دانشگاه بیرجند

دانشکده علوم ریاضی و آمار

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

زیرمدول‌های به طور قوی‌اول، $G-$زیرمدول‌ها و مدول‌های جیکوبسن

استاد راهنما

دکتر حسین فضائلی مقیمی

استاد مشاور

دکتر محمد حسین حسینی

نگارنده

مرتضی نوفرستی

شهریور ۱۳۹۳

چکیده

در سرتاسر این پایان‌نامه R یک حلقه جابجایی و یکدار و M یک $R-$مدول یکانی است. ابتدا مفاهیم زیرمدول اول و زیرمدول به طور قوی اول را تعریف می‌کنیم. نشان می‌دهیم زیرمدول‌های به طور قوی اول، بسیاری از ویژگی‌های اساسی ایده‌ال‌های اول را به ارث می‌برند. چند تعمیم از قضیه ایده‌ال اصلی در حلقه‌ها به مدول‌ها را ارائه می‌کنیم. سپس $G-$زیرمدول‌ها را معرفی کرده و ثابت می‌کنیم که هر زیرمدول اول از یک $R-$مدول متناهی مولد اشتراکی از $G-$زیرمدول‌های آن است. در ادامه مفهوم مدول جیکوبسن را تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم هر مدول متناهی مولد روی یک حلقه جیکوبسن، مدولی جیکوبسن است. سرانجام یک رده از زیرمدول‌ها به نام زیرمدول‌های هم بحرانی نیشیتانی را مطالعه می‌کنیم که رفتاری مشابه زیرمدول‌های به طور قوی اول از یک مدول دارند.

واژگان کلیدی: زیرمدول اول، زیرمدول به طور قوی اول، رادیکال به طور قوی اول، $G-$زیرمدول، حلقه هیلبرت، مدول جیکوبسن، مدول هم بحرانی.

تعداد صفحات پایان نامه: ۹۵

تقدیم به پدر بزرگوار، مادر مهربان و همسر عزیزم

سپاس گزاری...

حمد و سپاس خداوند متعال را که زبانم از ثنای او قاصر است، هر چه دارم از اوست و هیچ‌گاه خود را بی‌نیاز از او احساس نکردم و در هر مرحله‌ای از زندگی دست به سوی او دراز کردم روی برنگرداند. امید است بتوانم سپاس‌گزار این همه نعمتهای او باشم و با تکیه بر او قدم بردارم.

به پاس حق شناسی لازم می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد ارجمند جناب آقای دکتر حسین فضائلی مقیمی که در تمام مراحل این پایان‌نامه از راهنمایی‌های ارزنده ایشان بهره برده‌ام، تشکر و قدردانی نمایم. همچنین مراتب قدردانی و سپاس خود را حضور استاد محترم و گرامی جناب آقای دکتر محمد حسین حسینی تقدیم می‌دارم. از اساتید محترم جناب آقای دکتر حسین اقدامی که در طول تحصیل از حضور ایشان بهره‌مند بوده‌ام و سرکار خانم دکتر کاهنی و جناب آقای دکتر محمد مهدی نصرآبادی ریاست محترم دانشکده علوم ریاضی و آمار کمال تشکر را دارم.

از زحمات بی‌دریغ همسرم که در طول تحصیل و انجام این تحقیق، همواره مشوق اینجانب بوده است، تشکر و سپاس‌گزاری می‌نمایم.

