

۱۰۳۷۱۹

دانشگاه پیام نور - کتابخانه مرکزی
بخش نشریات

QA	شماره کتاب
۷۸۱	شماره نشریات
۸۶/۵/۲۹	شماره و کلاس

دانشکده علوم گروه ریاضی

عنوان پایان نامه

L^p مسایل اکسترمال در فضای

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی

مؤلف

نگین علیزاده قمصری

استاد راهنما

خانم دکتر ثریا طالبی

ماه و سال انتشار

۱۳۸۷ / ۲ / ۱۳

تیرماه ۱۳۸۶

۱۰۳۷۸۹

تصویب نامه پایان نامه


پایان نامه تحت عنوان: برخی مسایل اکستریمال در فضای L^p

که توسط نگین علیزاده قمصری تهیه و به هیات داوران ارائه گردیده است مورد تایید می باشد.

تاریخ دفاع: ۱۳۸۶/۴/۳ شماره: ۱۹۱ - درجه ارزشیابی: عالی

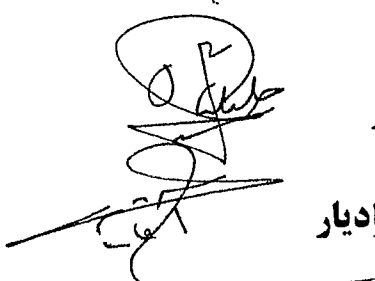
اعضای هیات داوران:

نام و نام خانوادگی هیات داوران مرتبه علمی امضاء

۱- استاد راهنما: خانم دکتر ثریا طالبی استادیار 

۲- استاد راهنمای همکار یا مشاور:

۳- استاد ممتحن: آقای دکتر علی جلیلیان استادیار 

۴- نماینده گروه آموزشی: آقای دکتر مرتضی آقایی استادیار 

تقدیم به

دانش پژوهان شیفته ی ریاضی

فهرست:

پیشگفتار ۱

فصل اول: تعاریف

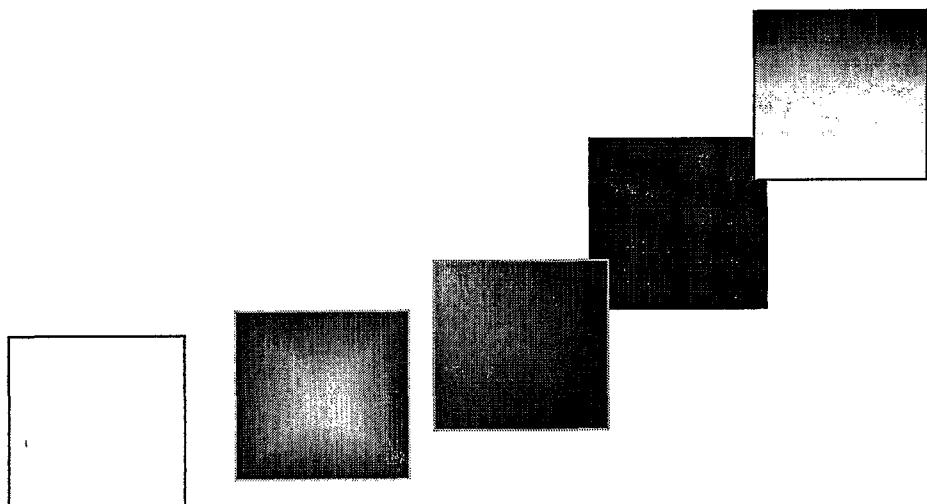
۱	پیشامد
۱	جبر و σ -جبر
۴	اندازه
۴	فضای احتمال
۶	مجموعه های بول
۱۰	فضای L^p
۱۳	فضای هاردی
۱۵	دستگاه مثلثاتی
۱۶	سری فوریه

فصل دوم: قضایای پیشنهادی ۱۷

فصل سوم: مسایل اکسترمال در فضای L^p ۲۳

منابع ۴۵

پیشگفتار



سپاس خداوند کارساز بنده نواز را که توفیق پیدا و پنهانش یاری کرد تا این کار ناچیز سامان و پایان یافت.

