بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين الرحمن الرحيم مالك يوم الدين اياك نعبد واياك نستعين اهدنا الصراط المستقيم صراط الذين انعمت عليهم غير المغضوب عليهم ولا الضالين

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی محض گرایش جبر

گروه خودریختی های مرکزی

استادان راهنما

دکتر علی اکبر محمدی حسن آبادی

دکتر علیرضا عبدالهی

پژوهشگر:

ابراهیم نصیبی

خرداد ماه ۱۳۸۸

شیوه نگارش پایان نامه رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش جبر آقای ابراهیم نصیبی

تحت عنوان:

چه گروههایی می توانند گروه خودریختی های مرکزی یک گروه متناهی باشند

در تاریخ ...۸۸/۳/۲۴..... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ...بسیار خوب.... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر علیرضا عبدالهی	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء
۲- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر علی اکبر محمدی	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۳- استاد داور داخل گروه	دکتر جواد باقریان	با مرتبه علمی استادیار	امضاء
۴- استاد داور خارج گروه	دکتر محمدرضا ریسمانچیان	با مرتبه علمی استادیار	امضاء

مهر و امضای مدیر گروه ....

دانشگاه اصفهان گروه ریاضی

تشکر و قدردانی

از زحمات فراوان و بی دریغ جناب آقای دکتر علی اکبر محمدی که با راهنمایی های خود مرا یاری نمودند کمال تشکر را دارم. همچنین از جناب آقای دکتر علیرضا عبداللهی بسیار سپاسگذارم. همین طور از اساتید محترم به خصوص آقایان دکتر باقریان و دکتر ریسمان چیان که داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند تشکر می نمایم. برای برادر عزیز و بزرگوارم محمد جواد که همواره در کنارم بوده آرزوی توفیق روز افزون دارم. در پایان از دوستان عزیزم آقایان هادی افضلی و علی موسوی سپاسگذاری می نمایم.

ابراهیم نصیبی

تیر ماه ۱۳۸۸

تقدیم به پدر و مادر مهربانم

چکیده

در این پایان نامه نتایج زیر ثابت می شوند:

الف) فرض کنیم G یک گروه غیر آبلی باشد که با $C_2 \times N$ یکریخت نباشد، که در آن N یک گروه غیر آبلی محض و $|Z(N)|$ فرد است. در اینصورت

۱) اگر $Aut_C(G) = Z(Inn(G))$، آنگاه $Z(G) \leq G'$.

۲) $Aut_C(G) = Z(Inn(G))$ اگر و تنها اگر $Hom(G/G', Z(G)) \cong Z_2(G)/Z_1(G)$.

ب) برای یک pـ گروه متناهی G، $Aut_C(G) = Inn(G)$ اگر و تنها اگر $Z(G) = G'$ و G' دوری باشد.

ج) برای یک pـ گروه متناهی G، $C_{Aut_C(G)}(Z(G)) = Inn(G)$ اگر و تنها اگر یا G آبلی باشد یا G پوچتوان از رده ۲ و $Z(G)$ دوری باشد.

د) برای یک pـ گروه متناهی G و یک زیر گروه مرکزی از آن مانند M، $Aut_{Z(G)}^{M} = Inn(G)$ اگر و تنها اگر پوچتوانی رده G برابر ۲ ، $G' \leq Z(G)$ و M دوری باشد.

کلید واژه ها : گروه متناهی، خودریختی مرکزی، غیر آبلی محض، p - گروه.

فهرست مطالب

مقدمه

فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت یک خودریختی σ از G را مرکزی نامیم اگر σ با هر خودریختی داخلی G جابه جا شود یا برای هر $x \in G$ ؛ $x^{-1}\sigma(x)$ در مرکز G قرار گیرد. گروه خودریختی های مرکزی G را با $Aut_c(G)$ نشان می دهیم. یک گروه غیر آبلی G را غیر آبلی محض می نامیم اگر عامل مستقیم آبلی غیر بدیهی نداشته باشد. در [۱] ثابت شده است که هنگامی که G یک گروه غیر آبلی محض باشد، $|Aut_c(G)| = |Hom(G, Z(G))|$. نتایج [۱] پایه ای برای توصیف ساختار خودریختی های مرکزی و غیر مرکزی ارائه می دهد.

