وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه تربیت معلم آذربایجان

دانشکده علوم پایه

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض

عنوان :

نتایجی درباره نقاط ثابت نگاشت‌های یکنوای ترکیبی و چند تابعی‌ها

استاد راهنما :

دکتر شهرام رضاپور

استاد مشاور :

دکتر محمد حسین ستاری

پژوهشگر :

راضیه محمدزاده

خرداد ۱۳۸۹

تبریز — ایران

بسم اللّه الرّحمن الرّحيم

تقدیم به

همه‌ی خوبی ها

پدر و مادر

عزیز و بزرگوارم

تشکر و قدردانی

حمد و سپاس خداوند سبحان را سزاست که مرا توفیق کسب دانش عطا کرد. امید است شایستگی دانشی افزونتر از جانب ایشان را داشته‌باشم و با اتکال به عنایات الهی و همنشینی با رهروان علم و دانش بتوانم قدمی هر چند کوچک در اعتلای علم و دانش برداشته باشم.

حال بر خود وظیفه می‌دانم از تمامی عزیزانی که که در این راه مرا یاری نمودند تشکر و قدر دانی نمایم. امید است که سپاس بی‌دریغ اینجانب را بپذیرند.

استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر رضاپور که دانش خود را در نهایت سخاوت، صبورانه در اختیار اینجانب قرار دادند تا این پروژه به سرانجام برسد. جناب آقای دکتر ستاری که استاد مشاور اینجانب بودند و در دوران تحصیلم همواره از دانش بی‌دریغ ایشان بهره بردم.

جناب آقای دکتر غفاری که داوری این پروژه را پذیرفتند. سایر اساتید محترمی که در دوران تحصیلم، افتخار شاگردی ایشان را داشته‌ام.

تک‌تک اعضای خانواده‌ام بخصوص پدر بزرگوار و مادر عزیزم که همواره مشوق و امید بخش من در زندگی و دوران تحصیلم می‌باشند.

برای تمامی این عزیزان آرزوی سلامتی، سربلندی و موفقیت روز افزون دارم.

راضیه محمدزاده

فهرست مندرجات

چکیده

فرض کنید E یک فضای برداری توپولوژیک باشد و $D \subseteq E$. نگاشت $A : D \times D \longrightarrow E$ را یکنوای ترکیبی نامند هرگاه $A(x,y)$ نسبت به x صعودی و نسبت به y نزولی باشد. $x^* \in D$ و $(x^*, y^*) \in D \times D$ را به ترتیب نقطه ثابت و نقطه ثابت جفت شده نگاشت یکنوای ترکیبی A نامند هرگاه $A(x^*, x^*) = x^*$، $A(y^*, x^*) = y^*$ و $A(x^*, y^*) = x^*$.

در این رساله قضایا نتایجی درباره وجود و یکتایی نقطه ثابت چندتابعی‌های انقباضی و نگاشت های یکنوای ترکیبی در فضاهای متریک، متریک مخروطی و باناخ، بیان و اثبات می‌شود و نیز قضایا و نتایجی درباره نقطه ثابت جفت شده توابع و نگاشت های یکنوایی ترکیبی در فضاهای مرتب و متریک مخروطی ارایه و اثبات می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: چندتابعی، عملگر یکنوای ترکیبی، عملگرهای $\alpha-$ محدب، $\psi-$ مقعر، نگاشت محدب، نگاشت مقعر، مخروط، نقطه ثابت جفت شده.

پیشگفتار

در این رساله به بررسی نقاط ثابت نگاشت‌های یکنوای ترکیبی و چندتابعی‌ها می‌پردازیم. چندتابعی تعمیمی از مفهوم تابع می‌باشد

می‌خواهیم رده‌های مختلف عملگرهای یکنوای ترکیبی و چندتابعی‌ها و نظریه نقطه ثابت و نقطه جفت شده‌ی عملگرهای یکنوای ترکیبی و چندتابعی‌ها را مورد تحلیل قرار دهیم.