مرتضی نوفرستی

شهریور ۱۳۹۳

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

زیرمدول‌های اول نقش اساسی در جبر جابجایی دارند. زیرمدول‌های اول به عنوان تعمیمی از مفهوم ایده‌ال‌های اول به مدول‌ها مطرح شده‌اند. مفهوم زیرمدول اول نخستین بار توسط جان دونز [۱] سال ۱۹۷۸ به طور اصولی در [۱۱]، مورد مطالعه قرار گرفت. پس از آن نویسندگان زیادی مانند لوو [۲] ، مور [۳] ، اسمیت [۴] و مکاسلند [۵] در این زمینه مطالعات جدی انجام دادند و مقالاتی نیز منتشرکردند [۳۴]. زیرمدول سره N از مدول M را یک زیرمدول اول (اولیه) می‌نامند، هرگاه برای $a \in R$ و $m \in M$، $am \in N$ ایجاب کند $m \in N$ یا $a \in (N:M)$ ($a \in \sqrt{(N:M)}$). برای تعمیم مفهوم زیرمدول‌های اول روش‌های مختلفی وجود دارد. می‌توانیم محل قرارگیری am، a یا m را محدود کنیم. سال ۲۰۰۹ در [۳۸]، نقی‌پور مفهوم زیرمدول به طور قوی اول را بیان کرد. زیرمدول سره P از مدول M را به طور قوی اول می‌نامند، هرگاه برای $x, y \in M$، $I_x^P y \subseteq P$، ایجاب کند $x \in P$ یا $y \in P$، که در آن $I_x^P = (P + Rx : M)$. زیرمدول سره C از M را به طور قوی نیم اول گوییم هرگاه برای هر $x \in M$، $I_x^C \subseteq C$، ایجاب کند که $x \in C$. با این تعریف از زیرمدول به طور قوی اول (نیم اول)، مقایسه آن با مفهوم ایده‌ال اول (نیم اول) در یک حلقه طبیعی به نظر می‌رسد. در فصل اول این پایان‌نامه نشان خواهیم داد که هر زیرمدول به طور قوی اول از M اشتراکی از زیرمدول‌های به طور قوی نیم اول است. توجه کنید که این نتیجه برای زیرمدول‌های اول درست نیست [۲۵]. قضیه ایده‌ال اصلی (PIT) یکی از اساسی ترین قضایای نظریه بعد در حلقه‌های نوتری است. این قضیه نشان می‌دهد اگر R یک حلقه نوتری و $a \in R$ غیر یکه و P یک ایده‌ال اول مینیمال مربوط به ایده‌ال اصلی aR از R باشد، آنگاه $htP \leq ۱$. گوییم PIT برای $R-$مدول Mصادق است اگر برای هر زیرمدول اول K از M، که K روی یک زیرمدول دوری از M مینیمال است، آنگاه $htK \leq ۱$. در فصل دوم شرایطی را که PIT برای $R-$مدول M صادق است بررسی خواهیم کرد. سال ۲۰۱۲ دیوید راش [۶] در [۴۲]، $G-$زیرمدول‌ها و مدول‌های جیکوبسن را معرفی کرد. زیرمدول N از $R-$مدول متناهی مولد M را یک $G-$زیرمدول گوییم هرگاه $p = (N:M)$ یک $G-$ایده‌ال از R و N، $p-$ماکسیمال باشد. در فصل سوم نشان می‌دهیم هر زیرمدول متناهی مولد M اشتراکی از $G-$زیرمدول‌های M می‌باشد. $R-$مدول متناهی مولد M

---

[۱] Dauns
[۲] Lu
[۳] Moore
[۴] Smith
[۵] McCasland
[۶] Rush

مدول جیکوبسن نامیده می‌شود، هرگاه هر $G-$زیرمدول آن یک زیرمدول ماکسیمال آن باشد. ثابت می‌کنیم که هر مدول متناهی مولد روی حلقه جیکوبسن خود جیکوبسن است. در پایان زیرمدول‌های به طور قوی اول با زیرمدول‌های هم بحرانی که به وسیله نیشیتانی [۷] در [۴۰]، تعریف شده‌اند، مقایسه می‌شوند. لازم به ذکر است که مراجع اصلی این پایان‌نامه [۳۸] و [۴۲] هستند.

[۷] Nishitani

فصل ۱

زیرمدول‌های اول و به طور قوی اول

.

در این فصل ابتدا در بخش اول مفاهیم زیرمدول اول (نیم اول) و رادیکال زیرمدول را بیان می‌کنیم، سپس خصوصیات طیف یک مدول را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در بخش دوم تعمیم‌هایی از این مفاهیم تحت عنوان زیرمدول‌های به طور قوی اول (نیم اول) و رادیکال به طور قوی اول را بیان کرده و ارتباط بین این مفاهیم را بررسی می‌کنیم. در واقع این مفاهیم پیش نیاز مطالب بیان شده در فصل‌های بعد خواهند بود.

۱.۱ زیرمدول‌های اول، نیم اول و رادیکال زیرمدول‌ها

فرض کنید N زیرمدولی از $R-$مدول M باشد. در این صورت قرار می‌دهیم

$$(N:M)=\{r\in R: rM\subseteq N\}$$

که به وضوح ایده‌الی از R است. در واقع $(N:M)$ پوچ ساز $R-$مدول $\dfrac{M}{N}$ می‌باشد. یعنی $(N:M)=Ann_R(\dfrac{M}{N})$.

تعریف ۱.۱.۱. زیرمدول سره N از $R-$مدول M را اول (اولیه) می‌نامند، هرگاه به ازای هر $r\in R$ و $x\in M$، $rx\in N$ ایجاب کند که $x\in N$ یا $r\in(N:M)$ ($r\in\sqrt{(N:M)}$). توجه کنید که اگر N زیرمدول اول (اولیه) M باشد، آنگاه به آسانی دیده می‌شود که $p=(N:M)$ ایده‌ال اول (اولیه) از R است. در این صورت گوییم N یک زیرمدول $p-$اول (اولیه) از M است.

به وضوح هر ایده‌ال اول از حلقه R زیرمدول اول R−مدول R است و هر زیرمدول اول، اولیه است.

مثال ۲.۱.۱. $\mathbb{Z}$−مدول $M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ را در نظر بگیرید. زیرمدول $N = ۳\mathbb{Z} \oplus ۲\mathbb{Z}$ از M یک زیرمدول اول نیست. زیرا $N \ni (۵, ۲)$.۳ در حالی که $(N : M) = ۶\mathbb{Z}$ ∌ ۳ و $(۵, ۲) \notin ۳\mathbb{Z} \oplus ۲\mathbb{Z}$.

