بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم پایه و کشاورزی

نام مرکز: تهران شرق

پایان نامه

برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد

رشته: ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات)

گروه: ریاضی

عنوان پایان نامه:

ارزیابی کارایی سیستم‌های دو مرحله‌ای با اعداد فازی به کمک مجموعه‌ی وزن‌های مشترک

پیمانه گناوه‌ای

استاد راهنما:

دکتر صابر ساعتی

استاد مشاور:

دکتر محمد حسن بیژن زاده

آذر ۱۳۹۱

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

مرکز تهران شرق

شماره: .....
تاریخ: .....
پیوست: .....

دانشگاه پیام نور
دانشگاه پیام نور استان تهران
العلم حبل لو لبک الفرج و العافیة و الیسر

صورتجلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

جلسه دفاع ازپایان نامه کارشناسی ارشد خانم پیمانه گناوه‌ای
دانشجوی رشته ریاضی کاربردی به شماره دانشجویی: ۸۸۰۰۰۱۱۲۱

تحت عنوان:

ارزیابی کارایی سیستم‌های دو مرحله‌ای با اعداد فازی به کمک مجموعه وزن‌های مشترک

جلسه دفاع با حضور داوران نامبرده ذیل در روز چهارشنبه مورخ: ۹۱/۰۹/۲۲ ساعت : ۱۱-۱۰در محل تهران شرق برگزار شد و پس از بررسی پایان‌نامه مذکور با نمره به عدد.....۱۹..... به حروف نوزده و با درجه ارزشیابی.....عالی.....مورد قبول واقع شد ☑ نشد ☐

ردیف	نام و نام خانوادگی	هیات داوران	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه/ موسسه	امضاء
۱	صابر ساعتی مهندی	استاد راهنما	استادیار	آزاداسلامی	
۲	محمدحسن بیژن زاده	استاد مشاور	استاد	پیام نور	
۳	غلامحسن شیردل	استاد داور	استادیار	قم	
۴	فهیمه سلطانیان	نماینده علمی گروه/ نماینده تحصیلات تکمیلی	استادیار	پیام نور	

تهران ، خیابان کریمخان زند ،خیابان استاد نجات الهی ، خیابان شهید فلاح پور ، پلاک ۲۷ مرکز تهران شرق
تلفن : ۸۸۹۱۳۴۷۵
دورنگار: ۸۸۹۴۸۹۸۴
Tshargh.Tpnu.ac.ir
Tshargh@Tpnu.ac.ir

گواهی اصالت، نشر و حقوق مادی و معنوی اثر

اینجانب پیمانه گناوه‌ای دانشجوی ورودی سال ۱۳۸۸ مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات) گواهی می‌نمایم چنانچه در پایان نامه خود از فکر، ایده و نوشته دیگری بهره گرفته‌ام با نقل قول مستقیم منبع و ماخذ آن را نیز در جای مناسب ذکر کرده‌ام. بدیهی است مسئولیت تمامی مطالبی که نقل قول دیگران نباشد بر عهده خویش می‌دانم و جواب گوی آن خواهم بود.
دانشجو تایید می‌نماید که مطالب مندرج در این پایان نامه (رساله) نتیجه تحقیقات خودش می‌باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

پیمانه گناوه‌ای

تاریخ وامضاء ۹۱,۹,۲۲

اینجانب پیمانه گناوه‌ای دانشجوی ورودی سال ۱۳۸۸ مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات) گواهی می نمایم چنانچه بر اساس مطالب پایان نامه خود اقدام به انتشار مقاله، کتاب و ... نمایم ضمن مطلع نمودن استاد راهنما، با نظر ایشان نسبت به نشر مقاله، کتاب و .. و به صورت مشترک و با ذکر نام استاد راهنما مبادرت نمایم.

پیمانه گناوه‌ای

تاریخ وامضاء ۹۱,۹,۲۲

کلیه حقوق مادی مترتب ازنتایج مطالعات، آزمایشات و نوآوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه پیام نور می باشد.

آذر ۱۳۹۱

تقدیم به :

خانواده‌ی عزیز و گرامیم
که مهروزی به آفرینش‌های آفریدگار پاک را برایم زمزمه کردند و همگامم بودند و یاریم کردند که این زمزمه‌ها را فریاد کنم.
و آموزگارانم که الفبای آب و نان را برایم بخش کردند که به جایش آزادی و انسان بودن را یکجا و بدون بخش کردن بخواهم .