بدین منظور، رساله به چهار فصل تقسیم شده است. فصل اول به مقدمه اختصاص دارد. سایر فصل ها تقریبا مستقل از هم هستند. در فصل دوم، نقاط ثابت نگاشت‌های یکنوای ترکیبی با اختلال و $t - \alpha(t)$ و ϕ محدب $- \psi$ مقعر را در فضاهای برداری توپولوژیک و باناخ مرتب بررسی و کاربرد این مفاهیم را برای حل معادلات انتگرالی ارایه می‌دهیم.

در فصل سوم به بررسی نقاط ثابت جفت شده در فضاهای مرتب و متریک مخروطی می‌پردازیم.

فصل چهارم به بررسی نقاط ثابت چندتابعی های انقباضی اختصاص دارد.

بررسی قضیه های وجود و یگانگی نقاط ثابت برای عملگر های یکنوای ترکیبی محدب و مقعر در سال ۱۹۹۶ صورت گرفت. سپس این موضوع برای حالت کلی تر این نگاشت ها که عملگرهای محدب و مقعر با اختلال است، در سال ۲۰۰۷ توسط لیانگ[۱] و کیلی[۲] اثبات شد.

تعریف و بررسی نقاط ثابت عملگرهای یکنوای ترکیبی ϕ محدب $- \psi$ مقعر، در سال ۲۰۰۷ توسط ژانگ[۳] انجام شده است.

---

[۱] Liang

[۲] Kili

[۳] Zhang

در سال ۲۰۰۷ کلایم[۴] و واردوسکی [۵] مفاهیم جدیدی را برای انقباض های غیر خطی در فضای متریک بدست آوردند. این مفاهیم توسط هونگ[۶] به فضای متریک مخروطی تعمیم داده شد.
وجود و یکتایی نقاط ثابت برای عملگرهای یکنوای ترکیبی وابسته به PPF[۷] روشی برای حل معادلات با تاخیر ارایه می‌دهد. تاکنون فقط سه مقاله، که مراجع [۲۰]، [۱۱] و [۵] هستند، در این زمینه چاپ شده است. منابع [۵] و [۱۱] توسط ریچی[۸] در سالهای ۲۰۰۷ و ۲۰۰۸ و مرجع [۲۰] در سال ۱۹۷۷ توسط برنفلد[۹] به چاپ رسیده است. در بخش اول فصل سوم این رساله، از [۵] و [۱۱] برای اثبات وجود و یکتایی نقاط جفت شده عملگرهای یکنوای ترکیبی و حل معادلات با تاخیر استفاده شده است.
منابع اصلی این رساله، مراجع [۲]، [۳]، [۴]، [۵]، [۶]، [۸] و [۱۳] می‌باشند.

---

[۴] Klim
[۵] Wardowski
[۶] Hong
[۷] Past, Present and future
[۸] Drici
[۹] Bernfeld

فصل ۱

مقدمه

در این فصل، برخی تعاریف مقدماتی مربوط به عملگرهای یکنوای ترکیبی و چندتابعی‌ها در فضاهای مرتب و متریک مخروطی و سایر مفاهیم مرتبط با آنها را که در فصل‌های بعدی به کار می‌روند، مطرح می‌کنیم.

۱.۱ مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱ برای مجموعه ناتهی Y، 2^Y نمایشگر تمام زیرمجموعه‌های Y است. چندتابعی $T : X \to 2^Y$ یک تابع از مجموعه X به 2^Y است، یعنی هر عضو X را به زیر مجموعه‌ای ناتهی از Y می‌نگارد. برای $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$، تصویر A تحت T را بصورت $T(A) = \bigcup\limits_{x\in A} T(x)$ و تصویر معکوس B تحت T را به صورت $T^{-1}(B) = \{x \in X : T(x) \bigcap B \neq \emptyset\}$ تعریف می‌کنند.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنید (X, d) فضای متریک و $CL(X)$ و $CB(X)$ و $Comp(X)$ به‌ترتیب نمایشگر مجموعه کلیه زیرمجموعه‌های بسته ناتهی، بسته و کراندار ناتهی، فشرده ناتهی از X باشند. متریک هاسدورف $H : CB(X) \times CB(X) \longrightarrow [0, \infty]$ را به‌صورت