انسان سالهاست به منظور پیشرفت سریع تر در امور زندگی خویش و امکان دستیابی به موفقیت، در پی آن بوده است که بتواند به نحوی وقایع آینده را پیش بینی کند. اگرچه در این راه دچار کج رویها و خرافه گراییهایی نیز بوده است، لیکن هر گاه علم را در این امر به خدمت گرفته، توانسته است به نتایج شگرفی دست یابد.

علوم مختلفی همچون اقتصاد، جامعه شناسی، فیزیک و همچنین ریاضی از دیدگاههای مختلف به این امر پرداخته اند. چرا که اصولاً از نظر فطری و عقلانی، بررسی آنچه در گذشته اتفاق افتاده و عبرت گیری از آن و به کارگیری آن برای پیش بینی آینده و برنامه ریزی برای آن، امری بس مهم و پسندیده می باشد.

در دهه های اخیر، بسیاری از دانشمندان آمار و ریاضی نظر خود را به این امر معطوف داشته اند که:

اگر واقعه ای در آینده را مانند یک نقطه فرض کنیم و آن را روی فضای گذشته تصویر نماییم و بتوانیم آن را بصورت یک ترکیب خطی از گذشته در آوریم، امکان پیش بینی واقعه ی مورد نظر بر اساس گذشته ممکن خواهد بود.

این مطلب اساس مبحث "سریهای زمانی" را تشکیل می دهد. در واقع یک سری زمانی مجموعه مشاهداتی است که بر حسب زمان مرتب شده باشند و در آن روشهای گوناگون پیش بینی از جمله "پیش بینی در قلمرو فرکانس" که مورد نظر ماست مطرح می شود.

بسیاری از دانشمندان، فاصله ی مذکور را از جوانب مختلف بررسی کرده اند. از جمله:

کولموگروف^۱، میامی^۲، پورا احمدی^۳، زگو^۴ و ناکازی^۵ که بعضی از مقالات آنها در قسمت منابع ذکر شده و برای درک بهترین مقاله، از آن ها به کرات استفاده شده است.

این پایان نامه شامل سه فصل می باشد.

در فصل اول مفاهیم آنالیزی مورد نیاز همچون σ -جبر، مجموعه های بورل، فضای احتمال، اندازه،

فضای L^p ، فضای هاردی، توابع داخلی و خارجی، دستگاه مثلثاتی و سری فوریه توضیح داده شده اند.

در فصل دوم قضایایی که بعداً در اثبات و توضیح مطالب به کار رفته اند، آورده شده اند که در این میان

قضایایی که مربوط به دوگان فضای L^p و رابطه ی بین یک تابع خارجی از مجموعه چند جمله ایهای مثلثاتی

و چگال بودن مجموعه ی مولدهای چند جمله ایهای مثلثاتی می باشند، از اهمیت خاصی برخوردارند.

در فصل سوم به شرح مقاله ی اصلی پرداخته شده است.

امید است که مطالعه ی این مجموعه برای علاقمندان مفید بوده و اینجانب را از نظرات خویش بهره مند

سازند.

در پایان از راهنمایی ها و مساعدت های فراوان و ارزنده ی استاد راهنمای ارجمندم سرکار خانم

دکتر طالبی و جناب آقای دکتر جلیلیان و تمام عزیزانی که مرا در انجام این کاریاری کردند، کمال

تشکر و سپاس را دارم.

نگین علیزاده قمصری

تیر ماه ۸۶

¹Kolmogorov

²Miamee

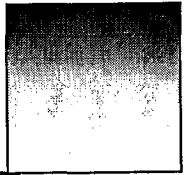
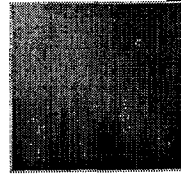
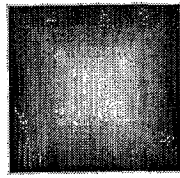
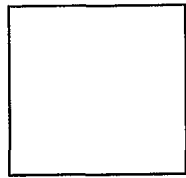
³Pourahmadi

