بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم
گروه ریاضی

عنوان پایان نامه

مسایل اکسترمال در فضای L^p

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی

مولف

نگین علیزاده قمصری

استاد راهنما

خانم دکتر ثریا طالبی

ماه و سال انتشار

تیرماه ۱۳۸۶

تصویب نامه پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان : برخی مسایل اکسترمال درفضای L^p

که توسط نگین علیزاده قمصری تهیه و به هیات داوران ارائه گردیده است مورد تایید می باشد.

تاریخ دفاع : ۱۳۸۶/۴/۳ نمره : ۱۹ درجه ارزشیابی : عالی

اعضای هیات داوران :

نام و نام خانوادگی	هیات داوران	مرتبه علمی	امضاء
۱-	استاد راهنما : خانم دکتر ثریا طالبی	استادیار	
۲-	استاد راهنمای همکار یا مشاور:		
۳-	استاد ممتحن :آقای دکتر علی جلیلیان	استادیار	
۴-	نماینده گروه آموزشی :آقای دکتر مرتضی آقایی	استادیار	

تقدیم به

دانش پژوهان شیفته ی ریاضی

فهرست:

پیشگفتار

سپاس خداوندکارسازبنده نوازراکه توفیق پیداوپنهانش یاری کردتااین کارناچیزسامان وپایان یافت.

انسان سالهاست به منظورپیشرفت سریع تردراموزندگی خویش وامکان دستیابی به موفقیت ، درپی آن بوده است که بتواندبه نحوی وقایع آینده راپیش بینی کند. اگرچه دراین راه دچارکجرویهاوخرافه گراییهایی نیزبوده است،لیکن هرگاه علم رادراین امربه خدمت گرفته،توانسته است به نتایج شگرفی دست یابد.

علوم مختلفی همچون اقتصاد،جامعه شناسی،فیزیک وهمچنین ریاضی ازدیدگاههای مختلف به این امرپرداخته اند.چراکه اصولا ازنظرفطری وعقلانی،بررسی آنچه درگذشته اتفاق افتاده وعبرت گیری ازآن وبه کارگیری آن برای پیش بینی آینده و برنامه ریزی برای آن ،امری بس مهم وپسندیده می باشد.

دردهه های اخیر،بسیاری ازدانشمندان آماروریاضی نظرخودرابه این امرمعطوف داشته اندکه:

اگرواقعه ای درآینده راماننديک نقطه فرض کنیم وآن راروی فضای گذشته تصویر نماییم وبتوانیم آن را بصورت یک ترکیب خطی ازگذشته درآوریم،امکان پیش بینی واقعه ی موردنظربراساس گذشته ممکن خواهدبود.

این مطلب اساس مبحث "سریهای زمانی"را تشکیل می دهد. درواقع یک سری زمانی مجموعه مشاهداتی است که برحسب زمان مرتب شده باشندودرآن روشهای گوناگون پیش بینی از جمله "پیش بینی درقلمروفرکانس "که موردنظرماست مطرح می شود.

بسیاری ازدانشمندان،فاصله ی مذکوررا ازجوانب مختلف بررسی کرده اند.ازجمله:

کولموگروف[۱]،میامی[۲]،پوراحمدی[۳]، زگو[۴]وناکازی[۵] که بعضی ازمقالات آنهادرقسمت منابع ذکرشده وبرای درک بهتراین مقاله ،ازآن ها به کرات استفاده شده است.

این پایان نامه شامل سه فصل می باشد.

درفصل اول مفاهیم آنالیزی موردنیازهمچون σ-جبر،مجموعه های بورل،فضای احتمال،اندازه، فضای L^p،فضای هاردی،توابع داخلی وخارجی،دستگاه مثلثاتی وسری فوریه توضیح داده شده اند.

درفصل دوم قضایایی که بعدا دراثبات وتوضیح مطالب به کاررفته اند،آورده شده اندکه دراین میان قضایایی که مربوط به دوگان فضای L^pورابطه ی بین یک تابع خارجی ازمجموعه چندجمله ایهای مثلثاتی وچگال بودن مجموعه ی مولدهای چندجمله ایهای مثلثاتی می باشند،ازاهمیت خاصی برخوردارند.

درفصل سوم به شرح مقاله ی اصلی پرداخته شده است.

امیداست که مطالعه ی این مجموعه برای علاقمندان مفیدبوده واینجانب راازنظرات خویش بهره مند سازند.