$$H(A,B)=\max\{\sup_{x\in A}D(x,B)\ ,\ \sup_{y\in B}D(y,B)\}$$

تعریف می‌کنیم، که در آن $D(x,A)=\inf_{y\in A}d(x,y)$.

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنید E یک مجموعه و $D\subseteq E$ و $B:D\longrightarrow E$ یک نگاشت باشد. دراین‌صورت $D(B)$ و $R(B)$ به‌ترتیب نمایشگر حوزه‌های تعریف و مقادیر نگاشت B و $C(D)$ نمایشگر توابع پیوسته از D به D می‌باشد.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنید E یک فضای برداری توپولوژیک باشد. $P\subseteq E$ را یک مخروط نامیم هرگاه

۱) بسته و ناتهی باشد و $P\neq\{\theta\}$،

۲) برای هر $x,y\in P$ و هر $a,b\in R$ که $a,b\geq 0$، داشته باشیم $ax+by\in P$،

۳) $P\cap -P=\{\theta\}$. که در آن θ، صفر E می‌باشد.

فرض کنید E فضای برداری توپولوژیک و $P\subseteq E$ یک مخروط باشد. رابطه ترتیب جزئی نسبت به P روی E را به صورت زیر تعریف کنید:

$$x\leq y\Leftrightarrow y-x\in P.$$

گوییم $y\gg x$ هرگاه $y-x\in P^\circ$. به ازای u_0,v_0 دلخواه از E، بازه $[u_0,v_0]$ به صورت $[u_0,v_0]=\{u\in E:u_0\leq u\leq v_0\}$ تعریف می‌شود. گوییم $x,y\in E$ دارای رابطه هم‌ارزی $\sim$ می‌باشند و می‌نویسیم $x\sim y$، هرگاه $0<\lambda\leq\mu$ چنان موجود باشند که $\lambda x\leq y\leq\mu x$. تعریف کنید

$$P_h=\{x\in E:\exists\lambda(x),\ \mu(x)>0\ s.t.\ \lambda(x)h\leq x\leq\mu(x)h\},$$

که در آن $h>\theta$. واضح است که $P_h\subseteq P$.

تعریف ۵.۱.۱ گوییم مخروط P

۱) نرمال است هرگاه E یک فضای نرمدار باشد و $N > \circ$ چنان موجود باشد که برای هر $x, y \in E$ که $\theta \leq x \leq y$ داشته باشیم $\|x\| \leq N\|y\|$.

۲) جامد است هرگاه $P^\circ \neq \emptyset$. بعبارتی P حداقل یک نقطه درونی داشته باشد.

تعریف ۶.۱.۱ فرض کنید X و Y دو زیر مجموعه از E باشند. گوییم $X \leq Y$ هرگاه برای هر $x \in X$، $y \in Y$ چنان موجود باشد که $x \leq y$.

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنید E یک فضای باناخ و $D \subseteq E$ محدب باشد. $A : D \longrightarrow E$ نگاشت محدب (مقعر) است هرگاه برای هر $x, y \in D$ که $x \leq y$ و $t \in [\circ, ۱]$ داشته باشیم

$$A(tx + (۱ - t)y) \leq tAx + (۱ - t)Ay \quad (A(tx + (۱ - t)y) \geq tAx + (۱ - t)Ay).$$