مثال ۳.۱.۱. حلقه $\mathbb{Z}$ را به عنوان یک $\mathbb{Z}$−مدول در نظر بگیرید. هر ایده‌ال اول از حلقه $\mathbb{Z}$ یک $\mathbb{Z}$−زیرمدول اول نیز می‌باشد. برعکس هر زیرمدول اول $\mathbb{Z}$ یک ایده‌ال اول است. البته یکدار بودن حلقه الزامی است. زیرا $۴\mathbb{Z}$ یک $۲\mathbb{Z}$−زیرمدول اول از $۲\mathbb{Z}$ است اما یک ایده‌ال اول از $۲\mathbb{Z}$ نیست.

تعریف ۴.۱.۱. R−مدول $M \neq ۰$ اول نامیده می‌شود، هرگاه صفر زیرمدول اول آن باشد. به عبارت دیگر به ازای هر $x \in M$ و $r \in R$، رابطه $rx = ۰$ ایجاب کند $x = ۰$ یا $rM = ۰$ $(r \in Ann(M))$.

تعریف ۵.۱.۱. عنصر $r \neq ۰$ از حلقه R را منظم گوییم هرگاه r مقسوم علیه صفر نباشد. واضح است که اگر R دامنه صحیح باشد هر عنصر غیر صفر آن منظم است. عنصر m از R−مدول M عنصر تابدار مدول M نامیده می‌شود، هرگاه عنصر منظم r از حلقه R وجود داشته باشد که $rm = ۰$. R−مدول M، مدول تابی یا تابدار نامیده می‌شود، اگر تمام عناصر آن تابدار باشند و بدون تاب یا فارغ از تاب نامیده می‌شود هرگاه صفر تنها عنصر تابدار آن باشد.

تبصره ۶.۱.۱. *زیرمدول تابدار $T(M)$ از مدول M روی یک دامنه صحیح، زیرمدول اول است اگر $T(M) \neq M$، که در آن $T(M) = \{m \in M \mid \exists\, ۰ \neq r \in R\ ;\ rm = ۰\}$.*
لذا اگر $T(M) = M$ مدول M تابدار و اگر $T(M) = ۰$ مدول M بدون تاب می‌باشد.

گزاره ۷.۱.۱. *هر جمعوند مستقیم سره از یک مدول بدون تاب، اول است.*

اثبات. فرض کنید P جمعوند مستقیم سره از R−مدول بدون تاب M باشد. در این صورت زیرمدول N از M وجود دارد به طوری که $M = P \oplus N$. حال اگر برای $r \in R$ و $x \in M$، $rx \in P$، آنگاه $rx \notin N$. چون در غیر این صورت $rx \in P \cap N = (۰)$. حال چون M بدون تاب است، $x = ۰$ و این تناقض است. پس $x \notin N$ و در نتیجه $x \in P$. یعنی P اول است. $\square$

لم ۸.۱.۱. *فرض کنید M یک R−مدول باشد. در این صورت زیرمدول N از M اول است اگر و تنها اگر $p = (N : M)$ ایده‌ال اولی از R بوده و $\frac{R}{p}$−مدول $\frac{M}{N}$، بدون تاب باشد.*

اثبات. $\Leftarrow$) فرض کنید N زیرمدول اولی از $R-$مدول M باشد. در این صورت با توجه به این که $N \neq M$، عنصر $b \in M \setminus N$ وجود دارد. در نتیجه $1_R M \nsubseteq N$ پس $1_R \notin (N:M)$ بنابراین $(N:M) \neq R$. حال اگر r, s به گونه‌ای باشند که $rs \in (N:M)$ و $s \notin (N:M)$. پس $x \in M$ وجود دارد که $sx \notin N$. از طرفی $r(sx) = (rs)x \in N$. با توجه به اول بودن N، نتیجه می‌گیریم که $r \in (N:M) = p$ پس $p = (N:M)$ ایده‌الی اول است.

با توجه به این که $p = Ann(\frac{M}{N})$، $\frac{M}{N}$ یک $\frac{R}{p}-$مدول است. فرض کنید $(m+N) \in T(\frac{M}{N})$. بنابراین عنصر ناصفر $(r+p) \in \frac{R}{p}$ وجود دارد به طوری که $(r+p)(m+N) = N$. لذا $rm + N = N$ و در نتیجه $rm \in N$ اما $r \notin p = (N:M)$. حال چون N یک زیرمدول اول است پس $m \in N$. بنابراین $T(\frac{M}{N}) = 0$ و در نتیجه $\frac{R}{p}-$مدول $\frac{M}{N}$، یک مدول بدون تاب است.