در [۵] ثابت شده است که هنگامی که G یک $p-$ گروه غیر آبلی باشد به طوری که $Inn(G) \leq Aut_c(G)$، آنگاه

۱) $Aut_c(G) = Inn(G)$ اگر و تنها اگر $G' = Z(G)$ و $Z(G)$ دوری باشد.

۲) $[Aut_c(G) : Inn(G)] = p$ اگر و تنها اگر $[Z(G) : G'] = p$ و $Z(G)$ دوری باشد.

در [۱۴] ثابت شده است که وقتی p عددی فرد است، گروه خودریختی های مرکزی یک $p-$ گروه، $p-$ گروه است اگر و تنها اگر G عامل مستقیم آبلی نداشته باشد.همچنین اگر $p = ۲$، آنگاه شرط فوق برقرار است اگر و تنها اگر برای هر i، G حداکثر یک عامل مستقیم دوری از مرتبهٔ ۲^i داشته باشد.

گروه خودریختی های مرکزی G هنگامی بزرگترین مقدار را داراست که $Aut_c(G) = Aut(G)$. در این حالت G پوچتوان از ردهٔ حداکثر ۲ است. به وضوح برای هر گروه G، $Z(Inn(G)) \leq Aut_c(G)$. در مقابل حالتی را داریم که

$Aut_c(G) = Z(Inn(G))$. در این حالت ثابت می کنیم که اگر G یک p—گروه غیر آبلی باشد به طوری که $Aut_c(G) = Z(Inn(G))$، آنگاه $Z(G) \leq G'$ و به علاوه $Aut_c(G) = Z(Inn(G))$ اگر و تنها اگر $Hom(G/G', Z(G)) \cong Z_2(G)/Z_1(G)$.

این پایان نامه در سه فصل تنظیم شده است. در فصل اول مفاهیم اولیه را به طور گذرا بیان می کنیم. در فصل دوم ابتدا تابع معروف ادنی و ین[1] را مورد بررسی قرار می دهیم. همچنین تعدادی از نتایج کلی گروه خودریختی های مرکزی از یک گروه متناهی را که در مطالعه مان مورد استفاده قرار می گیرد، ارائه خواهیم داد. به علاوه برای یک گروه غیر آبلی G که با $C_2 \times N$ یکریخت نباشد، که در آن N یک گروه غیر آبلی محض و $|Z(N)|$ فرد است، ثابت می شود که

۱) اگر $Aut_c(G) = Z(Inn(G))$، آنگاه $Z(G) \leq G'$،

۲) $Aut_c(G) = Z(Inn(G))$ اگر و تنها اگر $Hom(G/G', Z(G)) \cong Z_2(G)/Z_1(G)$. در نهایت ثابت می شود که اگر G یک p—گروه غیر آبلی باشد، آنگاه $Aut_c(G) = Inn(G)$ اگر و تنها اگر $G' = Z(G)$ و G' دوری باشد.

در فصل سوم ثابت می شود که اگر G یک p—گروه متناهی باشد، آنگاه $C_{Aut_c(G)}(Z(G)) = Inn(G)$ اگر و تنها اگر یا G آبلی باشد یا G پوچتوان از ردهٔ ۲ و $Z(G)$ دوری باشد. به علاوه ثابت می شود که اگر G یک p—گروه متناهی غیرآبلی و M یک زیر گروه مرکزی از آن باشد، آنگاه $Aut^M_{Z(G)}(G) = Inn(G)$ اگر و تنها اگر ردهٔ پوچتوانی G برابر ۲، $G' \leq M$ و M دوری باشد.

---

[1] Adney and Yen

فصل ۱

پیشنیازها

در این فصل تعاریف و قضایای مقدماتی را که در طی فصل های بعدی مورد نیاز است به طور گذرا بیان می کنیم.

قرارداد ۱—۰.۱ . در این فصل و فصل های دیگر، گروه دوری مرتبهٔ n را با C_n و مرتبهٔ هر عضو مانند g از یک گروه G را با $|g|$ نشان می دهیم. همچنین همهٔ گروهها متناهی فرض شده اند. به علاوه p را یک عدد اول فرض کرده ایم.