تقدیر و قدردانی
این مجموعه را مدیون راهنمایی های استاد گرامی و بزرگوارم جناب آقای دکتر صابر ساعتی می دانم که دلسوزانه و در نهایت صبر و شکیبایی مرا در تهیه و تنظیم این پژوهش مساعدت و یاری نموده و همیشه مشوق اینجانب بوده‌اند و از ایشان کمال تشکر و قدردانی می‌نمایم و از آفریدگار مهربان، پایایی و پیروزی ایشان را در تمام مراحل زندگی خواستارم.
همچنین قدردانی و سپاس خود را محضر استاد گرامی و بزرگوار جناب آقای دکتر بیژن زاده مشاور تهیه پژوهش مذکور تقدیم می‌نمایم و نیز کمال تشکر خود را از داور محترم جناب آقای دکتر شیردل و مدیر گروه محترم کارشناس ارشد ریاضی سرکار خانم دکتر سلطانیان اعلام می‌دارم.

ارزیابی کارایی سیستم‌های دو مرحله‌ای با اعداد فازی به کمک مجموعه‌ی وزن‌های مشترک

چکیده:

این پایان نامه به بررسی کارایی سیستم‌های دو مرحله‌ای با اعداد فازی بوسیله تحلیل پوششی داده‌ها پرداخته است. در سیستم‌های دو مرحله‌ای با اعداد فازی، کارایی‌ها به صورت یک بازه محاسبه می‌شوند که شامل کران بالا و کران پایین می‌باشد. در راستای محاسبه این کران‌ها، یک مجموعه از وزن‌ها باید مشخص گردد.

کاو و لیو برای بدست آوردن این وزن‌ها دو مسئله برنامه‌ریزی جداگانه را، که یکی خطی و دیگری غیر خطی می‌باشد، به کار بردند. این پایان نامه شیوه مجموعه‌ی مشترک وزن‌ها را برای محاسبه وزن‌ها به کار برده است که دیگر نیازمند حل دو مسئله جداگانه نبوده و وزن‌های محاسبه شده با این شیوه هم جهت محاسبه کران بالا و هم جهت بدست آوردن کران پایین کارایی‌ها به کار برده می‌شوند. در این شیوه، مسئله برنامه‌ریزی به صورت خطی می‌باشد.

کلید واژه : تحلیل پوششی داده‌ها، کارایی، سیستم‌های دو مرحله‌ای، داده‌های فازی، مجموعه‌ی مشترک وزن‌ها.

فهرست مطالب

فصل اول	**مقدمه**	**۱**
۱-۱	تعریفی از مسئله	۱
۱-۲	خلاصه‌ای از کار انجام شده در پایان نامه	۳
۱-۳	ساختار فصول پایان نامه	٤
فصل دوم	**تحلیل پوششی داده‌ها**	**٥**
۲-۱	مدل CCR	٦
۲-۲	مدل BCC	۸
۲-۳	مقدمه‌ای بر مجموعه‌ی مشترک وزن‌ها	۱۰
۲-٤	سیر تاریخی مجموعه‌ی فازی	۱۱

۲–۵	مجموعه‌ی فازی: مفاهیم	۱۲
۲–٦	اعداد فازی	۱٤

فصل سوم تحلیل پوششی داده‌های دو مرحله‌ای ۲۲

۳–۱	سیر تاریخی تحلیل پوششی داده‌های دو مرحله‌ای	۲۳
۳–۲	تحلیل پوششی داده‌های دو مرحله‌ای رابطه‌ای	۲٦
۳–۳	تحلیل پوششی داده‌های دو مرحله‌ای فازی	۳۱

فصل چهارم مجموعه‌ی مشترک وزن‌های سیستم‌های دو مرحله‌ای ٤٤

٤–۱	انعطاف پذیری وزن‌ها در تحلیل پوششی داده‌های دو مرحله‌ای فازی	٤۵
٤–۲	محدود کردن انعطاف پذیری وزن‌ها	٤٦
٤–۳	روشی برای کنترل وزن‌ها	٤٦
٤–٤	محاسبه کارایی براساس مجموعه‌ی مشترک وزن‌ها	٦۳
٤–۵	کارایی قطعی	٦۵
٤–٦	مثال عددی	٦٦