$\Rightarrow$) فرض کنید $p = (N:M)$ یک ایده‌ال اول و $\frac{R}{p}-$مدول $\frac{M}{N}$ بدون تاب باشد. در این صورت $(N:M) \neq R$ پس $M \neq N$. حال فرض کنید $r \in R$ و $x \in M$ به گونه‌ای باشند که $rx \in N$ ولی $r \notin (N:M)$. بنابراین $0 \neq (r+p) \in \frac{R}{p}$ و

$$\begin{aligned} rx + N = N &\Rightarrow (r+p)(x+N) = N \\ &\Rightarrow (x+N) \in T(\frac{M}{N}) = 0 \\ &\Rightarrow (x+N) = N \\ &\Rightarrow x \in N. \end{aligned}$$

از این رو N یک زیرمدول اول از $R-$مدول M می‌باشد. $\square$

گزاره ۹.۱.۱. *فرض کنید M یک $R-$مدول باشد. در این صورت*

۱) اگر N زیرمدول ماکسیمالی از M باشد، آنگاه N یک زیرمدول اول از M است و $p = (N:M)$ ایده‌ال ماکسیمالی از R است؛

۲) اگر $p = (N:M)$ ایده‌ال ماکسیمالی از R باشد، آنگاه N یک زیرمدول اول از M است. به خصوص برای هر ایده‌ال ماکسیمال I، که $IM \neq M$، IM زیرمدول اولی از M می‌باشد.

اثبات. ۱) فرض کنید $ra \in N$ و $a \in M \setminus N$ و $r \in R$. در این صورت چون N زیرمدول ماکسیمال M است، پس $M = N + Ra$. بنابراین $rM = rN + Rra \subseteq N$ لذا $r \in (N:M)$. در نتیجه N اول است. برای اثبات ماکسیمال بودن p، به برهان خلف فرض کنید I ایده‌الی از R باشد که $p \subset I \subsetneq R$. در این صورت $r \in I \setminus p$ وجود دارد. در نتیجه $rM \nsubseteq N$ و لذا $m \in M$

وجود دارد که $rm \notin N$. از آنجا که N زیرمدول ماکسیمال است، پس $M = N + Rrm$. بنابراین $rM = rN + Rr^{۲}m \subseteq N$ که تناقض است. پس p ماکسیمال است.
۲) چون p ایده‌ال ماکسیمال R است پس اول می‌باشد. حال نشان می‌دهیم که $\frac{R}{p}$–مدول $\frac{M}{N}$، بدون تاب است. به عبارت دیگر $T(\frac{M}{N}) = ۰$. فرض کنید $m + N \in \frac{M}{N}$ و عنصر $۰ \neq r + p \in \frac{R}{p}$ وجود دارد، به طوری که $(r+p)(m+N) = N$. بنابراین $rm \in N$ و $r \notin p$. حال چون $p \subsetneq p + rR \subseteq R$ و p ماکسیمال می‌باشد، پس $p + rR = R$. لذا $s \in R$ و $y \in p$ وجود دارد که $۱ = y + sr$ پس $m = ym + srm$. اکنون چون $rm \in N$ و $yM \subseteq N$ نتیجه می‌شود که $m \in N$. یعنی $T(\frac{M}{N}) = ۰$ پس بنا به لم ۸.۱.۱، N زیرمدول اول از R–مدول M است. حال فرض کنید I ایده‌ال ماکسیمالی از R باشد به طوری که $IM \neq M$. در این صورت $I \subseteq (IM : M) \neq R$ و در نتیجه $(IM : M) = I$. بنابراین IM زیرمدول اول M است. $\square$

مثال ۱۰.۱.۱. فرض کنید p عددی اول باشد. در این صورت تنها زیرمدول اول $\mathbb{Z}$–مدول $\mathbb{Z}_p$، زیرمدول (۰) است.
زیرا به وضوح $(p) = (۰ : \mathbb{Z}_p)$ ماکسیمال است. پس بنا به قسمت دوم گزاره ۹.۱.۱، (۰) زیرمدول اول $\mathbb{Z}_p$ می‌باشد. در حالت کلی اگر N زیرمدول اول دلخواهی از $\mathbb{Z}_p$ باشد، آنگاه بنا به لم ۸.۱.۱، $(N : \mathbb{Z}_p)$ باید اول باشد. اما $۰ \neq (N : \mathbb{Z}_p)$ زیرا $p \in (N : \mathbb{Z}_p)$. از طرفی به ازای هر $p \neq q$، $(N : \mathbb{Z}_p) \neq (q)$ زیرا در غیر این صورت $\mathbb{Z}_p = q\mathbb{Z}_p \subset N$ و این در تناقض با اول بودن N است. پس از آنجا که $(N : \mathbb{Z}_p)$ اول است باید $(N : \mathbb{Z}_p) = (p)$. حال به برهان خلف فرض کنید $\mathbb{Z}_p \neq N \neq (۰)$. پس $۰ \neq \overline{x} \in N$ و $\overline{y} \in \mathbb{Z}_p \setminus N$ و $x, y \in \mathbb{Z}$ وجود دارند به طوری که

$$(x + (p))(\overline{y} + N) = (y + (p))(\overline{x} + N) = \overline{xy} + N = N.$$

در نتیجه $T(\frac{\mathbb{Z}_p}{N}) \neq ۰$ و این در تناقض با اول بودن N می‌باشد. بنابراین $N = (۰)$.