⁴Szego

⁵Nakazi

فصل اول

تعاریف



پیشامد

تعریف ۱-۱: اگر Ω مجموعه ای باشد که نقاط آن به نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی مربوط اند، آنگاه بعضی از زیرمجموعه های Ω «پیشامد» نامیده خواهند شد و احتمالی به آن اختصاص خواهد یافت. به طور شهودی A یک پیشامد است اگر پرسش «آیا ω به A تعلق دارد؟» پس از انجام آزمایش و تناظر نتیجه به نقطه $\omega \in \Omega$ یک پاسخ معین بلی یا خیر داشته باشد. اکنون اگر بتوانیم به پرسش «آیا $\omega \in A$ است؟» پاسخ دهیم، به طور یقین می توانیم به پرسش «آیا $\omega \in A^c$ است؟» نیز پاسخ دهیم و اگر برای هر $i = 1, 2, \dots, n$ بتوانیم تصمیم بگیریم که آیا ω به A_i متعلق است یا نه، آنگاه می توانیم تعیین کنیم که ω به $\bigcup_{i=1}^n A_i$ (به روش مشابه برای $\bigcap_{i=1}^n A_i$) تعلق دارد یا نه. بنابراین طبیعی است که رده ی پیشامدها باید نسبت به مکمل گیری، اجتماع متناهی و اشتراک متناهی بسته باشد. بعلاوه چون پاسخ پرسش «آیا $\omega \in \Omega$ است؟» همواره مثبت است، کل فضای Ω باید یک پیشامد باشد.

جبر

تعریف ۱-۲: فرض کنیم F گردایه ای از زیر مجموعه های یک مجموعه Ω است. در این صورت F ، جبر نامیده می شود اگر و تنها اگر $\Omega \in F$ بوده و F نسبت به مکمل گیری و اجتماع متناهی بسته باشد.

یعنی:

الف) $\Omega \in F$

ب) اگر $A \in F$ آنگاه $A^c \in F$

پ) اگر $A_1, \dots, A_n \in F$ آنگاه $\bigcup_{i=1}^n A_i \in F$. در اینصورت F نسبت به اشتراک متناهی نیز بسته است، زیرا

$$\text{اگر } A_1, \dots, A_n \in F \text{ آنگاه: } \bigcap_{i=1}^n A_i = \left(\bigcup_{i=1}^n A_i^c \right)^c \in F$$

σ -جبر

تعریف ۱-۳: فرض کنیم F گردایه ای از زیر مجموعه های یک مجموعه Ω است. در اینصورت

F, σ -جبر نامیده می شود اگر و تنها اگر $\Omega \in F$ بوده و F نسبت به مکمل گیری و اجتماع شمارا بسته

باشد. یعنی:

الف) $\Omega \in F$

ب) اگر $A \in F$ آنگاه $A^c \in F$.

پ) اگر $A_1, A_2, \dots \in F$ آنگاه: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$

آنگاه F یک σ -جبر نامیده می شود.

دنباله ی افزایشی و دنباله ی کاهشی:

تعریف ۱-۴: فرض می کنیم A_1, A_2, \dots زیر مجموعه های یک مجموعه Ω هستند. اگر

$A_1 \subset A_2 \subset \dots$ و $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$ باشد، می گوئیم A_n یک دنباله ی افزایشی از مجموعه ها با حد A تشکیل می

دهد، یا A_n به A افزایش می یابد و می نویسیم $A_n \uparrow A$. اگر $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ و $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$ باشد، می گوئیم

A_n یک دنباله ی کاهشی از مجموعه ها با حد A تشکیل می دهد یا A_n به A کاهش می یابد و می نویسیم $A_n \downarrow A$.

اگر F یک جبر باشد، آنگاه هر اجتماع شمارشپذیر از مجموعه های F را می توان به صورت حد دنباله ای افزایشی از مجموعه های F نوشت، و به عکس. بنابراین هر σ -جبر، جبری است که نسبت به حد دنباله های افزایشی بسته است.

σ -جبرمینیمال:

تعریف ۱-۵: بزرگترین σ -جبر از زیر مجموعه های یک مجموعه ثابت Ω ، گردایه ی همه ی زیر مجموعه های آن است. کوچکترین σ -جبر از دو مجموعه ی \emptyset و Ω تشکیل شده است. فرض کنیم A یک زیر مجموعه ی سره ی ناتهی Ω و $F = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$. در اینصورت F کوچکترین σ -جبر شامل A است. اگر φ رده ای از مجموعه ها باشد، آنگاه کوچکترین σ -جبر شامل مجموعه های φ را با $\sigma(\varphi)$ نشان داده و آنرا σ -جبرمینیمال روی φ می نامیم.