فصل پنجم نتیجه گیری **۷۰**

۶-۱ پیشنهادهایی برای ادامه کار ۷۱

مراجع **۷۳**

واژه نامه انگلیسی به فارسی **۷۷**

واژه نامه فارسی به انگلیسی **۸۱**

پیوست جداول **۸۵**

فصل اول

مقدمه

۱-۱ تعریفی از مسئله

تحلیل پوششی داده‌ها[۱] یک روش برنامه ریزی‌ریاضی برای ارزیابی واحدهای تصیم‌گیری[۲] است. تحلیل پوششی داده‌ها، کارایی فنی[۳] را برای واحدهای تصمیم‌گیری با چند ورودی و چند خروجی محاسبه می‌کند. در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها کارایی یک واحد تصمیم‌گیری به صورت نسبت مجموع خروجی‌های وزن‌دار[۴] بر مجموع ورودی‌های وزن‌دار بیان می‌شود. با این شرط که این نسبت برای هیچ یک از واحدهای تصمیم‌گیری از یک مقدار ثابت تجاوز نکند.

در این مدل‌ها، وزن‌های ورودی‌ها و خروجی‌ها به صورت متغیر در نظر گرفته می‌شوند. هدف در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها بدست آوردن بهترین مجموعه قابل قبول وزنی برای واحد تحت بررسی در جهت بیشینه کردن کارایی نسبی[۵] همان واحد است. روش‌های گوناگونی برای تعیین وزن‌ها تا به امروز به کار برده شده است که هر کدام مزایا و معایب خاص خود را داشته‌اند.

۱-Data Envelopment Analysis
۲-Decision Making Unit
۳-Technical Efficiency
۴-Weighted Sum
۵-Relative Efficiency

شیوه تحلیل پوششی داده‌ها ابتدا به تعیین وزن‌های واحد تصمیم گیری مورد ارزیابی در سیستم‌های یک مرحله‌ای پرداخت. در این شیوه کارایی هر سیستم بدون توجه به عملکرد مؤلفه‌های فرآیند سیستم مورد ارزیابی محاسبه می‌گردید و در این راستا مؤلفه‌های ناکارا در سیستم مورد نظر مشخص نمی‌گردید[۱۷]، از این رو شیوه‌ای مطرح گردید که علاوه بر کارایی سیستم، کارایی مؤلفه‌ها را نیز بررسی می‌کند. در این شیوه که مدل تحلیل پوششی داده‌های دو مرحله‌ای نامیده می‌شود، هر فرآیند به صورت یک سیستم در نظر گرفته می‌شود.

داده‌های این مدل در ابتدا به صورت اعداد حقیقی در نظر گرفته می‌شدند اما از آن‌جا که اندازه‌گیری داده‌ها بدون خطا و بصورت دقیق همواره میسر نیست[۱۲،۱۳،۱۹]، از اعداد فازی[۱] برای بیان داده‌ها استفاده گردید. کاو و لیو[۲۰] ، کسانی بودند که برای نخستین بار اعداد فازی را برای محاسبه کارایی سیستم‌های دو مرحله‌ای به کار بردند. شیوه‌ی به کار برده شده توسط آن‌ها، کارایی هر واحد تصمیم‌گیری را به صورت یک بازه تعیین می‌کند که این بازه شامل کران پایین کارایی و کران بالای کارایی می‌باشد. در جهت تعیین کران‌های کارایی، آن‌ها ملزم به یافتن وزن‌هایی برای کران بالا و همین طور کران پایین بودند. از این رو این دو نفر نیازمند حل دو مسئله برنامه‌ریزی ریاضی جهت یافتن این وزن‌ها بودند.

آن‌ها دو برنامه دو سطحی را برای محاسبه کران بالا و پایین کارایی‌ها به کار بردند. برای محاسبه کران بالای کارایی‌ها، هر دو سطح برنامه مسیر مشابه بیشینه سازی را دنبال می‌کند، اما در محاسبه کران پایین کارایی‌ها، برنامه سطح داخلی بیشینه سازی است در حالی که، برنامه سطح خارجی، کمینه سازی است. برنامه‌های دو سطحی صرفاً جهت مدل سازی ارائه می‌شوند. برای حل این برنامه‌ها، باید آن‌ها را به فرم برنامه یک سطحی تبدیل نمود. در برنامه محاسبه کننده کران بالا این کار به آسانی میسر است چون هر دو سطح برنامه مسیر بیشینه سازی را دنبال می‌کنند. بعد از تبدیل برنامه دو سطحی به یک سطحی، برنامه حاصل بدلیل وجود بعضی جملات غیر خطی، غیر خطی است.