درپایان ازراهنمایی هاومساعدت های فراوان وارزنده ی استادراهنمای ارجمندم سرکارخانم دکترطالبی وجناب آقای دکتر جلیلیان وتمام عزیزانی که مرا درانجام این کاریاری کردند،کمال تشکروسپاس رادارم.

نگین علیزاده قمصری

تیرماه۸۶

---

[1]Kolmogorov
[2]Miamee
[3]Pourahmadi
[4] Szego
[5] Nakazi

فصل اول

تعاریف

پیشامد

تعریف ۱-۱ : اگر Ω مجموعه ای باشد که نقاط آن به نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی مربوط اند ، آنگاه بعضی از زیرمجموعه های Ω « پیشامد » نامیده خواهند شد و احتمالی به آن اختصاص خواهد یافت . به طور شهودی A یک پیشامد است اگر پرسش « آیا ω به A تعلق دارد ؟»پس از انجام آزمایش و تناظر نتیجه به نقطه ی $\omega\in\Omega$ یک پاسخ معین بلی یا خیر داشته باشد. اکنون اگر بتوانیم به پرسش «آیا $\omega\in A$ است ؟»پاسخ دهیم ، به طور یقین می توانیم به پرسش «آیا $\omega\in A^c$ است ؟»نیز پاسخ دهیم و اگر برای هر $i=1,2,\ldots,n$ بتوانیم تصمیم بگیریم که آیا ω به A_i متعلق است یا نه ، آنگاه می توانیم تعیین کنیم که ω به $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ (به روش مشابه برای $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$) تعلق دارد یا نه. بنابراین طبیعی است که رده ی پیشامدها باید نسبت به مکمل گیری ، اجتماع متناهی و اشتراک متناهی بسته باشد . بعلاوه چون پاسخ پرسش «آیا $\omega\in\Omega$ است؟» همواره مثبت است ، کل فضای Ω باید یک پیشامد باشد .

جبر

تعریف ۱-۲ : فرض کنیم F گردایه ای از زیر مجموعه های یک مجموعه ی Ω است.دراینصورت F،جبر نامیده می شود اگر و تنها اگر $\Omega\in F$ بوده و F نسبت به مکمل گیری و اجتماع متناهی بسته باشد.

یعنی:

الف) $\Omega \in F$

ب) اگر $A \in F$ آنگاه $A^c \in F$

پ) اگر $A_1,\dots,A_n \in F$ آنگاه $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in F$. در اینصورت F نسبت به اشتراک متناهی نیز بسته است ، زیرا

اگر $A_1,\dots,A_n \in F$ آنگاه : $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right)^c \in F$.

σ-جبر

تعریف ۱-۳: فرض کنیم F گردایه ای از زیر مجموعه های یک مجموعه ی Ω است.دراینصورت F، σ-جبر نامیده می شود اگر و تنها اگر $\Omega \in F$ بوده و F نسبت به مکمل گیری و اجتماع شمارا بسته باشد. یعنی:

الف) $\Omega \in F$

ب) اگر $A \in F$ آنگاه $A^c \in F$.

پ) اگر $A_1, A_2,\dots \in F$، آنگاه : $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$

آنگاه F یک σ-جبر نامیده می شود .

دنباله ی افزایشی و دنباله ی کاهشی:

تعریف ۱-۴: فرض می کنیم $A_1, A_2,\dots$ زیر مجموعه های یک مجموعه ی Ω هستند . اگر $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ و $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$ باشد، می گوییم A_n یک دنباله ی افزایشی از مجموعه ها با حد A تشکیل می دهد ، یا A_n به A افزایش می یابدو می نویسیم $A_n \uparrow A$. اگر $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ و $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$ باشد، می گوییم

A_n یک دنباله ی کاهشی از مجموعه ها با حد A تشکیل می دهد یا A_n به A کاهش می یابد و می نویسیم $A_n \downarrow A$.

اگر F یک جبر باشد، آنگاه هر اجتماع شمارشپذیر ازمجموعه های F را می توان به صورت حد دنباله ای افزایشی از مجموعه های F نوشت، و به عکس . بنابراین هر σ - جبر ، جبری است که نسبت به حد دنباله های افزایشی بسته است .