مثال ۱۱.۱.۱. فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F باشد. اگر W زیرفضایی سره از V باشد، آنگاه $(W : V) = ۰$ و در نتیجه بنا به گزاره ۹.۱.۱ ملاحظه می‌شود که همه زیرفضاهای سره W از V، اول می‌باشند.

تعریف ۱۲.۱.۱. R–مدول M به طور کامل اول نامیده می‌شود، هرگاه هر زیرمدول سره آن اول باشد و تقریباً به طور کامل اول نامیده می‌شود هرگاه هر زیرمدول سره غیر صفر آن اول باشد.
به وضوح هر زیرمدول به طور کامل اول، تقریباً به طور کامل اول است.

مثال ۱۳.۱.۱. بنا به مثال ۱۱.۱.۱ هر فضای برداری، به طور کامل اول است. همچنین $\mathbb{Z}_4$ به عنوان $\mathbb{Z}_4$–مدول تقریباً به طور کامل اول است ولی به طور کامل اول نیست.

تعریف ۱۴.۱.۱. زیرمدول N از R–مدول M را خالص گوییم هرگاه برای هر $r \in R$،

$$(rM) \cap N = rN.$$

لم ۱۵.۱.۱. *زیرمدول سره N از مدول بدون تاب M، خالص است اگر و تنها اگر اول باشد و $(N : M) = 0$.*

اثبات. $\Leftarrow$) فرض کنید N زیرمدول سره خالص از R–مدول بدون تاب M باشد و $r \in (N : M)$. در این صورت $rM \subseteq N$. در نتیجه $(rM) \cap N = rM$ از طرفی طبق فرض $(rM) \cap N = rN$. بنابراین $rM = rN$ و چون N زیرمدول سره M و M بدون تاب است نتیجه می‌شود $r = 0$. حال فرض کنید به ازای $r \in R$ $0 \neq r$ و $x \in M$، $rx \in N$. در این صورت $r \notin (N : M) = 0$. چون $x \in M$ پس $rx \in rM$ و لذا

$$rx \in (rM) \cap N = rN \Rightarrow x \in N.$$

که این نتیجه می‌دهد N اول است.
$\Rightarrow$) فرض کنید $(N : M) = 0$ و N زیرمدول اولی از R–مدول بدون تاب M باشد. اگر $y \in rN$، آنگاه $x \in N$ وجود دارد که $y = rx$. لذا $x \in M$ و $y = rx \in rM$. از طرفی $y \in N$، در نتیجه $y \in (rM) \cap N$ و لذا $rN \subseteq (rM) \cap N$. حال فرض کنید $y \in (rM) \cap N$. در این صورت $y \in N$ و $y \in rM$. پس $x \in M$ وجود دارد که $y = rx$. لذا $rx \in N$. چون N زیرمدول اول و $r \notin (N : M) = 0$ پس $x \in N$. در نتیجه $y = rx \in rN$. بنابراین $(rM) \cap N \subseteq rN$ و حکم ثابت است. $\square$

مثال ۱۶.۱.۱. بنا به مثال ۱۱.۱.۱، هر زیرفضای سره W از فضای برداری V روی میدان F، به عنوان زیرمدول، خالص است. همچنین هر جمعوند مستقیم سره R–مدول M زیرمدول خالص M است.

گزاره ۱۷.۱.۱. *(۰) زیرمدول اول R–مدول M است اگر و تنها اگر $Ann_R(M) = Z_R(M)$ که در آن $Z_R(M) = \{r \in R \mid \exists\ 0 \neq m \in M\ ;\ rm = 0\}$.*

اثبات. $\Leftarrow$) با توجه به تعریف به وضوح $Ann_R(M) \subseteq Z_R(M)$. حال فرض کنید $r \in Z_R(M)$. بنابراین $M \ni m \neq \circ$ وجود دارد به طوری که $rm = \circ$ یعنی $rm \in (\circ)$ از طرفی چون $(\circ)$ زیرمدول اول M است و $m \notin (\circ)$ پس $r \in (\circ : M)$. در نتیجه $rM \subseteq \circ$. لذا

$$rM = \circ \Rightarrow r \in Ann_R(M) \Rightarrow Z_R(M) \subseteq Ann_R(M).$$

$\Rightarrow$) فرض کنید به ازای $M \ni x \neq \circ$ و $r \in R$ داشته باشیم $rx \in (\circ)$. یعنی $r \in Z_R(M)$. پس طبق فرض $r \in Ann_R(M) = Z_R(M)$. در نتیجه به ازای هر $m \in M$

$$rm = \circ \Rightarrow rM = \circ \Rightarrow rM \subseteq \circ \Rightarrow r \in (\circ : M).$$

بنابراین $(\circ)$ زیرمدول اول M است. $\square$

گزاره ۱۸.۱.۱. ۱) *فرض کنید N زیرمدولی اولیه از $R-$مدول M باشد. در این صورت N اول است اگر و تنها اگر $(N : M)$ ایده‌ال اولی از R باشد.*
۲) *اگر N زیرمدولی $p-$اولیه از M باشد که شامل یک زیرمدول $p-$اول است، آنگاه N زیرمدولی $p-$اول است.*