۱-Fuzzy Numbers

با جایگذاری مناسب، مسئله به یک مسئله برنامه‌ریزی یک سطحی خطی تبدیل می‌گردد و به‌راحتی قابل حل است.

در مورد برنامه مربوط به کران پایین، برای تبدیل مسئله به یک مسئله برنامه‌ریزی یک سطحی، ابتدا باید هر دو سطح، هم مسیر گردند. برای این کار برنامه سطح اول با دوآلش جایگزین شده است، سپس به یک برنامه یک سطحی تبدیل می‌گردد. برنامه حاصل، مانند کران بالا، یک مسئله برنامه ریزی غیر خطی است با این تفاوت که در این مورد نمی‌توان آن را با جایگذاری به یک برنامه خطی تبدیل نمود[۲۰].

تعیین وزن‌ها همان طور که ملاحظه شد، نیازمند حل دو مسئله برنامه ریزی، یکی خطی و دیگری غیر خطی می‌باشد. علاوه بر این مشکل، تحلیل پوششی داده‌ها موقع مشخص نمودن کارایی یک واحد تصمیم‌گیری در تعیین وزن‌های ورودی و خروجی، انعطاف زیادی از خود نشان می‌دهد. با این کار، برخی از واحدهای تصمیم‌گیری فقط زیر مجموعه‌ی کوچکی از ورودی‌ها و خروجی‌هایشان را در تعیین کارایی دخالت می‌دهند و بقیه ورودی‌ها وخروجی‌ها حذف می‌شوند.

۱-۲ خلاصه‌ای از کار انجام شده در این پایان نامه

در این پایان نامه، شیوه‌ی دیگری برای تعیین وزن‌ها جهت محاسبه کران‌های بالای کارایی و کران‌های پایین کارایی استفاده شده است. این شیوه نیازمند حل دو مسئله جداگانه برای تعیین وزن‌ها نیست.

مجموعه‌ی مشترکی از وزن‌ها[۱] در بین واحدهای تصمیم گیری مطرح می‌شود که می‌تواند این اطمینان را ایجاد کند که در ارزیابی نه تنها هیچ یک از ورودی‌ها و خروجی‌ها کنار گذاشته نمی‌شوند، بلکه

۱-Common Set Of Weights

وزن‌های ورودی‌ها و خروجی‌ها، نسبت به اهمیت آن‌ها اختصاص می‌یابد. به کارگیری این شیوه علاوه بر کاهش انعطاف‌پذیری وزن‌ها، مسئله تعیین کارایی سیستم و کارایی فرآیندها را به صورت یک مسئله برنامه‌ریزی خطی حل می‌نماید.

وزن‌های بدست آمده با این شیوه هم برای محاسبه کران‌های بالا و هم جهت محاسبه کران‌های پایین کارایی مورد استفاده قرار می‌گیرند. برنامه پیشنهادی برای محاسبه وزن‌ها، یک برنامه ریاضی خطی می‌باشد که در آن انعطاف‌پذیری وزن‌ها کاهش یافته است.

۳-۱ ساختار فصول پایان نامه

در این فصل به بیان مقدمه‌ای در زمینه سیستم‌های یک مرحله‌ای و دو مرحله‌ای پرداختیم. در فصل دوم به معرفی دو مدل مشهور از تحلیل پوششی داده‌ها، CCR و BCC، می‌پردازیم و اعداد فازی را معرفی خواهیم نمود. در فصل سوم به بررسی مدل سیستم‌های دو مرحله‌ای با داده‌های حقیقی و بیان برخی اشکالات آن پرداخته و سپس سیستم‌های دو مرحله‌ای با داده‌های فازی را توضیح می‌دهیم. فصل چهارم اشکالات موجود در سیستم‌های دو مرحله‌ای با داده‌های فازی را بیان کرده و شیوه‌ی جدیدی را برای محاسبه کارایی این سیستم‌ها مطرح کرده است. فصل پنجم کاربرد عملی روش‌های مطرح شده برای محاسبه کارایی سیستم‌های دو مرحله‌ای با داده‌های فازی را نشان می‌دهد. فصل ششم نتیجه گیری و پیشنهادات آتی را شامل می‌شود و نهایتاً نتایج حاصل از اجرای روش‌های موجود در این پایان نامه در ضمیمه آمده‌اند.