σ-جبر مینیمال:

تعریف ۱-۵: بزرگترین σ - جبر از زیر مجموعه های یک مجموعه ثابت Ω، گردایه ی همه ی زیر مجموعه های آن است. کوچکترین σ - جبر از دو مجموعه ی $\varnothing$ و Ω تشکیل شده است. فرض کنیم A یک زیر مجموعه ی سره ی ناتهی Ω و $F=\{\varnothing,\Omega,A,A^c\}$. در اینصورت F کوچکترین σ - جبر شامل A است. اگر φ رده ای از مجموعه ها باشد، آنگاه کوچکترین σ - جبر شامل مجموعه های φ را با $\sigma(\varphi)$ نشان داده و آنرا σ - جبرمینیمال روی φ می نامیم.

اگر C رده ای از زیر مجموعه های Ω و $A\subset\Omega$، آنگاه $C\cap A=\{B\cap A : B\in C\}$. اگر σ- جبرمینیمال روی C برابر $\sigma(C)=F$ باشد، $\sigma_A(C\cap A)=F\cap A$. که در آن $\sigma_A(C\cap A)$ ، σ - جبر مینیمال از زیر مجموعه های A روی $C\cap A$ است.

جمعی شمارش پذیری :

تعریف ۱-۹: فرض کنیم F یک جبر و μ روی F یک تابع مجموعه (نگاشتی از F به $\overline{R}$ (تعمیم یافته) است . می گوئیم μ روی F جمعی شمارش پذیر است اگر و تنها اگروقتی $A_1, A_2, \ldots$ گردایه ای متناهی یا شمارش پذیر نا متناهی از مجموعهای مجزای F تشکیل میدهند که اجتماعشان نیز به F تعلق دارد، (اگر F یک σ- جبر باشد ، همواره چنین خواهد بود.) آنگاه داریم :

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n)$$

جمعی متناهی:

تعریف ۱-۱۰: اگر شرایط فوق تنها در مورد یک گردایه ای متناهی از مجموعه های مجزای F بر قرار باشد ، μ را روی F جمعی متناهی می گویند . برای دوری از پدیدار شدن جمله هایی به شکل $+\infty, -\infty$ در این جمع ، همواره فرض می کنیم که $+\infty, -\infty$ هر دو نمی توانند به دامنه μ تعلق داشته باشند .

اگر μ جمعی شمارش پذیر و برای هر A، $\mu(A) \geq 0$ باشد ، آنگاه μ روی F یک اندازه ، و اگر $\mu(\Omega)=1$ باشد یک اندازه ی احتمال نامیده میشود . و نیز داریم : $\mu(\varnothing) = 0$.

اندازه

تعریف ۱-٦ : هر اندازه روی یک σ- جبر F یک تابع نامنفی با مقدارهای حقیقی تعمیم یافته ی μ روی F است ، بگونه ای که وقتی $A_1, A_2, \ldots$ گردایه ای متناهی یا شمارش پذیر نا متناهی از مجموعه های مجزای F هستند، داریم:

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n)$$

اندازه ی احتمال:

تعریف ۱-۷: اگر درتعریف اندازه ، $\mu(\Omega) = 1$ باشد، μ اندازه ی احتمال نامیده می شود .

فضای اندازه و فضای احتمال:

تعریف ۱-۸: هر فضای اندازه یک سه تایی (Ω, F, μ) است که در آن Ω یک مجموعه ، F یک σ- جبر از زیر مجموعه های Ω و μ اندازه ی روی F است . اگر μ یک اندازه ی احتمال باشد ، (Ω, F, μ) یک فضای احتمال نامیده می شود.

اکنون اگر A زیر مجموعه ای از R باشد ، کوشش می کنیم که به تعریفی از درازای A دست یابیم . اگر A یک فاصله (باز،بسته یا نیم بسته) با نقطه های انتهایی b, a باشد ، منطقی است که درازای A را برابر $\mu(A) = b - a$ بگیریم . اگر A یک مجموعه ی پیچیده تر باشد، نمی توانیم هیچگونه شهودی درباره ی درازای آن داشته باشیم ، ولی بعداً خواهیم دید که شرطهای $\mu(a,b] = b - a$ برای هر $a, b \in R$ ، $a < b$ و

اینکه μ یک اندازه است، μ را روی رده ی بزرگی از مجموعه ها تعیین می کند . به ویژه μ روی گردایه ی مجموعه های بورل R که با $B(R)$ نمایانده شده،تعیین می گردد.

مجموعه های بورل:

تعریف ۱-۱۱: کوچکترین σ- جبر از زیر مجموعه های R که شامل همه ی فاصله های $(a,b]$ ، $a,b \in R$ مجموعه ی بورل نامیده می شود،که آن رابصورت $B(R)$ نشان می دهیم.