تعریف ۸.۱.۱ فرض کنید $D \subseteq E$ محدب باشد. $A : D \longrightarrow E$ نگاشت آفین نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x, y \in D$ و $t \in [\circ, ۱]$ داشته باشیم

$$A(tx + (۱ - t)y) = tAx + (۱ - t)Ay.$$

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنید $E_۱$ و $E_۲$ دو فضای مرتب و $P_۱$ و $P_۲$ دو مخروط (پس از انتخاب، ثابت) به‌ترتیب در $E_۱$ و $E_۲$ و $T : E_۱ \longrightarrow E_۲$ یک نگاشت باشد. گوییم $T \geq \circ$ هرگاه $T(P_۱) \subset P_۲$. گوییم نیم گروه نگاشت‌های $\{T(t)\}_{t \geq \circ}$ روی E مثبت است هرگاه برای هر $t \geq \circ$، $T(t) \geq \circ$.

تعریف ۱۰.۱.۱ فرض کنید $(X, \leq)$ یک مجموعه مرتب شده جزیی باشد و $f : X \longrightarrow X$ یک نگاشت باشد. گوییم f به ترتیب یکنوای غیرکاهشی و یکنوای غیرافزایشی است هرگاه

$$x, y \in X, \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

و

$$x, y \in X, \quad x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y).$$

تعریف ۱۱.۱.۱ عملگر $A : D \times D \longrightarrow E$ را یکنوای ترکیبی گوییم هرگاه برای هر $x, y \in E$، $A(x, y)$ نسبت به x صعودی و نسبت به y نزولی باشد. به عبارت دیگر، اگر $u_1, u_2, v_1, v_2 \in D$ که $u_1 \leq u_2$ و $v_2 \leq v_1$، آنگاه $A(u_1, v_1) \leq A(u_2, v_2)$.

تعریف ۱۲.۱.۱ فرض کنید $D \subset E$. $x^* \in D$ را نقطه ثابت چندتابعی $A : D \times D \longrightarrow 2^E$ گوییم هرگاه $x^* \in A(x^*, x^*)$.

تعریف ۱۳.۱.۱ عملگر $A : D \times D \longrightarrow E$ را در نظر بگیرید.

۱) $(x^*, y^*) \in D \times D$ با ویژگی $x^* \leq y^*$ را نقطه ثابت جفت شده بالا– پایینی A نامند هرگاه

$$x^* \leq A(x^*, y^*), \ A(y^*, x^*) \leq y^*.$$

۲) $(x^*, y^*) \in D \times D$ را نقطه ثابت جفت شده A نامند هرگاه

$$A(x^*, y^*) = x^*, \ A(y^*, x^*) = y^*.$$

۳) $x^* \in D$ را نقطه ثابت A نامند هرگاه $A(x^*, x^*) = x^*$.

تعریف ۱۴.۱.۱ گوییم $A : P_h \times P_h \longrightarrow P_h$

- عملگر یکنوای ترکیبی مدل $t - \alpha(t, u, v)$ است هرگاه برای هر $0 < t < 1$ و هر $u, v \in P_h$، $1 > \alpha = \alpha(t, u, v) > 0$ چنان موجود باشد که $A(tu, \frac{1}{t}v) \geq t^{\alpha(t,u,v)} A(u, v)$،
- عملگر یکنوای ترکیبی مدل $t - \eta(t, u, v)$ است هرگاه برای هر $0 < t < 1$ و هر $u, v \in P_h$، $\eta = \eta(t, u, v) > 0$ چنان موجود باشد که $A(tu, \frac{1}{t}v) \geq t[1 + \eta(t, u, v)] A(u, v)$، که در آن $t[1 + \eta(t, u, v)] < 1$.

تعریف ۱۵.۱.۱ فرض کنید A یک نگاشت مثبت روی مخروط P باشد و $\alpha \in R$. گوییم A $\alpha-$ محدب است هرگاه برای هر $x \in P$ و هر $t \in (0, 1]$ داشته باشیم $A(tx) \leq t^{\alpha} Ax$.
در واقع، A $\alpha-$ محدب است اگر و تنها اگر برای هر $x \in P$ و هر $s \geq 1$ داشته باشیم $A(sx) \geq s^{\alpha} Ax$.
هر عملگر $\alpha-$ محدب، به ازای هر $\beta < \alpha$، یک عملگر $\beta-$ محدب است.