اثبات. ۱) $\Leftarrow$ بنا به لم ۸.۱.۱، واضح است که اگر زیرمدول N از $R-$مدول M اول باشد، آنگاه $(N : M)$ ایده‌ال اولی از R است.
$\Rightarrow$) حال فرض کنید N زیرمدولی اولیه از $R-$مدول M و $(N : M)$ ایده‌ال اولی از R باشد. در این صورت به ازای هر $r \in R$ و $x \in M$، $rx \in N$ ایجاب می‌کند که $x \in N$ یا $r \in \sqrt{(N : M)}$.
چون $(N : M)$ ایده‌ال اولی از R است، بنابراین $\sqrt{(N : M)} = (N : M)$. پس $x \in N$ یا $r \in (N : M)$ و در نتیجه N اول است.
۲) فرض کنید $P \subseteq N$ و P زیرمدول $p-$اولی از M باشد. در این صورت اگر $rx \in N$ اما $r \notin (N : M)$ و $x \notin N$، آنگاه $x \notin P$. از آنجا که N زیرمدولی $p-$اولیه است، لذا $r \in \sqrt{(N : M)} = \sqrt{p} = p$. در نتیجه N، $p-$اول است. $\square$

تعریف ۱۹.۱.۱. حلقه R را فون نویمان منظم می‌نامند، هرگاه برای هر $r \in R$، $x \in R$ وجود داشته باشد، به طوری که $r = r^۲x$.
به عنوان مثال هر میدان مانند F یک حلقه فون نویمان منظم است. زیرا به ازای هر $r \in F$ قرار می‌دهیم $x = r^{-۱}$.

گزاره ۲۰.۱.۱. *هر ایده‌ال اولیه از یک حلقه فون نویمان منظم، ماکسیمال و لذا اول است.*

اثبات. به برهان خلف فرض کنید I ایده‌ال اولیه R باشد که ماکسیمال نیست. در این صورت ایده‌ال ماکسیمال p از R چنان وجود دارد که $I \subset p \subsetneq R$. $r \in p \setminus I$ را در نظر بگیرید. چون حلقه R فون نویمان منظم است، لذا $x \in R$ وجود دارد که $r = r^2x \notin I$. از آنجا که I ایده‌ال اولیه است، پس $x \notin I$ و این با ماکسیمال بودن p در تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل و I ایده‌ال ماکسیمال است. □

نتیجه ۲۱.۱.۱. *اگر M یک مدول روی حلقه فون نویمان منظم R باشد، آنگاه هر زیرمدول اولیه از M، اول است.*

اثبات. فرض کنید N زیرمدول اولیه‌ای از M باشد. بنابراین $(N : M)$ ایده‌ال اولیه‌ای از R می‌باشد. چون R حلقه فون نویمان منظم است، $(N : M)$ ایده‌ال اولی از R بوده و بنا به گزاره ۱۸.۱.۱، N زیرمدول اولی از M می‌باشد. □

تبصره ۲۲.۱.۱. *اگر P زیرمدول اولی از $R-$مدول M باشد، آنگاه $(P : M)$ ایده‌ال اولی از R است. اما درحالت کلی، عکس این مطلب درست نیست. به عنوان مثال، $(\mathbb{Z} : \mathbb{Q}) = 0$ ایده‌ال اولی از $\mathbb{Z}$ است ولی $\mathbb{Z}$ زیرمدول اولی از $\mathbb{Z}-$مدول $\mathbb{Q}$ نمی‌باشد. زیرا به ازای هر $0 \neq b \in \mathbb{Z}$ و $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$، $b\frac{a}{b} = a \in \mathbb{Z}$. در حالی‌که $b \notin (\mathbb{Z} : \mathbb{Q}) = 0$.*

حال قضیه‌ای را بیان می‌کنیم که بیانگر شرایط معادل برای اول بودن یک زیرمدول است.

قضیه ۲۳.۱.۱. *فرض کنید N زیرمدول سره‌ای از $R-$مدول M باشد به طوری که $(N : M) = p$. در این صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:*

۱) *N زیرمدول اول M است؛*

۲) *$\frac{R}{p}-$مدول $\frac{M}{N}$، بدون تاب است؛*

۳) *برای هر $r \in R \setminus p$، $N = \{m \in M \mid rm \in N\}$؛*

۴) *برای هر ایده‌ال J از R به طوری که $J \nsubseteq p$، $N = \{m \in M \mid Jm \subseteq N\}$؛*

۵) *برای هر $m \in M \setminus N$، $p = (N : Rm)$؛*

۶) *برای هر زیرمدول L از M به طوری که $N \subset L$، $p = (N : L)$؛*

۷) *برای هر $m \in M \setminus N$، $Ann_R(m + N) = p$؛*

۸) *$Z_R(\frac{M}{N}) = p$.*

اثبات. ۱ $\Leftarrow$ ۲ $\Leftarrow$ ۳) به سادگی نتیجه می‌شوند.