۱—۱ تعریف ها و قضایای اولیه

تعریف ۱—۱.۱ . فرض کنیم G و H دو گروه باشد. در این صورت تابع $\varphi : G \to H$ را یک همریختی نامیم اگر برای هر $x, y \in G$، $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$. اگر همریختی φ یک به یک و پوشا باشد، آن را یک یکریختی می نامیم. نماد $G \cong H$ خوانده می شود گروه G یکریخت با گروه H است. لذا وقتی که $\varphi : G \to H$ یک یکریختی باشد، می نویسیم $G \cong H$. مجموعهٔ همهٔ همریختی های از G به H را با $Hom(G, H)$ نشان می دهیم. اگر H آبلی باشد، آنگاه مجموعهٔ $Hom(G, H)$ همراه با عمل زیر یک گروه آبلی است. برای هر $g \in G$ و برای هر $\varphi, \psi \in Hom(G, H)$ تعریف می کنیم: $(\varphi.\psi)(g) = \varphi(g)\psi(g)$. همچنین عضو همانی این گروه همریختی $\theta : G \to H$ است که به ازای هر $g \in G$ به صورت $\theta(g) = ۱_H$ تعریف می شود که در آن ۱_H عنصر همانی H است.

تعریف ۱—۲.۱ . فرض کنیم G و H دو گروه باشند، $\varphi : G \to H$ یک همریختی و ۱_H عنصر همانی H باشد. در این صورت برد φ ($Im\varphi$) و هسته φ ($ker\varphi$) به صورت زیر تعریف می شوند:

$$Im\varphi = \{\varphi(g) : g \in G\}.$$

$$ker\varphi = \{g \in G : \varphi(g) = ۱_H\}.$$

لم ۱—۱.۳ . فرض کنیم A و B و C گروههای آبلی باشند به طوری که $A \cong B$. در این صورت $Hom(A,C) \cong Hom(B,C)$.

اثبات. فرض کنیم $f : B \to A$ یک یکریختی باشد. اگر $\varphi : Hom(A,C) \to Hom(B,C)$ را به ازای هر $g \in Hom(A,C)$ به صورت $\varphi(g) = gof$ تعریف کنیم، آنگاه φ یک یکریختی است و نتیجه بر قرار است. ■

قضیه ۱—۱.۴ (قضیهٔ اول یکریختی).

اگر $f : G \to H$ یک همریختی باشد، آنگاه تابع $\varphi : G/kerf \to H$ با ضابطهٔ $\varphi(xkerf) = f(x)$ یک تکریختی است. در نتیجه $G/kerf \cong Imf$.

اثبات. ر.ک.[1] [۱۳، صفحهٔ ۱۹، قضیهٔ ۱.۴.۳]. ■

قضیه ۱—۱.۵ (قضیهٔ دوم یکریختی).

فرض کنیم G یک گروه باشد و $M \leq G$ و $N \lhd G$. در این صورت $N \cap M \lhd M$ و $NM/N \cong M/N \cap M$.

اثبات. ر.ک. [۱۳، صفحهٔ ۱۹، قضیهٔ ۱.۴.۴]. ■

قضیه ۱—۱.۶ (قضیهٔ سوم یکریختی).

فرض کنیم M و N زیر گروههای نرمالی از یک گروه G باشند به طوری که $N \leq M$. در این صورت $M/N \lhd G/N$ و $(G/N)/(M/N) \cong G/M$.

اثبات. ر.ک. [۱۳، صفحهٔ ۱۹، قضیهٔ ۱.۴.۵]. ■

[1] مخفف رجوع کنید به

تعریف ۱—۷.۱ . فرض کنیم G یک گروه باشد و $x, y \in G$. در این صورت جابه‌جاگر x و y را با $[x, y]$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}x^{y}.$$

زیر گروه تولید شده بوسیلهٔ جابه‌جاگرها را زیر گروه جابه‌جاگر یا زیر گروه مشتق G می نامیم و با G' نشان می دهیم.

قضیه ۱—۸.۱ . فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت

۱) $G' \lhd G$.

۲) اگر $N \lhd G$، آنگاه G/N آبلی است اگر و تنها اگر $G' \leq N$.

۳) G آبلی است اگر و تنها اگر $G' = 1$.