تعریف ۱۶.۱.۱ فرض کنید E فضای باناخ حقیقی و $P \subseteq E$ یک مخروط باشد. عملگر یکنوای ترکیبی $A : P \times P \longrightarrow E$ را $\phi-$ مقعر، $\psi-$ محدب گویند هرگاه توابع $\phi, \psi : (0, 1] \times P \longrightarrow (0, \infty)$ چنان وجود داشته باشند که

۱) برای هر $x, y \in P$ و هر $t \in (0, 1]$ داشته باشیم $t < \phi(t, x)\psi(t, x) < 1$،

۲) برای هر $x, y \in P$ و هر $t \in (0, 1)$ داشته باشیم

$$A(tx, y) \geq \phi(t, x) A(x, y),\ \ A(x, ty) \leq \psi(t, y)^{-1} A(x, y).$$

تعریف ۱۷.۱.۱ مخروط P را منظم نامند هرگاه هر دنباله‌ی صعودی از بالا کراندار (نزولی از پایین کراندار) همگرا باشد. ثابت شده است که هر مخروط منظم نرمال است.

تعریف ۱۸.۱.۱ فرض کنید E فضای باناخ و M زیرمجموعه‌ای از E و نگاشت $d : M \times M \longrightarrow E$ در شرایط زیر صدق کند:

(i) $\forall x, y \in M\ \ 0 \preceq d(x, y) \wedge [d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y]$،

(ii) $\forall x, y \in M\ \ d(x, y) = d(y, x)$،

(iii) $\forall x, y, z \in M\ \ d(x, y) \preceq d(x, z) + d(y, z)$.

دراین صورت d را یک متریک مخروطی روی M و (M, d) را فضای متریک مخروطی گویند.

تعریف ۱۹.۱.۱ اگر (X,d) فضای متریک مخروطی، $x \in X$ و $\{x_n\}$ دنباله ای در X باشد دراین صورت، گوییم

(i) $\{x_n\}$ همگرا به x است اگر برای هر $c \in E$ که $c \gg 0$، عدد طبیعی N چنان موجود باشد که $n \geq N$، $d(x_n, x) \ll c$.

(ii) $\{x_n\}$ دنباله‌ای کوشی است هرگاه برای هر $c \in E$ که $c \gg 0$، عدد طبیعی N چنان موجود باشد که برای هر $m, n \geq N$، $d(x_n, x_m) \ll c$.

تعریف ۲۰.۱.۱ فضای متریک مخروطی (X,d) تام است هرگاه هر دنباله‌ی کوشی در X همگرا باشد.

تعریف ۲۱.۱.۱ اگر (M,d) فضای متریک مخروطی باشد، $A \subset M$ بسته نامیده می‌شود هرگاه برای هر دنباله‌ی $\{x_n\} \subset A$ همگرا به x، داشته باشیم $x \in A$.

تعریف ۲۲.۱.۱ مجموعه $A \subset M$ به‌طور دنباله‌ای فشرده نامیده می‌شود هرگاه برای هر دنباله‌ی $\{x_n\} \subset A$ زیردنباله‌ی $\{x_{n_k}\}$ از $\{x_n\}$ چنان موجود باشد که همگرا به عضوی از A باشد.

تعریف ۲۳.۱.۱ فرض کنید (E,d) یک فضای متریک، $E_0 = C([a,b], E)$ و $F : E_0 \times E_0 \longrightarrow E$ یک نگاشت باشد. α_0 و β_0 را ریشه‌های بالایی و پایینی از F نامند هرگاه برای $c \in [a,b]$ داشته باشیم

$$\alpha_0(c) \leq F(\alpha_0, \beta_0), \quad \beta_0(c) \geq F(\beta_0, \alpha_0).$$

تعریف ۲۴.۱.۱ اگر (M,d) فضای متریک مخروطی باشد، $N(M)$ و $C(M)$ نمایشگر مجموعه‌ی همه زیرمجموعه‌های ناتهی و مجموعه‌ی همه زیرمجموعه‌های بسته ناتهی از M باشد.