اگر C رده ای از زیر مجموعه های Ω و $A \subset \Omega$ ، آنگاه $C \cap A = \{B \cap A : B \in C\}$. اگر σ -جبرمینیمال روی C برابر $\sigma(C) = F$ باشد، $\sigma_A(C \cap A) = F \cap A$ ، که در آن $\sigma_A(C \cap A)$ ، σ -جبرمینیمال از زیر مجموعه های A روی $C \cap A$ است.

جمعی شمارش پذیری :

تعریف ۹-۱: فرض کنیم F یک جبر و μ روی F یک تابع مجموعه (نگاشتی از F به \bar{R} (تعمیم یافته) است. می گوئیم μ روی F جمعی شمارش پذیر است اگر و تنها اگر وقتی A_1, A_2, \dots گردایه ای متناهی یا شمارش پذیر نا متناهی از مجموعه های مجزای F تشکیل میدهند که اجتماعشان نیز به F تعلق دارد، (اگر F یک σ -جبر باشد، همواره چنین خواهد بود.) آنگاه داریم :

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n)$$

جمعی متناهی:

تعریف ۱۰-۱: اگر شرایط فوق تنها در مورد یک گردایه ای متناهی از مجموعه های مجزای F برقرار باشد، μ را روی F جمعی متناهی می گویند. برای دوری از پدیدار شدن جمله هایی به شکل $+\infty, -\infty$ در این جمع، همواره فرض می کنیم که $+\infty, -\infty$ هر دو نمی توانند به دامنه μ تعلق داشته باشند.

اگر μ جمعی شمارش پذیر و برای هر A ، $\mu(A) \geq 0$ باشد، آنگاه μ روی F یک اندازه، و اگر $\mu(\Omega) = 1$ باشد یک اندازه ی احتمال نامیده میشود. و نیز داریم: $\mu(\emptyset) = 0$.

اندازه

تعریف ۶-۱: هر اندازه روی یک σ -جبر F یک تابع نامنفی با مقادیرهای حقیقی تعمیم یافته μ روی F است، بگونه ای که وقتی A_1, A_2, \dots گردایه ای متناهی یا شمارش پذیر نامتناهی از مجموعه های مجزای F هستند، داریم:

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n)$$

اندازه ی احتمال:

تعریف ۷-۱: اگر در تعریف اندازه، $\mu(\Omega) = 1$ باشد، μ اندازه ی احتمال نامیده می شود.

فضای اندازه و فضای احتمال:

تعریف ۸-۱: هر فضای اندازه یک سه تایی (Ω, F, μ) است که در آن Ω یک مجموعه، F یک σ -جبر از زیر مجموعه های Ω و μ اندازه ی روی F است. اگر μ یک اندازه ی احتمال باشد، (Ω, F, μ) یک فضای احتمال نامیده می شود.

اکنون اگر A زیر مجموعه ای از R باشد، کوشش می کنیم که به تعریفی از درازای A دست یابیم. اگر A یک فاصله (باز، بسته یا نیم بسته) با نقطه های انتهایی a, b باشد، منطقی است که درازای A را برابر $\mu(A) = b - a$ بگیریم. اگر A یک مجموعه ی پیچیده تر باشد، نمی توانیم هیچگونه شهودی درباره ی درازای آن داشته باشیم، ولی بعداً خواهیم دید که شرطهای $\mu(a, b] = b - a$ برای هر $a, b \in R$ ، $a < b$ و

اینکه μ یک اندازه است، μ را روی رده ی بزرگی از مجموعه ها تعیین می کند. به ویژه μ روی گردایه ی مجموعه های بورل R که با $B(R)$ نمایانده شده، تعیین می گردد.

مجموعه های بورل:

تعریف ۱-۱: کوچکترین σ -جبر از زیر مجموعه های R که شامل همه ی فاصله های $(a, b]$ ، $a, b \in R$ مجموعه ی بورل نامیده می شود، که آن را بصورت $B(R)$ نشان می دهیم.

باید دانست که وجود $B(R)$ تضمین شده است، و می تواند به صورت به صورت اشتراک همه ی σ -جبرهای حاوی فاصله های $(a, b]$ توصیف گردد. همچنین اگر σ -جبری شامل، مثلاً همه ی فاصله های باز باشد، باید شامل همه فاصله های به شکل $(a, b]$ نیز باشد، و برعکس. زیرا:

$$(a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a, b + \frac{1}{n}) \quad \text{و} \quad (a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a, b - \frac{1}{n}]$$

بنابراین $B(R)$ کوچکترین σ -جبر حاوی همه ی فاصله های باز است.