فصل دوم

تحلیل پوششی داده‌ها

مقدمه

به منظور تعیین میزان کارایی یک واحد باید از شاخصی به عنوان ملاک مقایسه استفاده نمود. اصولاً روش‌های اندازه گیری کارایی از طریق عملی بر اساس روش فارل[۱] (۱۹۵۷)،[۳۰]، صورت می‌گیرد. وی پیشنهاد نمود که بهتر است عملکرد یک واحد با عملکرد بهترین واحد از واحدهای موجود در یک صنعت مورد مقایسه و ارزیابی قرار گیرد. تحلیل پوششی داده‌ها به عنوان روشی برای اندازه گیری کارایی مطرح شد. این روش اولین بار در پایان نامه دکترای ادوارد رودز[۲] در دانشگاه کارنگی میلون[۳] در سال ۱۹۷۸ مطرح شد. رودز تحت سرپرستی کوپر[٤]، به بررسی پیشرفت تحصیلی دانش آموزان مدارس ملی آمریکا پرداخت. از آنجا که اطلاعاتی از هزینه‌ها در فرمولبندی چارنز[٥]-کوپـــر و

۱-Farrell ۲-Rhodes ۳-Carnegie Mellon ٤-Cooper ٥-Charnes

رودز موجود نبود، تخمین کارایی مدارسی که دارای ورودی‌ها و خروجی‌های چند گانه[۱] بودند و همین طور اولین مقاله معرفی کننده‌ی تحلیل پوششی داده‌ها مورد شک و تردید قرار گرفت. در سال ۱۹۷۸ چارنز-کوپر و رودز، روش فارل را جامعیت بخشیدند. آن‌ها با تبدیل ورودی‌ها و خروجی‌های چندگانه به یک خروجی مجازی[۲] و یک ورودی مجازی، روش بهینه سازی[۳] برنامه ریزی ریاضی را برای تعیین اندازه کارایی یک ورودی و یک خروجی فارل به حالت ورودی‌ها و خروجی‌های چندگانه به کار بردند[۳].

مدل BCC، در سال ۱۹۸٤ توسط بنکر[٤]-چارنز و کوپر[۳۱]، با مقاله‌ای که منتشر ساختند معرفی شد. علاوه بر مدل‌هایی که توسط چارنز-کوپر-رودز و بنکر-چارنز و کوپر مطرح شد، مدل‌های خروجی نیز بوسیله‌ی چارنز در سال ۱۹۸۲ ارائه گردید. چارنز مدل‌های اساسی دیگری نیز در تحلیل پوششی داده‌ها معرفی نمود که مدل جمعی[۵] می‌باشد و در سال ۱۹۸۵،[۳۵]، ارائه گردید.

۲-۱ مدل CCR

در این بخش به معرفی یکی از مدل‌های استاندارد تحلیل پوششی داده‌ها، مدل CCR، می‌پردازیم. همان‌طور که قبلاً اشاره گردید این مدل که برای اندازه‌گیری کارایی واحدهای تصمیم‌گیری به کار برده می‌شود، توسط چارنز-کوپر و رودز در سال ۱۹۷۸ مطرح گردید.

با فرض وجود n واحد تصمیم‌گیری، باید n مساله بهینه سازی را حل کنیم، در هر بار کارایی یک واحد تصمیم‌گیری محاسبه می‌گردد. فرض می‌کنیم ارزیابی واحد k ام، $k = ۱, \dots, n$، مورد نظر باشد. برای محاسبه وزن‌های v_i، $(i = ۱, \dots, m)$ و u_r، $(r = ۱, \dots, s)$ مسئله کسری زیر را حل می‌کنیم:

۱-Multiple
۲-Virtual
۳-Optimization
٤-Banker
۵-Additive Model

$$\max \quad \theta = \frac{u_۱ y_{۱k} + u_۲ y_{۲k} + \cdots + u_s y_{sk}}{v_۱ x_{۱k} + v_۲ x_{۲k} + \cdots + v_m x_{mk}}$$

$$s.t \quad \frac{u_۱ y_{۱j} + u_۲ y_{۲j} + \cdots + u_s y_{sj}}{v_۱ x_{۱j} + v_۲ x_{۲j} + \cdots + v_m x_{mj}} \leq ۱ \ , \ j = ۱, \dots, n$$

$$v_i \ , u_r \geq ۰ \quad i = ۱, \dots, m, \ r = ۱, \dots, s$$

این قیود تضمین می‌کنند که نسبت خروجی مجازی به ورودی مجازی برای هیچ یک از واحدهای تصمیم‌گیری بیشتر از ۱ نمی‌شود. تابع هدف به نحوی است که v_i ها و u_r های به دست آمده، این نسبت را برای واحد تصمیم‌گیری k ام حداکثر می‌کنند. با توجه به قیود مسئله حداکثر مقدار θ^* برابر ۱ است.

مدل بالا یک مدل برنامه‌ریزی کسری می‌باشد. برای تبدیل آن به یک مدل برنامه‌ریزی خطی خواهیم داشت:

$$\max \quad \theta = u_۱ y_{۱k} + u_۲ y_{۲k} + \cdots + u_s y_{sk}$$

$$s.t \quad v_۱ x_{۱k} + v_۲ x_{۲k} + \cdots + v_m x_{mk} = ۱$$

$$u_۱ y_{۱j} + u_۲ y_{۲j} + \cdots + u_s y_{sj} \leq v_۱ x_{۱j} + v_۲ x_{۲j} + \cdots + v_m x_{mj} \ , \ j = ۱, \dots, n$$

$$v_i \ , u_r \geq ۰ \quad i = ۱, \dots, m, \ r = ۱, \dots, s \qquad (۱ - ۲)$$

۲-۱-۱ کارای CCR واحد تصمیم گیری k ام را کارای CCR می‌نامیم هرگاه: $\theta^* = ۱$ و حداقل یک جواب بهین $(\boldsymbol{v}^*, \boldsymbol{u}^*)$ وجود داشته باشد که $\boldsymbol{v}^* \geq \mathbf{0}$ و $\boldsymbol{u}^* \geq \mathbf{0}$.

در غیر این صورت واحد k ام ناکارای CCR است. بنابراین ناکارای CCR یعنی این‌که یا $\theta^* < ۰$ یا $\theta^* = ۱$ و حداقل یک عنصر $(\boldsymbol{v}^*, \boldsymbol{u}^*)$ در هر جواب مسئله برنامه‌ریزی خطی برابر صفر است.

۲-۱-۲ دوگان مدل CCR مدل برنامه‌ریزی خطی مدل CCR را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{u}\boldsymbol{y}_k \\ s.t \quad & \boldsymbol{v}\boldsymbol{x}_k = ۱ \\ & -\boldsymbol{v}X + \boldsymbol{u}Y \leq \boldsymbol{0} \\ & \boldsymbol{v} \geq \boldsymbol{0} \ , \boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned} \qquad (۲-۲)$$

که همان روابط مسئله (۲-۱) می‌باشد که به صورت ماتریسی بیان شده است و در آن $X = (\boldsymbol{x}_j) \in R^{m\times n}$ و $Y = (\boldsymbol{y}_j) \in R^{s\times n}$.

حال دوگان مسئله (۲-۲) با متغیر حقیقی θ و بردار نامنفی از متغیرهای $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_۱, \dots, \lambda_n)^T$ عبارت است از:

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta \\ s.t \quad & \theta\boldsymbol{x}_k - X\boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0} \\ & Y\boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{y}_k \\ & \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

مسئله بالا دارای یک جواب شدنی به صورت زیر است[۳۷]:

$$\theta = ۱ \ , \lambda_k = ۱ \ , \lambda_j = ۰ \quad (j \neq k)$$

۲-۲ مدل BCC

در راستای مطالعه‌ی تحلیل پوششی داده‌ها توسیع‌های مختلفی از مدل CCR پیشنهاد گردید که در این میان مدل BCC قابل توجه است. این مدل پوششی حاصل کار بنکر–چارنز و کوپر می‌باشد که در سال ۱۹۸٤ معرفی گردید.