فرض کنید $T: M \longrightarrow N(M)$ نگاشت یک چندتابعی و $x_\circ \in M$ دلخواه و ثابت باشد. تعریف می‌کنیم

$$D(T, x_\circ) := \{\{x_n\}_{n\in N\cup\{\circ\}} \subset M : \forall n \in N \ x_n \in Tx_{n-1}\}$$

و هر عضو $D(T, x)$ را یک رویه دینامیکی از T با ابتدای $x_\circ$ نامیم.

اگر T نگاشت تک مقداری باشد، آنگاه رویه دینامیکی به‌طور منحصربه فرد وبه شکل $\{T^n x_\circ\}$ تعریف می‌شود.

تعریف ۲۵.۱.۱ فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیک باشند. چند تابعی $T: X \longrightarrow 2^Y$ را

(۱) نیم پیوسته بالایی نامند هرگاه برای هر زیر مجموعه بسته B از Y، $T^{-1}(B)$ در X بسته باشد.

(۲) نیم پیوسته پایینی نامند هرگاه برای هر زیر مجموعه باز A از Y، $T^{-1}(A)$ در X باز باشد.

(۳) فشرده نامند هرگاه $T(X)$ زیرمجموعه فشرده در Y باشد.

(۴) بسته نامند هرگاه نمودار T که به‌صورت $G_r(T) = \{(x, t) : y \in X\}$ تعریف می‌شود، زیرمجموعه‌ای بسته از $X \times Y$ باشد.

تعریف ۲۶.۱.۱ نگاشت $f: M \longrightarrow R$ را نیم پیوسته پایینی $D(T, x_\circ)-$ دینامیکی در $u \in M$ نامیم هرگاه برای هر رویه دینامیکی $\{x_n\} \in D(T, x_\circ)$ و برای هر زیردنباله‌ی $\{x_{n_i}\}$ از $\{x_n\}$ که همگرا به u باشد، داشته باشیم $f(u) \le \lim_{i\to\infty} f(x_{n_i})$.

فصل ۲

نقاط ثابت عملگرهای یکنوای ترکیبی

۱.۲ نقطه ثابت عملگرهای یکنوای ترکیبی با اختلال

در این بخش، ابتدا قضایا و نتایجی درباره نقطه ثابت عملگرهای یکنوای ترکیبی محدب و مقعر با اختلال بیان و ثابت می‌شود. سپس کاربرد این قضایا ارایه خواهد شد.

دراین راستا، وجود و یکتایی ریشه مثبت معادله عملگر

$$A(x,x)+Bx=x, \qquad (۱)$$

که در آن A یک عملگر محدب و مقعر و B نگاشت آفین است، بررسی می‌شود.

قضیه ۱.۱.۲ فرض کنید P یک مخروط نرمال در فضای باناخ حقیقی E و$A : P\times P \longrightarrow P$ عملگر یکنوای ترکیبی باشد و

(i) برای هر y ثابت، $A(\circ,y) : P \longrightarrow P$ مقعر و برای هر x ثابت، $A(x,\circ) : P \longrightarrow P$ محدب باشد،

(ii) $v>\theta$ و $c>\frac{1}{2}$ چنان موجود باشند که $\theta < A(v,\theta)\leq v$ و $A(\theta,v)\succeq cA(v,\theta)$،