اثبات. ر.ک. [۱۰، صفحهٔ ۱۰۲، قضیهٔ ۸.۷]. ■

تعریف ۱—۹.۱ . گروه G را متناهی مولد نامیم در صورتی که زیر مجموعه ای متناهی مانند X داشته باشد به طوری که $G = < X >$.

قضیه ۱—۱۰.۱ . فرض کنیم x، y و z عناصر یک گروه باشند. در این صورت

۱) $[x, y] = [y, x]^{-1}$.

۲) $[xy, z] = [x, z]^{y}[y, z]$ و $[x, yz] = [x, z][x, y]^{z}$.

۳) $[x, y^{-1}] = ([x, y]^{y^{-1}})^{-1}$ و $[x^{-1}, y] = ([x, y]^{x^{-1}})^{-1}$.

۴) $[x, y^{-1}, z]^{y}[y, z^{-1}, x]^{z}[z, x^{-1}, y]^{x} = 1$.

اثبات. ر.ک. [۱۳، صفحهٔ ۱۱۹، قضیهٔ ۵.۱.۵]. ■

تعریف ۱—۱.۱۱ . فرض کنیم G یک گروه و A و B زیر گروههای آن باشند. در این صورت جابه‌جاگر A و B را با $[A,B]$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$[A,B] =< [a,b] : a \in A, b \in B > .$$

تعریف ۱—۱.۱۲ . فرض کنیم G یک گروه آبلی و متناهی و n یک عدد طبیعی باشد. در این صورت $G[n]$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$G[n] = \{g \in G : g^n = ۱\}.$$

واضح است که $G[n]$ یک زیر گروه از G است.

تعریف ۱—۱.۱۳ . فرض کنیم $G_۱$، $G_۲$،...، G_n، n گروه باشند. یک عمل روی مجموعهٔ $G_۱ \times G_۲ \times \cdots \times G_n$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$(g_۱, g_۲, ...g_n)(g'_۱, g'_۲, ..., g'_n) = (g_۱g'_۱, g_۲g'_۲, ..., g_ng'_n).$$

که در آن برای هر i، $۱ \leqslant i \leqslant n$، $g_i, g'_i \in G_i$. مجموعهٔ $G_۱ \times \cdots \times G_n$ همراه با عمل فوق یک گروه است. این گروه را حاصلضرب مستقیم خارجی $G_۱$، $G_۲$،...، G_n می نامیم.

قضیه ۱—۱.۱۴ . فرض کنیم G یک گروه و $H_۱$، $H_۲$،...، H_n زیر گروههایی از آن باشند به طوری که

۱) برای هر i، $۱ \leqslant i \leqslant n$، $H_i \lhd G$،

۲) $G = H_۱ \cdots H_n$،

۳) برای هر i، $۱ \leqslant i \leqslant n$، $H_i \cap H_۱ \cdots H_{i-۱}H_{i+۱} \cdots H_n = ۱$. در این صورت

$.G \cong H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n$

اثبات. ر.ک. [۱۰، صفحهٔ ٦۱، قضیهٔ ۷.۸]. ■

تعریف ۱—۱.۱۵ . زیر گروه H از گروه G را یک عامل مستقیم نامیم اگر زیر گروه نرمالی مانند K از G موجود باشد به طوری که $G \cong H \times K$.

قضیه ۱—۱.۱٦ . فرض کنیم G_1 و G_2 دو گروه باشند و $H_1 \lhd G_1$ و $H_2 \lhd G_2$. در این صورت:

۱) $H_1 \times H_2 \lhd G_1 \times G_2$ و $G_1 \times G_2/H_1 \times H_2 \cong G_1/H_1 \times G_2/H_2$،

۲) $Z(G_1 \times G_2) = Z(G_1) \times Z(G_2)$،

۳) $(G_1 \times G_2)' = G_1' \times G_2'$.

قضیه ۱—۱.۱۷ (قضیهٔ اساسی گروههای آبلی).

هر گروه آبلی با تولید متناهی با حاصلضرب مستقیمی از گروههای دوری یکریخت است که در آن حاصلضرب های دوری متناهی غیر بدیهی (درصورت وجود) از مراتب $m_1,\ldots,m_t$ اند به طوری که $m_1|m_2|\ldots|m_t$ و $m_1 > 1$.