۳ $\Leftarrow$ ۴) فرض کنید J ایده‌الی از R باشد به قسمی که $J \nsubseteq p$. بنابراین $r \in J$ وجود دارد به قسمی

که $r \notin p$ و لذا بنا به (۳)، $N = \{m \in M \mid rm \in N\}$. حال اگر برای $m \in M$، $Jm \subseteq N$، آنگاه $rm \in N$ و در نتیجه $m \in N$.

۴ $\Leftarrow$ ۵) فرض کنید $m \in M \setminus N$. اگر $rm \in N$ و $r \notin p$، آنگاه $J = rR \nsubseteq p$ و لذا $N = \{m \in M \mid Jm \subseteq N\}$. چون $rm \in N$، پس $m \in N$ که تناقض است. بنابراین $r \in p$ و در نتیجه $p = (N : Rm)$.

۵ $\Leftarrow$ ۶) فرض کنید L زیرمدولی از M باشد به قسمی که $N \subset L$. در این صورت $m \in L \setminus N$ وجود دارد و بنا به قسمت (۵)، $p = (N : Rm)$. حال با توجه به این‌که $m \in L$ و $(N : M) = p$، نتیجه می‌شود که $(N : L) = p$.

۶ $\Leftarrow$ ۷) فرض کنید $m \in M \setminus N$. لذا $N \subsetneqq L = N + Rm \subseteq M$ و بنا به قسمت (۶)، $(N : Rm) = p$. به وضوح

$$p = Ann_R(\frac{M}{N}) \subseteq Ann_R(m + N) = (N : Rm) = p$$

و در نتیجه $p = Ann_R(m + N)$.

۷ $\Leftarrow$ ۸) فرض کنید $m \in M \setminus N$. بنا به (۷)، $p = Ann_R(m + N)$ و به وضوح $p \subseteq Z_R(\frac{M}{N})$. حال اگر $r \in Z_R(\frac{M}{N})$، آنگاه $m \in M \setminus N$ وجود دارد به طوری که $r \in Ann_R(m + N)$. اما بنا به (۷)، $p = Ann_R(m + N)$ و لذا $r \in p$. در نتیجه $Z_R(\frac{M}{N}) \subseteq p$ و حکم نتیجه می‌شود.

۸ $\Leftarrow$ ۱) از گزاره ۱۷.۱.۱، نتیجه می‌شود. $\square$

تعریف ۲۴.۱.۱. برای هر $R-$مدول M، مجموعه تمام زیرمدول‌های اول M را طیف M می‌نامند و با $Spec(M)$ نشان می‌دهند. همچنین مجموعه تمام زیرمدول‌های $p-$اول M را $p-$طیف M می‌نامند و با $Spec_p(M)$ نشان می‌دهند.

توجه کنید که بعضی مدول‌ها هیچ زیرمدول اولی ندارند. یعنی $Spec(M) = \emptyset$. در این صورت گوییم $R-$مدول M، فاقد اول می‌باشد. به عنوان مثال، مدول صفر یک مثال بدیهی از مدول بدون اول است. اما مثال‌های غیر بدیهی زیادی نیز وجود دارند.

مثال ۲۵.۱.۱. فرض کنید p عددی اول باشد. گروه جمعی

$$\mathbb{Z}_{p^\infty} = \{\frac{a}{p^n} + \mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

را به عنوان $\mathbb{Z}-$مدول در نظر بگیرید. در این صورت $Spec(\mathbb{Z}_{p^\infty}) = \emptyset$.

زیرا اگر N زیرمدول اولی از $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ باشد، آنگاه می‌دانیم N توسط $\frac{1}{p^k} + \mathbb{Z}$ تولید می‌شود که k عدد

صحیح و مثبتی است. چون $p(\frac{1}{p^{k+1}} + \mathbb{Z}) \in N$ لذا $\frac{1}{p^{k+1}} + \mathbb{Z} \in N$ یا $p\mathbb{Z}_{p^\infty} \subseteq N$. اگر $\frac{1}{p^{k+1}} + \mathbb{Z} \in N$، آنگاه $t \in \mathbb{Z}$ وجود دارد که $1 - tp \mid p^{k+1}$. در نتیجه $p \mid 1$، که تناقض است. حال اگر $p\mathbb{Z}_{p^\infty} \subseteq N$، آنگاه

$$\frac{1}{p^{k+1}} + \mathbb{Z} = p(\frac{1}{p^{k+2}} + \mathbb{Z}) \in N$$

و مشابه حالت قبل بایستی $p \mid 1$، که تناقض است. در نتیجه $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ فاقد زیرمدول اول است.