دراین صورت، A دقیقا یک نقطه ثابت مانند $x^*\in[\theta,v]$ دارد. علاوه بر این برای دنباله‌های

$$x_n=A(x_{n-1},y_{n-1}),\ y_n=A(y_{n-1},x_{n-1}),\quad (n\geq 1)$$

با نقطه‌ابتدایی $(x_0, y_0) \in [\theta, v] \times [\theta, v]$ داریم

$$\|x_n - x^*\| \longrightarrow 0, \quad \|y_n - x^*\| \longrightarrow 0.$$

قضیه ۲.۱.۲ فرض کنید P یک مخروط نرمال با ثابت نرمال N در فضای باناخ E و به ازای هر $u, v \in P \bigcap D(B)$ که $u < v$، $A : [u,v] \times [u,v] \longrightarrow E$ عملگر یکنوای ترکیبی و $B : D(B) \longrightarrow E$ روی $[u,v]$ آفین باشد و نیز

(i) برای هر y ثابت، $A(0, y) : [u,v] \longrightarrow E$ مقعر و برای هر x ثابت، $A(x, 0) : [u,v] \longrightarrow E$ محدب باشد،

(ii) عملگر $(I-B)^{-1} : E \longrightarrow D(B)$ موجود و روی $[u - Bu, v - Bv]$ افزایشی است، که در آن I عملگر همانی است.

(iii) $A(u,v) \geq u$ و $A(v,u) \leq v$ و $Bu \geq \theta$ و $Bv \leq \theta$،

(iv) $m_0 \geq 0$ چنان موجود باشد که

$$u_{m_0+1} \succeq \frac{1}{2}(v_{m_0+1} + u_{m_0}), \tag{2}$$

که در آن $u_0 = u$ و $v_0 = v$ و برای هر $n \geq 1$، داریم

$$u_n = (I-B)^{-1}A(x_{n-1}, y_{n-1}), \ v_n = (I-B)^{-1}A(v_{n-1}, u_{n-1}). \tag{3}$$

دراین‌صورت، معادله (۱) ریشه مثبت منحصربه فردی مانند $x^* \in [u,v]$ دارد. علاوه بر این برای دنباله‌های

$$x_n = (I-B)^{-1}A(x_{n-1}, y_{n-1}), \quad y_n = (I-B)^{-1}A(y_{n-1}, x_{n-1}) \tag{4}$$

با نقطه ابتدایی $(x_\circ, y_\circ) \in [u,v] \times [u,v]$ داریم

$$\|x_n - x^*\| \to \circ, \ \|y_n - x^*\| \to \circ$$

و این دنباله ها دارای سرعت همگرایی

$$\|x_{m_\circ + n} - x^*\| \preceq \frac{۲N^۲}{n+۱}\|v-u\| \tag{۵}$$

و

$$\|y_{m_\circ + n} - x^*\| \preceq \frac{۲N^۲}{n+۱}\|v-u\|, \tag{۶}$$

می‌باشند.

برهان. فرض می‌کنیم $C = (I-B)^{-۱}A$. دراین صورت، از(ii) و (iii) داریم

$$C(u,v) = (I-B)^{-۱}A(u,v) \succeq (I-B)^{-۱}u \succeq u \tag{۷}$$

و

$$C(v,u) = (I-B)^{-۱}A(v,u) \preceq (I-B)^{-۱}v \preceq v. \tag{۸}$$

بنابراین $R(C\mid_{[u,v]\times[u,v]}) \subset [u,v]$. که $R(C)$ حوزه‌ی مقادیر عملگر C است. چون B روی $[u,v]$ آفین است، پس $(I-B)^{-۱}$ روی $[u-Bu, v-Bv]$ آفین می‌باشد. همچنین بنابر (ii)، C یک عملگر یکنوای ترکیبی است. برای هر y ثابت، $C(\circ, y) : [u,v] \longrightarrow E$ مقعر و برای هر x ثابت، $C(x,\circ) : [u,v] \longrightarrow E$ محدب است. از (۳) ، (۷) و (۸) روابط زیر حاصل می شود

$$\begin{aligned} u = u_\circ \preceq u_۱ \preceq \ldots \preceq u_{m_\circ} \preceq u_{m_\circ+۱} \preceq \ldots \preceq u_{m_\circ+n} \preceq u_{m_\circ+n+۱} \preceq \ldots \\ \preceq v_{m_\circ+n+۱} \preceq v_{m_\circ+n} \preceq \ldots \preceq v_{m_\circ+۱} \preceq v_{m_\circ} \preceq \ldots \preceq v_۱ \\ \preceq v_\circ = v. \end{aligned} \tag{۹}$$