باید دانست که وجود $B(R)$ تضمین شده است ، و می تواند به صورت به صورت اشتراک همه ی σ- جبرهای حاوی فاصله های $(a,b]$ توصیف گردد . همچنین اگر σ- جبری شامل ، مثلاً همه ی فاصله های باز باشد ، باید شامل همه فاصله های به شکل $(a,b]$ نیز باشد، و برعکس . زیرا :

$$(a,b]=\bigcap_{n=1}^{\infty}(a,b+\frac{1}{n}) \quad و \quad (a,b)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(a,b-\frac{1}{n}]$$

بنابراین $B(R)$ کوچکترین σ- جبرحاوی همه ی فاصله های باز است.

چون یک فاصله باز است اگر و تنها اگر مکمل آن بسته باشد ، $B(R)$ کوچکترین σ- جبر دربردارنده ی همه ی فاصله های بسته R است .

به روش مشابه می توان فاصله های $(a,b]$ را با رده ی دیگری از فاصله ها ، مانند : همه ی فاصله های بسته، همه ی فاصله های $[a,b)$ $a,b \in R$ ، همه ی فاصله های (a,∞) $a \in R$ ، همه ی فاصله های $(-\infty,b)$ $b \in R$ و همه ی فاصله های $(-\infty,b]$ $b \in R$ جانشین ساخت . چون هر σ- جبرحاوی همه ی

فاصله های از یک نوع ، شامل همه ی فاصله های از انواع دیگر است ، پس $B(R)$ می تواند به صورت کوچکترین σ- جبر دربردارنده ی همه ی فاصله های R توصیف گردد.

سرانجام اگر F_0 جبر اجتماعهای متناهی و مجزایی از فاصله های نیم بسته از راست باشد آنگاه $B(R)$ کوچکترین σ- جبر حاوی مجموعه های F_0 است .

بطور شهودی ، می توانیم پدید آمدن مجموعه های بورل را چنین تصور کنیم که با فاصله ها آغاز کنیم ومکملها ، اجتماعهای شمارش پذیر و اشتراکهای شمارش پذیر را با همه ی روشهای ممکن تشکیل دهیم . رده ی مجموعه های بورل $\overline{R}$ را با $B(\overline{R})$ نشان می دهیم و به صورت کوچکترین σ- جبر از زیر مجموعه های $\overline{R}$ تعریف می کنیم که حاوی همه ی فاصله هایی به صورت $(a,b]$ $a,b \in \overline{R}$ است. توصیف بالا در ارتباط با جایگذاری فاصله های نیم بسته از راست با رده های دیگری از فاصله ها به همان خوبی درباره ی $\overline{R}$ به کار می رود .

اگر $E \in B(R)$ باشد ؛ $B(E)=\{B \in B(R) : B \subset E\}$ خواهد بود که بر $\{A \cap E : A \in B(\overline{R})\}$ منطبق است .

. اندازه ی متناهی

تعریف ۱-۱۲ : یک تابع مجموعه μ که روی F تعریف شده است، متناهی نامیده می شود اگر و تنها اگر $\mu(A)$ برای هر $A \in F$ متناهی باشد ، یعنی $\pm\infty$ نباشد.

اگر μ جمعی متناهی باشد کافیست بخواهیم که $\mu(\Omega)$ متناهی باشد . زیرا $\Omega = A \cup A^c$ و اگر $\mu(A)$ مثلاًبرابر $+\infty$ باشد $\mu(\Omega)$ نیز $+\infty$ است.

σ-باپایان[1]:

تعریف۱-۱۳: هر اندازه ی جمعی متناهی μ روی یک σ- جبر F ، σ- باپایان نامیده می شود اگر و تنها اگر بتوان Ωرا به صورت $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ نوشت که درآن A_nبه F تعلق دارد و برای همه ی nها : $\mu(A_n) < \infty$.

F-باپایان[2]:

تعریف ۱-۱٤: هر تابع مجموعه ی نامنفی و جمعی باپایان μروی یک σ- جبر F- باپایان است اگر و تنها اگر کراندار باشد یعنی :

$$\sup\{|\mu(A)| : A \in F\} < \infty$$

اگر شرط نامنفی بودن را حذف کنیم این مطلب دیگر برقرار نخواهد بود . با وجود این هر اندازه ی جمعی شمارشپذیر روی یک σ- جبرباپایان است اگر و تنها اگر این اندازه کراندار باشد.