این مدل کارایی واحد تصمیم‌گیری k ام، $(k = ۱, \dots, n)$، را با حل مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی زیر ارزیابی می‌کند:

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta_B \\ s.t \quad & \theta_B x_k - X\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0} \\ & Y\boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{y}_k \\ & \boldsymbol{e\lambda} = ۱ \\ & \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \qquad (۳-۲)$$

که در آن θ_B یک اسکالر است و $X = (\boldsymbol{x}_j) \in R^{m \times n}$ و $Y = (\boldsymbol{y}_j) \in R^{s \times n}$ مجموعه داده‌های ارائه شده و $\boldsymbol{\lambda} \in R^n$ و $\boldsymbol{e}$ یک بردار سطری با عناصر برابر ۱ می‌باشند. مدل BCC تنها در شرط $\boldsymbol{e\lambda} = \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j = ۱$ با مدل CCR متفاوت است.

۲-۲-۱ دوگان BCC دوگان مسئله (۲-۳) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \boldsymbol{u}\boldsymbol{y}_k - u_. \\ s.t \quad & \boldsymbol{v}\boldsymbol{x}_k = ۱ \\ & -\boldsymbol{v}X + \boldsymbol{u}Y - u_.\boldsymbol{e} \leq \mathbf{0} \\ & \boldsymbol{v} \geq \mathbf{0} \quad , \boldsymbol{u} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

که در آن z و $u_.$ اسکالر هستند و $u_.$ یک متغیر آزاد است (می‌تواند مثبت، منفی یا صفر باشد).

۲-۲-۲ کارای BCC در مدل (۲-۳) بردارهای کمکی $\boldsymbol{s}^{-^*} \epsilon R^m$ را به‌عنوان مازاد ورودی و $\boldsymbol{s}^{+^*} \epsilon R^s$ را به‌عنوان کمبود خروجی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\boldsymbol{s}^- = \theta_B x_k - X\boldsymbol{\lambda} \qquad , \qquad \boldsymbol{s}^+ = Y\boldsymbol{\lambda} - y_k$$

که برای هر جواب شدنی (θ_B, λ) مدل (۲-۳) داریم: $\boldsymbol{s^{-^*} \geq 0}$ و $\boldsymbol{s^{+^*} \geq 0}$. اگر $\left(\theta_B^*, \boldsymbol{\lambda^*}, \boldsymbol{s^{-^*}}, \boldsymbol{s^{+^*}}\right)$ جواب بهین مدل (۲-۳) باشد، که در آن $\theta_B^* = ۱$، $\boldsymbol{s^{-^*} = 0}$ و $\boldsymbol{s^{+^*} = 0}$ باشند، آن‌گاه واحد تصمیم‌گیری k ام کارای BCC است و در غیر این صورت ناکارای BCC است[۳۷].

۲-۳ مقدمه‌ای بر مجموعه‌ی مشترک وزن‌ها

چنان‌چه قبلاً اشاره شد، تحلیل پوششی داده‌ها شیوه‌ای برای تعیین کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیری است که در آن کارایی نسبی یک واحد تصمیم‌گیری به صورت نسبت مجموع خروجی‌های وزن‌دار بر مجموع ورودی‌های وزن‌دار بیان می‌شود و این وزن‌ها به گونه‌ای تعیین می‌شوند که واحد تصمیم‌گیری را در بیشینه‌ی کارایی نسبی قرار دهند.

حل یک مسئله برنامه‌ریزی خطی جداگانه برای هر واحد تصیم‌گیری، این کار را انجام می‌دهد. حل مسائل جدا برای هر واحد تصمیم‌گیری اجازه می‌دهد وزن‌های متفاوتی در محاسبه کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیری استفاده شود.

برای جلوگیری از این مشکل و همچنین برای کاهش انعطاف‌پذیری وزن‌ها، شیوه‌ی مجموعه‌ی مشترک وزن‌ها، جهت تعیین وزن‌ها مطرح گردید. این انعطاف‌پذیری باعث می‌شود که برخی از واحدهای تصمیم‌گیری فقط زیر مجموعه‌ی کوچکی از ورودی‌ها و خروجی‌هایشان را در تعیین کارایی دخالت دهند و بقیه ورودی‌ها و خروجی‌ها حذف شوند.

شیوه مجموعه‌ی مشترک وزن‌ها می‌تواند این اطمینان را ایجاد کند که در ارزیابی، نه تنها هیچ یک از ورودی‌ها و خروجی‌ها کنار گذاشته نشوند بلکه وزن‌های ورودی‌ها و خروجی‌ها نسبت به اهمیت آن‌ها اختصاص یابد. تعیین مجموعه‌ی مشترک وزن‌ها در دو مرحله صورت می‌گیرد. در مرحله‌ی