانس تبدیل فوریهٔ گسسته، $X(k)$، می‌توانند به ترتیب به صورت مجموع خروجیهای دو تبدیل فوریهٔ گسسته با طول $\frac{N}{2}$ از نمونه‌های زمان اندیس زوج و فرد محاسبه شوند، که در آن تبدیل فوریهٔ گسسته کوتاه مربوط به اندیس فرد در عامل صوری $W_N^k = e^{-\frac{2k\pi j}{N}}$ ضرب می‌شود. شکل ۱-۳-۱ محاسبات فوق را برای $N = 8$ تشریح می‌کند. در این شکل خروجیهای فرکانس اندیس زوج را با $G(k)$ و اندیس فرد را با $H(k)$ نمایش داده‌ایم. به دلیل تناوب نمونه‌های فرکانس با طول $\frac{N}{2}$، $G(k)$ و $H(k)$ می‌توانند برای محاسبهٔ دو فرکانس تبدیل فوریهٔ گسسته با طول N، که آنها را $X(k)$ و $X(k+\frac{N}{2})$ می‌نامیم، مورد استفاده قرار گیرند؛ یعنی به‌ازای $k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1$ داریم:

$$\begin{cases} X(k) = G(k) + W_N^k H(k) \\ X(k+\frac{N}{2}) = G(k) - W_N^k H(k) \end{cases}$$

البته باید دقت کنیم که عامل صوری متفاوت خواهد بود. این استفادهٔ مجدد از خروجیهای تبدیل فوریهٔ گسسته با طول کوتاه سبب صرفه‌جویی محاسباتی تبدیل فوریهٔ سریع می‌شود.



شکل ۱–۳–۱ دسته‌بندی برحسب زمان یک تبدیل فوریهٔ گسسته با طول N

به دو تبدیل فوریهٔ گسسته با طول $\frac{N}{۲}$ همراه یک مرحله ترکیب

درحالی که محاسبهٔ مستقیم تمام فرکانسهای تبدیل فوریهٔ گسسته با طول N، نیازمند $N^{۲}$ عمل ضرب مختلط و $N(N-۱)$ عمل جمع مختلط (برای داده‌های با مقادیر مختلط) می‌باشد، با استفادهٔ مجدد از نتایج دو تبدیل فوریهٔ گسسته کوتاه تعداد اعمال جدید برابر خواهد بود با :

- تعداد اعمال ضرب مختلط: $۲\left(\frac{N}{۲}\right)^{۲} + N = \frac{N^{۲}}{۲} + N$
- تعداد اعمال جمع مختلط: $۲\frac{N}{۲}\left(\frac{N}{۲} - ۱\right) + N = \frac{N^{۲}}{۲}$

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، هزینهٔ نهایی تقریباً نصف هزینهٔ نهایی محاسبهٔ مستقیم است.

این فرآیند از آن جهت دسته بندی برحسب زمان نامیده می‌شود که نمونه‌های زمان را در گروههای مختلف بازچینی می‌کند و با توجه به آنکه تعداد این گروهها برابر دو است، آن را الگوریتم مبنا ۲ می‌نامیم.

ساده‌سازی بیشتر

پیش از آنکه به ساده‌سازی بیشتر در الگوریتم فوق بپردازیم، لازم است که ابتدا *عملگر پروانه‌ای*[۹] را تعریف کنیم. در الگوریتمهای تبدیل فوریهٔ سریع، عملگر پروانه‌ای بخشی از محاسبات است که نتایج تبدیلات فوریهٔ گسسته با طول کوتاه را با هم ترکیب می‌کند تا یک تبدیل فوریهٔ گسسته با طول بزرگتر حاصل شود؛ و یا بالعکس یک تبدیل فوریهٔ گسسته با طول زیاد را به چند تبدیل فوریهٔ گسسته با طول کوتاه می‌شکنند. عملگر پروانه‌ای که در شکل ۱–۳–۲ نشان داده شده است، تنها نیازمند $\frac{N}{2}$ عمل ضرب عامل صوری در هر مرحله می‌باشد. دقت داریم که پس از ادغام عوامل صوری به یک جملهٔ ساده روی شاخهٔ پایین‌تر، عملگر پروانه‌ای باقیمانده در واقع یک تبدیل فوریهٔ گسسته به طول ۲ با ورودیهای $x(0)$ و $x(1)$، و خروجیهای $X(0)$ و $X(1)$ است که توسط رابطهٔ زیر محاسبه می‌شوند:

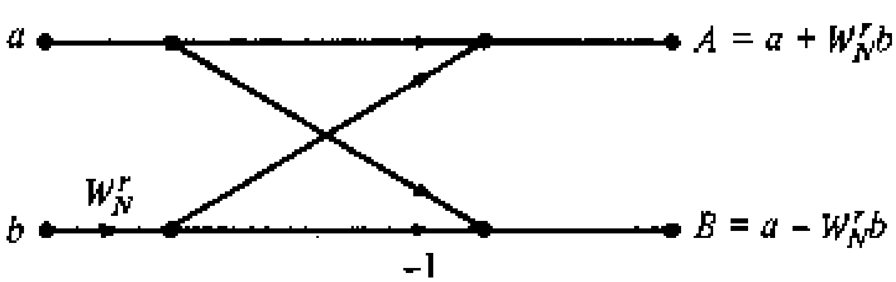
$$\begin{cases} X(0) = x(0) + W_N^k x(1) \\ X(1) = x(0) - W_N^k x(1) \end{cases}$$

که در آن $W_N^k = e^{-\frac{2k\pi j}{N}}$. همانگونه که ملاحظه می‌کنیم این عملگر ساده‌سازی شده تنها نیازمند ۱ عمل ضرب و ۲ عمل جمع مختلط است.

برای محاسبهٔ معکوس تبدیل فوریه با استفاده از عملگر پروانه‌ای از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} x(0) = \frac{1}{2}(X(0) + X(1)) \\ x(1) = \frac{W_N^{-k}}{2}(X(0) - X(1)) \end{cases}$$

شکل زیر نحوهٔ عملکرد عملگر پروانه‌ای مبنا ۲ را تشریح می‌کند:

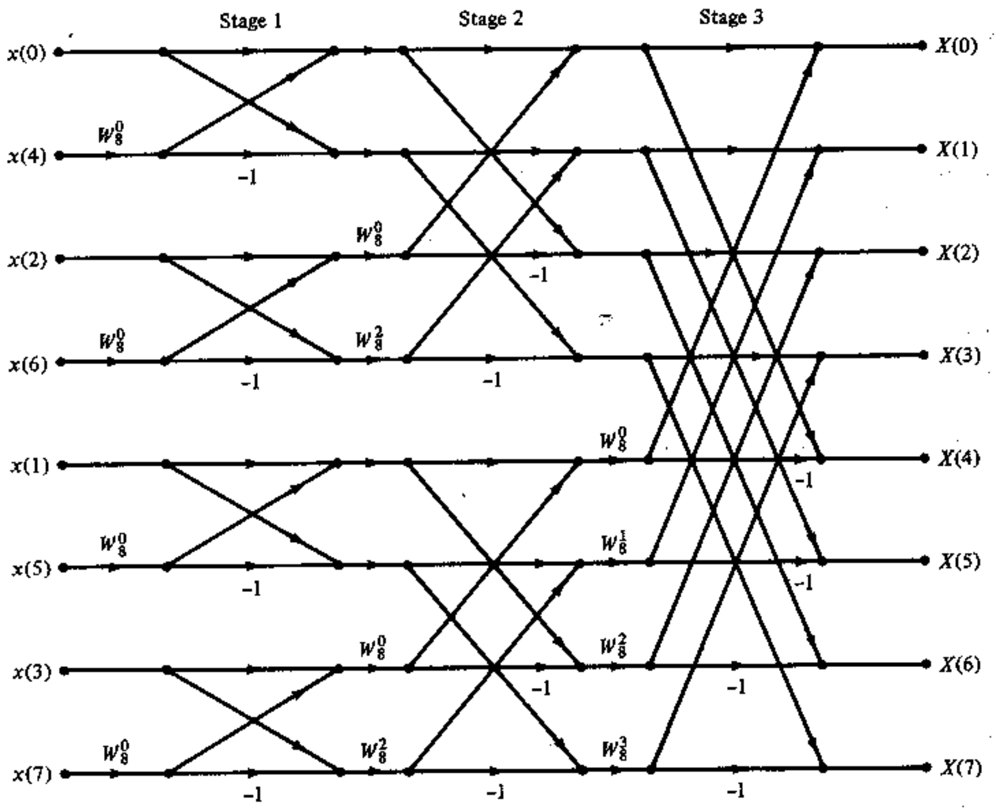


شکل ۱–۳–۲ عملگر پروانه‌ای دسته‌بندی برحسب زمان مبنای ۲

---

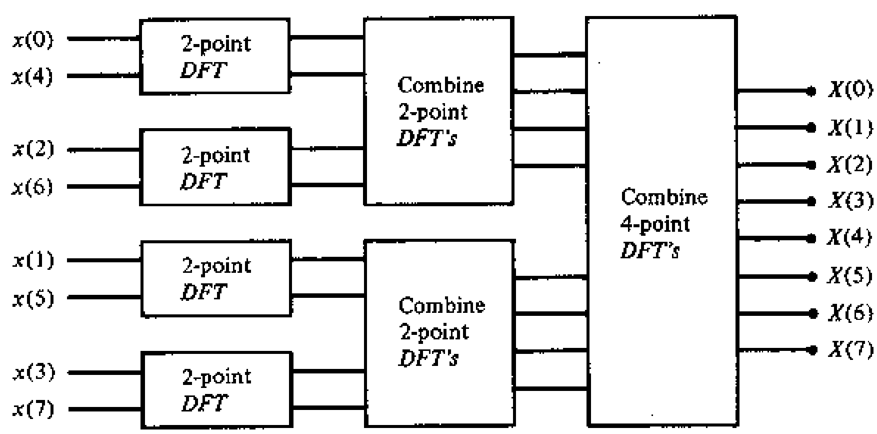
[۹] Butterfly Operation

فرآیند دسته‌بندی برحسب زمان مبنا ۲ مشابهی می‌تواند به صورت بازگشتی برای دو تبدیل فوریهٔ گسستهٔ حاصل، که هریک دارای طول $\frac{N}{۲}$ هستند، به‌کار برده شود. ادامهٔ پی در پی این فرآیند، تا آنجا که طول تبدیلات فوریهٔ گسسته کوچکتر به ۲ برسد منجر به الگوریتم دسته‌بندی برحسب زمان مبنا ۲ می‌شود. یک فرآیند کامل دسته‌بندی برحسب زمان با استفاده از عملگرهای پروانه‌ای ساده شده در شکل ۱-۳-۳ نشان داده شده است :



شکل ۱-۳-۳ الگوریتم تبدیل فوریهٔ سریع دسته‌بندی برحسب زمان مبنای ۲ برای سیگنالی به طول ۸

و یا به شکل ساده‌تر



همان‌گونه که از شکل ۱-۳-۳ مشاهده می‌شود، در تبدیل فوریهٔ سریع دسته بندی برحسب زمان مبنا ۲، ورودیها به ترتیب معکوس بیتی هستند. با توجه به بدیهی بودن فرآیند معکوس‌سازی بیتی، آن را تنها در قالب یک مثال برای طول $N = ۸$ در جدول زیر مورد بررسی قرار می‌دهیم:

اندیس معکوس بیتی	دودویی معکوس	اندیس مرتب دودویی	اندیس مرتب
۰	۰۰۰	۰۰۰	۰
٤	۱۰۰	۰۰۱	۱
۲	۰۱۰	۰۱۰	۲
٦	۱۱۰	۰۱۱	۳
۱	۰۰۱	۱۰۰	٤
۵	۱۰۱	۱۰۱	۵
۳	۰۱۱	۱۱۰	٦
۷	۱۱۱	۱۱۱	۷

برای محاسبهٔ هزینهٔ این الگوریتم مشاهده می‌کنیم که تعداد مراحل $M = \log_۲ N$ می‌باشد و هر مرحله $\frac{N}{۲}$ عملگر پروانه‌ای دارد و هر عملگر پروانه‌ای با توجه به آنچه گفته شد نیازمند ۱ عمل ضرب و ۲ عمل جمع مختلط است، لذا هزینهٔ نهایی این الگوریتم عبارت است از:

- تعداد اعمال ضرب مختلط: $\frac{N}{۲}\log_۲ N$
- تعداد اعمال جمع مختلط: $N\log_۲ N$

واضح است که این میزان صرفه‌جویی نسبت به محاسبهٔ مستقیم تبدیل فوریهٔ گسسته کاملاً چشمگیر است. برای مثال یک تبدیل فوریهٔ گسسته با طول ۱۰۲٤، در محاسبهٔ مستقیم، ۱۰٤۸۵۷٦ عمل ضرب مختلط و ۱۰٤۷۵۵۲ عمل جمع مختلط نیاز دارد، اما با به‌کارگیری تبدیل فوریهٔ سریع دسته بندی برحسب زمان مبنا ۲ این تعداد به ۵۱۲۰ عمل ضرب مختلط و ۱۰۲٤۰ عمل جمع مختلط کاهش می‌یابد. واضح است که هرچه طول تبدیل فوریهٔ گسسته بیشتر باشد میزان این صرفه‌جویی نیز افزایش می‌یابد.

۱-۳-۲ الگوریتم دسته بندی برحسب فرکانس مبنا ۲

استخراج الگوریتم دسته‌بندی بر حسب فرکانس مبنا ۲ کاملاً مشابه دسته‌بندی بر حسب زمان مبنا ۲ است، تنها با این تفاوت که الگوریتم دسته‌بندی برحسب فرکانس مبنا ۲، تبدیل فوریهٔ گسسته را به دو بخش زیر تقسیم می‌کند:

۱. محاسبهٔ اندیسهای زوج فرکانس $k = [0, 2, 4, \ldots, N-2]$، یا همان $X(2r)$

۲. محاسبهٔ اندیسهای فرد فرکانس $k = [1, 3, 5, \ldots, N-1]$، یا همان $X(2r+1)$

یعنی

$$\begin{aligned} X(2r) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(x(n) W_N^{2rn} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(x(n) W_N^{2rn} \right) + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(x(n+\frac{N}{2}) W_N^{2r(n+\frac{N}{2})} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(x(n) W_N^{2rn} \right) + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(x(n+\frac{N}{2}) W_N^{2rn} \right) \\ &= DFT_{\frac{N}{2}} \left[x(n) + x(n+\frac{N}{2}) \right] \end{aligned} \tag{۱-۳-۲}$$

$$\begin{aligned} X(2r+1) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(x(n) W_N^{(2r+1)n} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(\left(x(n) + x(n+\frac{N}{2}) \right) W_N^{(2r+1)n} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(\left(\left(x(n) - x(n+\frac{N}{2}) \right) \right) W_{\frac{N}{2}}^{rn} \right) \\ &= DFT_{\frac{N}{2}} \left[\left(x(n) - x(n+\frac{N}{2}) \right) W_N^{n} \right] \end{aligned} \tag{۱-۳-۳}$$

ادامهٔ فرآیند مشابه دسته‌بندی بر حسب زمان است و لذا از آوردن مجدد آن صرفنظر می‌کنیم.