چون یک فاصله باز است اگر و تنها اگر مکمل آن بسته باشد، $B(R)$ کوچکترین σ -جبر دربردارنده ی همه ی فاصله های بسته R است.

به روش مشابه می توان فاصله های $(a, b]$ را با رده ی دیگری از فاصله ها، مانند: همه ی فاصله های بسته، همه ی فاصله های $[a, b)$ ، $a, b \in R$ ، همه ی فاصله های (a, ∞) ، $a \in R$ ، همه ی فاصله های $(-\infty, b)$ ، $b \in R$ و همه ی فاصله های $(-\infty, b]$ ، $b \in R$ جانشین ساخت. چون هر σ -جبر حاوی همه ی

فاصله های از یک نوع ، شامل همه ی فاصله های از انواع دیگر است ، پس $B(R)$ می تواند به صورت کوچکترین σ -جبر دربردارنده ی همه ی فاصله های R توصیف گردد.

سرانجام اگر F_0 جبر اجتماعهای متناهی و مجزایی از فاصله های نیم بسته از راست باشد آنگاه $B(R)$ کوچکترین σ -جبر حاوی مجموعه های F_0 است .

بطور شهودی ، می توانیم پدید آمدن مجموعه های بورل را چنین تصور کنیم که با فاصله ها آغاز کنیم و مکملها ، اجتماعهای شمارش پذیر و اشتراکهای شمارش پذیر را با همه ی روشهای ممکن تشکیل دهیم . رده ی مجموعه های بورل \bar{R} را با $B(\bar{R})$ نشان می دهیم و به صورت کوچکترین σ -جبر از زیر مجموعه های \bar{R} تعریف می کنیم که حاوی همه ی فاصله هایی به صورت $[a, b]$ $a, b \in \bar{R}$ است. توصیف بالا در ارتباط با جایگذاری فاصله های نیم بسته از راست با رده های دیگری از فاصله ها به همان خوبی درباره ی \bar{R} به کار می رود .

اگر $E \in B(R)$ باشد ؛ $B(E) = \{B \in B(R) : B \subset E\}$ خواهد بود که بر $\{A \cap E : A \in B(\bar{R})\}$ منطبق

است .

اندازه ی متناهی

تعریف ۱-۱۲ : یک تابع مجموعه μ که روی F تعریف شده است، متناهی نامیده می شود اگر و تنها

اگر $\mu(A)$ برای هر $A \in F$ متناهی باشد ، یعنی $\pm \infty$ نباشد.

اگر μ جمعی متناهی باشد کافیسست بخواهیم که $\mu(\Omega)$ متناهی باشد . زیرا $\Omega = A \cup A^c$ و اگر $\mu(A)$

مثلاً برابر $+\infty$ باشد $\mu(\Omega)$ نیز $+\infty$ است.

σ -بایان^۱:

تعریف ۱-۱۳: هر اندازه ی جمعی متناهی μ روی یک σ -جبر F ، σ -بایان نامیده می شود اگر و

تنها اگر بتوان Ω را به صورت $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ نوشت که در آن A_n به F تعلق دارد و برای همه ی n ها:

$$\mu(A_n) < \infty.$$
 F -بایان^۲:

تعریف ۱-۱۴: هر تابع مجموعه ی نامنفی و جمعی بایان μ روی یک σ -جبر F -بایان است اگر و

تنها اگر کراندار باشد یعنی:

$$\sup\{\mu(A) : A \in F\} < \infty$$

اگر شرط نامنفی بودن را حذف کنیم این مطلب دیگر برقرار نخواهد بود. با وجود این هر اندازه ی جمعی شمارشپذیر روی یک σ -جبر بایان است اگر و تنها اگر این اندازه کراندار باشد.