بنابراین از (۲) و(۷) نتیجه می‌گیریم که

$$\circ \preceq \frac{۱}{۲}(v_{m_\circ+n} - u_{m_\circ}) \preceq \ldots \preceq \frac{۱}{۲}(v_{m_\circ+۱} - u_{m_\circ}) \preceq u_{m_\circ+۱} - u_{m_\circ} \preceq \ldots \preceq u_{m_\circ+n} - u_{m_\circ}.$$

حال قرار دهید

$$t_n = \sup\{t \geq ۰ : u_{m_۰+n} \succeq tv_{m_۰+n} + (۱ - t)u_{m_۰}\}, \quad (n \geq ۱)$$

که بوضوح ازآن، روابط زیر حاصل می‌شود

$$u_{m_۰+n} \succeq t_n v_{m_۰+n} + (۱ - t_n)u_{m_۰} \tag{۱۰}$$

و

$$\frac{۱}{۲} \leq t_۱ \leq t_۲ \leq \ldots \leq t_n \leq t_{n+۱} \leq \ldots \leq ۱.$$

حال ثابت می‌کنیم $t_n \to ۱$. از رابطه (۱۰) داریم

$$\begin{aligned} u_{m_۰+n} &\succeq t_n v_{m_۰+n} + (۱ - t_n)u_{m_۰} \\ &\succeq t_n v_{m_۰+n} + (۱ - t_n)\tfrac{۲u_{m_۰} - t_n v_{m_۰+n}}{۲ - t_n} \\ &= \tfrac{t_n}{۲ - t_n} v_{m_۰+n} + \tfrac{۲(۱ - t_n)}{۲ - t_n} u_{m_۰}. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} u_{m_۰+n+۱} &= C(u_{m_۰+n}, v_{m_۰+n}) \\ &\succeq \tfrac{t_n}{۲ - t_n} C(v_{m_۰+n}, v_{m_۰+n}) + \tfrac{۲(۱ - t_n)}{۲ - t_n} C(u_{m_۰}, v_{m_۰+n}) \\ &\succeq \tfrac{t_n}{۲ - t_n} C(v_{m_۰+n}, v_{m_۰+n}) + \tfrac{۲(۱ - t_n)}{۲ - t_n} C(u_{m_۰}, v_{m_۰+۱}), \end{aligned}$$

یابه عبارت دیگر

$$t_n C(v_{m_۰+n}, v_{m_۰+n}) + ۲(۱ - t_n)C(u_{m_۰}, v_{m_۰+۱}) \preceq (۲ - t_n)u_{m_۰+n+۱}. \tag{۱۱}$$

حال از(۲)، (۱۰) و (۱۱) رابطه زیر حاصل می‌شود

$$\begin{aligned} v_{m_۰+n+۱} &= C(v_{m_۰+n}, u_{m_۰+n}) \\ &\preceq t_n C(v_{m_۰+n}, v_{m_۰+n}) + (۱ - t_n)C(v_{m_۰+n}, u_{m_۰}) \\ &\preceq t_n C(v_{m_۰+n}, v_{m_۰+n}) + (۱ - t_n)v_{m_۰+۱} \\ &\preceq t_n C(v_{m_۰+n}, v_{m_۰+n}) + (۱ - t_n)(۲u_{m_۰+۱} - u_{m_۰}) \\ &= t_n C(v_{m_۰+n}, v_{m_۰+n}) + ۲(۱ - t_n)u_{m_۰+۱} - (۱ - t_n)u_{m_۰} \end{aligned}$$