اندازه ی بیرونی

تعریف ۱-۱۵ : هراندازه بیرونی روی Ω، یک تابع مجموعه ی حقیقی گسترش یافته ی نامنفی λ روی رده ی همه ی زیرمجموعه های Ω است که شرطهای زیر را بر می آورد :

الف) $\lambda(\varnothing) = 0$

ب) $A \subset B$ ایجاب می کند که $\lambda(A) \le \lambda(B)$ (یکنوایی)

پ) $\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$ (زیرجمعی شمارشپذیر)

---
[1] σ-finite
[2] F-finite

اندازه ی کامل

تعریف ۱-۱۶ : اندازه ی μ روی یک σ- جبر F کامل گفته می شود هرگاه از $\mu(A)=0, A\in F$ ، برای هر $B\subset A$ داشته باشیم : $B\in F$.

اندازه ی مثبت

تعریف ۱-۱۷: یک اندازه ی مثبت تابعی است مانند μ که بر یک σ-جبرمانند m تعریف شده است،بردش در $[0,\infty]$ است و جمعی شمارش پذیر می باشد.

فضای اندازه پذیر

تعریف ۱-۱۸: هرگاه m یک σ-جبردرفضای X باشد،آنگاه X رایک فضای اندازه پذیرواعضای m را مجموعه های اندازه پذیر در X می نامیم.

فضای اندازه

تعریف ۱-۱۹: هرفضای اندازه یک فضای اندازه پذیر است که یک اندازه ی مثبت تعریف شده بر σ-جبر مجموعه های اندازه پذیر خودداشته باشد.

فضای $L^p(\mu)$

تعریف ۱-۲۰: فرض کنید X یک فضای اندازه ی دلخواه با اندازه ی مثبت μ باشد؛اگر $0<p<\infty$ و f یک تابع اندازه پذیر مختلط بر X باشد،تعریف می کنیم:

$$\|f\|_p=\left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$L^p(\mu)=\{f:\|f\|_p<\infty\}$$

فضای $L^p(\omega)$:

تعریف ۱-۲۱: فرض کنید ω یک تابع انتگرال پذیرنامنفی روی دایره واحددرصفحه مختلط باشد؛ $L^p(\omega)$ رابه صورت زیرتعریف می کنیم:

$$\|f\|_p=\left(\int |f|^p\,d\omega\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$L^p(\omega)=\{f:\|f\|_p<\infty\}$$

درواقع درتعریف۱-۲۰، به جای μ، ω آورده شده است؛ازآنجاییکه ω انتگرال پذیر و نامنفی است یک اندازه است وچون C(دایره ی واحد مختلط) یک فضای باناخ با نرم $|x|=\|x\|$ می باشدیک فضای اندازه بوده ولذا جایگزینی ω با μ درست است.

اندازه ی لبگ – اشتیلیس

تعریف ۱-۲۲ : هر اندازه ی لبگ – استیلتیس روی R یک اندازه ی μ روی $B(R)$ است به گونه ای که برای هر فاصله کراندار I داریم : $\mu(I)<\infty$.

فضای خطی نرمدار

تعریف ۱-۲۳: فضای برداری مختلط X رایک فضای خطی نرمدارنامیم،اگربه هر $x\in X$ یک عدد حقیقی نامنفی مانند $\|x\|$ به نام نرم x چنان مربوط شده باشدکه:

الف)برای هر $x,y\in X$ $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$

ب)برای هر $x\in X$ وهراسکالر α $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$

پ)برای هر $x\in X$ $\|x\|=0\Rightarrow x=0$

بنابراین هرفضای خطی نرمداررا می توان یک فضای متری گرفت که متر آن برای هر $x,y\in X$برابر $\|x-y\|$ است.

فضای باناخ

تعریف ۱-۲٤:هرفضای باناخ یک فضای خطی نرمدار است که با متر تعریف شده به وسیله ی نرمش تام می باشد.هر $L^p(\mu)$بانرم $\|f\|_p$ $(1\le p\le\infty)$یک فضای باناخ می باشد.ساده ترین فضای باناخ خود میدان مختلط بانرم $|x|=\|x\|$است.

سری همگرا و سری مطلقا همگرا

تعریف ۱-۲۵:اگر $\{x_n\}$ یک دنباله در Xباشد،سری $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ همگرا به xنامیده می شود اگر:

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}x_n=x$$

ومطلقاًهمگرا نامیده می شوداگر : $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|<\infty$.

واضح است که دریک فضای متریک کامل ، هرسری همگرای مطلق،همگراست.