اندازه ی بیرونی

تعریف ۱-۱۵: هر اندازه بیرونی روی Ω ، یک تابع مجموعه ی حقیقی گسترش یافته ی نامنفی λ روی

رده ی همه ی زیرمجموعه های Ω است که شرطهای زیر را بر می آورد:

$$\lambda(\emptyset) = 0 \text{ (الف)}$$

(ب) $A \subset B$ ایجاب می کند که $\lambda(A) \leq \lambda(B)$ (یکنوایی)

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) \text{ (پ) (زیرجمعی شمارشپذیر)}$$

^۱ σ -finite

^۲ F-finite

اندازه ی کامل

تعریف ۱-۱۶: اندازه ی μ روی یک σ -جبر F کامل گفته می شود هرگاه از $\mu(A) = 0, A \in F$ ، برای هر $B \subset A$ داشته باشیم: $B \in F$.

اندازه ی مثبت

تعریف ۱-۱۷: یک اندازه ی مثبت تابعی است مانند μ که بر یک σ -جبر مانند m تعریف شده است، بردش در $[0, \infty]$ است و جمعی شمارش پذیر می باشد.

فضای اندازه پذیر

تعریف ۱-۱۸: هرگاه m یک σ -جبر در فضای X باشد، آنگاه X را یک فضای اندازه پذیر و اعضای m را مجموعه های اندازه پذیر در X می نامیم.

فضای اندازه

تعریف ۱-۱۹: هر فضای اندازه یک فضای اندازه پذیر است که یک اندازه ی مثبت تعریف شده بر σ -جبر مجموعه های اندازه پذیر خود داشته باشد.

فضای $L^p(\mu)$

تعریف ۱-۲۰: فرض کنید X یک فضای اندازه ی دلخواه با اندازه ی مثبت μ باشد؛ اگر $0 < p < \infty$ و f یک تابع اندازه پذیر مختلط بر X باشد، تعریف می کنیم:

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$L^p(\mu) = \{f : \|f\|_p < \infty\}$$

فضای $L^p(\omega)$:

تعریف ۱-۲۱: فرض کنید ω یک تابع انتگرال پذیر نامنفی روی دایره واحد در صفحه مختلط باشد؛ $L^p(\omega)$

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\omega \right)^{\frac{1}{p}}$$

رابطه صورت زیر تعریف می کنیم:

$$L^p(\omega) = \{f : \|f\|_p < \infty\}$$

در واقع در تعریف ۱-۲۰، به جای μ ، ω آورده شده است؛ از آنجاییکه ω انتگرال پذیر و نامنفی است یک

اندازه است و چون C (دایره ی واحد مختلط) یک فضای باناخ با نرم $\|x\| = |x|$ می باشد یک فضای اندازه بوده

ولذا جایگزینی ω با μ درست است.

اندازه ی لبگ - اشتلیس

تعریف ۱-۲۲: هر اندازه ی لبگ - اشتلیس روی R یک اندازه ی μ روی $B(R)$ است به گونه ای

که برای هر فاصله کراندار I داریم: $\mu(I) < \infty$.

فضای خطی نرمدار

تعریف ۱-۲۳: فضای برداری مختلط X را یک فضای خطی نرمدار نامیم، اگر به هر $x \in X$ یک عدد حقیقی

نامنفی مانند $\|x\|$ به نام نرم x چنان مربوط شده باشد که:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

الف) برای هر $x, y \in X$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

ب) برای هر $x \in X$ و هر اسکالر α

$$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$$

پ) برای هر $x \in X$

بنابراین هر فضای خطی نرم‌دار را می‌توان یک فضای متریک گرفت که متر آن برای هر $x, y \in X$ برابر $\|x - y\|$ است.

فضای باناخ

تعریف ۱-۲۴: هر فضای باناخ یک فضای خطی نرم‌دار است که با متر تعریف شده به وسیله ی نرمش تام

می‌باشد. هر $L^p(\mu)$ بانرم $\|f\|_p$ ($1 \leq p \leq \infty$) یک فضای باناخ می‌باشد. ساده‌ترین فضای باناخ خود میدان مختلط بانرم $\|x\| = |x|$ است.

سری همگرا و سری مطلقا همگرا

تعریف ۱-۲۵: اگر $\{x_n\}$ یک دنباله در X باشد، سری $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ همگرا به x نامیده می‌شود اگر:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N x_n = x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$$

و مطلقا همگرا نامیده می‌شود اگر:

واضح است که در یک فضای متریک کامل، هر سری همگرای مطلق، همگراست.