اثبات. ر.ک. [۱۰، صفحهٔ ۷٦، قضیهٔ ۱.۲]. ■

قضیه ۱—۱.۱۸ . هر گروه آبلی با تولید متناهی با حاصلضرب مستقیمی از گروههای دوری یکریخت است که هر یک نامتناهی اند یا از مرتبهٔ توانی از اعداد اول اند.

اثبات. ر.ک. [۱۰، صفحهٔ ۷٦، قضیهٔ ۲.۲]. ■

قضیه ۱—۱.۱۹ . اگر m یک عدد صحیح باشد به طوری که $m = p_1^{n_1}p_2^{n_2}\ldots p_t^{n_t}$ که در آن p_1، p_2، ...، p_t اعداد اول متمایزی بوده و برای هر i، $1 \leqslant i \leqslant t$، $n_i > 0$، آنگاه

$C_m \cong C_{p_1^{n_1}} \times C_{p_2^{n_2}} \times \cdots \times C_{p_t^{n_t}}$.

اثبات. ر.ک. [۱۰، صفحهٔ ۷۷، قضیهٔ ۳.۲]. ■

تعریف ۱—۱.۲۰ . فرض کنیم p یک عدد اول باشد. گروه متناهی G را یک p—گروه نامیم اگر مرتبهٔ آن توانی از p باشد. با استفاده از قضیهٔ لاگرانژ مرتبهٔ هر عنصر از یک p—گروه نیز باید توانی از p باشد.

قضیه ۱—۱.۲۱ . مرکز هر p—گروه متناهی غیر بدیهی، غیر بدیهی است.

اثبات. ر.ک. [۱۳، صفحهٔ ۳۹، قضیهٔ ۱۴.۶.۱]. ■

قضیه ۱—۱.۲۲ . هر گروه از مرتبهٔ p^2 آبلی است.

اثبات. ر.ک. [۱۳، صفحهٔ ۳۹، قضیهٔ ۱۵.۶.۱]. ■

تعریف ۱—۱.۲۳ . گروه آبلی G را که هر عنصر غیر بدیهی آن از مرتبهٔ p باشد یک p—گروه آبلی مقدماتی می نامیم.

تعریف ۱—۱.۲۴ . فرض کنیم G یک گروه متناهی و p یک عدد اول باشد و $|G| = p^a m$ به طوری که $p \nmid m$. در این صورت اگر زیر گروه H از G موجود باشد به طوری که $|H| = p^a$، آنگاه H یک p—زیر گروه سیلوی G نامیده می شود.

قضیه ۱—۱.۲۵ (قضیهٔ سیلو).

فرض کنیم G یک گروه متناهی، p یک عدد اول و a و m اعدد صحیح مثبتی باشند به طوری که $|G| = p^a m$ و $p \nmid m$. در این صورت

۱) هر p—زیر گروه G در یک زیر گروه از مرتبهٔ p^a قرار می گیرد. در حالت خاص،

p—زیر گروه‌های سیلو همواره وجود دارند.

۲) اگر n_p تعداد p—زیر گروه‌های سیلوی G باشد، آنگاه $n_p \equiv 1 \ (mod p)$.

۳) همهٔ p—زیر گروه‌های سیلوی G مزدوجند.

اثبات. ر.ک. [۱۳، صفحهٔ ۳۹، قضیهٔ ۱۶.۶.۱]. ■

لم ۱—۲۶.۱ . اگر G یک گروه آبلی و متناهی از مرتبهٔ n و m عدد صحیح مثبتی باشد به طوری که $m|n$، آنگاه G زیر گروهی از مرتبهٔ m دارد.

اثبات. ر.ک. [۱۰، صفحهٔ ۷۷، نتیجهٔ ۴.۲]. ■

تعریف ۱—۲۷.۱ . فرض کنیم G یک گروه و H زیر گروهی از آن باشد. در این صورت مرکز ساز H را با $C_G(H)$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$C_G(H) = \{g \in G : gh = hg \text{ ، برای هر } h \in H\}.$$

قضیه ۱—۲۸.۱ . فرض کنیم G یک p—گروه آبلی متناهی باشد و $g \in G$. در این صورت اگر مرتبهٔ g از مرتبهٔ هر عضو G ناکمتر باشد، آنگاه $< g >$ عامل مستقیمی از G است.

اثبات. ر.ک. [۱۳، صفحهٔ ۹۹، نتیجهٔ ۷.۲.۴]. ■

قضیه ۱—۲۹.۱ (قضیهٔ کشی [۲]).

فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $p||G|$ که در آن p عددی اول است. در این صورت G عضوی از مرتبهٔ p دارد.

اثبات. ر.ک. [۱۰، صفحهٔ ۹۳، قضیهٔ ۲.۵]. ■

[۲] Cauchy

تعریف ۱—۱.۳۰ : فرض کنیم X یک مجموعه باشد. هر تابع دوسویی روی X را یک جایگشت از X می نامیم. مجموعهٔ همهٔ جایگشت های X را با S_X نمایش می دهیم. S_X همراه با ترکیب توابع یک گروه است. این گروه را گروه متقارن یا گروه جایگشت های روی X می نامیم. فرض کنیم $X = \{۱, ۲, ..., n\}$. در این صورت S_X را با S_n نمایش می دهیم و آن را گروه متقارن یا گروه جایگشتی از درجه n می نامیم.

۱—۲ گروههای پوچتوان

تعریف ۱—۲.۱ . فرض کنیم G یک گروه باشد. یک سری نرمال G زنجیره ای است متناهی از زیر گروههای نرمال G مانند $۱ = G_۰ \leq G_۱ \leq ... \leq G_n = G$. سری نرمال $۱ = G_۰ \leq G_۱ \leq ... \leq G_n = G$ را یک سری مرکزی گوئیم در صورتی که برای هر i، $۱ \leqslant i \leqslant n$، $G_i/G_{i+۱} \leq Z(G/G_{i+۱})$.

تعریف ۱—۲.۲ . گروه G را پوچتوان نامیم، اگر یک سری مرکزی داشته باشد. طول کوتاهترین سری مرکزی G را ردهٔ پوچتوانی G می نامیم.

مثال ۱—۲.۳ . ۱) هر گروه آبلی غیر بدیهی یک گروه پوچتوان از ردهٔ پوچتوانی ۱ است.

۲) اگر G یک گروه پوچتوان غیر بدیهی باشد، آنگاه $Z(G) \neq ۱$.

قضیه ۱—۲.۴ . هر p—گروه متناهی پوچتوان است.

اثبات. ر.ک. [۱۰، صفحهٔ ۱۰۰، قضیهٔ ۱.۷]. ■

قضیه ۱—۲.۵ : حاصلضرب مستقیم تعداد متناهی گروه پوچتوان، پوچتوان است.

اثبات. ر.ک. [۱۰، صفحهٔ ۱۰۱، قضیهٔ ۵.۷]. ■

تعریف ۱—۲.۶ . فرض کنیم G یک گروه باشد و $Z_0(G) = 1$ و برای هر $n \geqslant 0$، $Z_{n+1}(G)/Z_n(G) = Z(G/Z_n(G))$. در این صورت سری $1 = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq Z_2(G) \leq ...$ را سری مرکزی بالایی G می نامیم.

تعریف ۱—۲.۷ . فرض کنیم G یک گروه باشد و $\gamma_1 G = G$ و برای هر $n \geqslant 1$، $\gamma_{n+1}G = [\gamma_n G, G]$. در این صورت سری $G = \gamma_1 G \geq \gamma_2 G \geq ...$ را سری مرکزی پایینی G می نامیم.

قضیه ۱—۲.۸ . فرض کنیم G یک گروه پوچتوان و $1 = G_0 \leq ... \leq G_n = G$ یک سری مرکزی از آن باشد. در این صورت

۱) $\gamma_i(G) \leq G_{n-i+1}$ پس $\gamma_{n+1}(G) = 1$.

۲) $G_i \leq Z_i(G)$ پس $Z_n(G) = G$.

۳) رده پوچتوانی G برابر است با طول سری مرکزی بالایی G و همچنین برابر است با طول سری مرکزی پایینی G.

اثبات. ر.ک. [۱۳، صفحهٔ ۱۲۱، قضیهٔ ۹.۱.۵]. ■

قضیه ۱—۲.۹ . اگر G یک گروه پوچتوان باشد و $1 \neq N \lhd G$، آنگاه $N \cap Z(G) \neq 1$.

اثبات. ر.ک. [۱۳، صفحهٔ ۱۲۵، قضیهٔ ۱.۲.۵]. ■