لم ۲۶.۱.۱. *فرض کنید M، R–مدولی غیر صفر و متناهی مولد باشد. در این صورت M زیرمدول ماکسیمالی مانند L دارد.*

اثبات. فرض کنید $\Sigma = \{N : N \lneqq M\}$ مجموعه تمام زیرمدول‌های سره M باشد. چون $0 \in \Sigma$، نتیجه می‌گیریم که Σ ناتهی است. Σ را با رابطه ترتیب جزئی $\subseteq$ در نظر می‌گیریم. فرض کنید $\Lambda = \{N_i\}_{i \in I}$ زنجیر ناتهی دلخواهی از Σ باشد. در این صورت قرار می‌دهیم $N = \bigcup_{i \in I} N_i$. به راحتی نشان داده می‌شود که N زیرمدول سره‌ای از M است. پس $N \in \Sigma$ و N کران بالایی برای Λ است. بنابراین بنا به لم زرن Σ عضو ماکسیمالی مانند L دارد و حکم اثبات شده است. □

گزاره ۲۷.۱.۱. *فرض کنید M مدولی ناصفر روی حلقه R باشد. در این صورت اگر M متناهی مولد باشد، آنگاه $Spec(M) \neq \emptyset$.*

اثبات. چون M متناهی مولد است، بنا به لم قبل زیرمدول ماکسیمالی مانند N دارد. اما بنا به قسمت (۱) گزاره ۹.۱.۱، N اول بوده و لذا $Spec(M) \neq \emptyset$. □

تعریف ۲۸.۱.۱. فرض کنید R یک دامنه صحیح باشد. در این صورت R–مدول D را بخش پذیر می‌نامند، هرگاه به ازای هر $0 \neq r \in R$، $D = rD$.

به عنوان مثال $\mathbb{Z}$–مدول $\mathbb{Q}$ بخش پذیر است. زیرا برای هر $0 \neq n \in \mathbb{Z}$، $\frac{p}{q} = n(\frac{p}{nq})$.

لم ۲۹.۱.۱. *فرض کنید R یک دامنه صحیح باشد. در این صورت*

۱) *هر R–مدول تابی بخش پذیر، بدون زیرمدول اول است؛*

۲) *هر R–مدول بدون اول، تابی است.*

اثبات. ۱) فرض کنید D، R–مدول تابی بخشپذیر باشد و بدون اول نباشد. در این صورت اگر N یک زیرمدول اول از D باشد و $q = (N : D)$، آنگاه چون D بخش پذیر است، نتیجه می‌شود

که $q = \circ$ و $\dfrac{D}{N}$ بنا به لم ۸.۱.۱، بدون تاب است. بنابراین $D = N$ و این تناقض است. لذا D بدون اول می‌باشد.

۲) فرض کنید M مدول بدون اول و T زیرمدول تابی آن باشد. اگر $T \neq M$ آنگاه بنا به تبصره ۶.۱.۱، T زیرمدول اولی از M می‌باشد که این تناقض است. لذا $T = M$ و M تابی است. $\square$

تعریف ۳۰.۱.۱. برای هر زیرمدول N از $R-$مدول M، مجموعه تمام زیرمدول‌های اول M که شامل N هستند را چند گونای N می‌نامند و با $V(N)$ نشان می‌دهند.

بنابراین $V(M) = \emptyset$ و $V(\circ) = Spec(M)$.

گزاره بعد ارتباط بین $Spec(M)$ و $Spec(M_S)$ را بیان می‌کند.

گزاره ۳۱.۱.۱. *فرض کنید S یک زیرمجموعه بسته ضربی از R باشد و $p \in Spec(R)$ به گونه‌ای باشد که $p \cap S = \emptyset$ و M یک $R-$ مدول باشد. در این صورت یک تناظر یک به یک بین زیرمدول‌های $p-$اول M و زیرمدول‌های p_S-اول M_S وجود دارد.*

اثبات. فرض کنید

$$A = \{P \mid \text{است } M \text{ اول از} - p \text{ زیرمدول } P\}$$

و

$$B = \{W \mid \text{است } M_S \text{ اول از} - p_S \text{ زیرمدول } W\}.$$

حال نگاشت‌های $\varphi : A \to B$ و $\psi : B \to A$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\varphi(P) = P_S \quad \text{و} \quad \psi(W) = f^{-1}(W)$$

که در آن $f : M \to M_S$ نگاشت طبیعی با ضابطه $f(m) = \dfrac{m}{1}$ است.

ابتدا نشان می‌دهیم نگاشت φ خوش تعریف است. فرض کنید P زیرمدول $p-$اولی از M باشد. نشان می‌دهیم P_S زیرمدول p_S-اولی از M_S است. اگر $P_S = M_S$، آنگاه

$$\begin{aligned}
\exists\, m \in M \setminus P \;\; ; \;\; \frac{m}{1} \in P_S \;\; &\Rightarrow \;\; \exists\; t, s \in S \;\; ; \;\; tsm \in P \\
&\Rightarrow \;\; ts \in (P : M) = p \\
&\Rightarrow \;\; t \in p \;\; \text{یا} \;\; s \in p
\end{aligned}$$

که تناقض است. زیرا $p \cap S = \emptyset$. بنابراین $P_S \neq M_S$. حال فرض کنید برای $\frac{r}{s} \in R_S$ و $\frac{m}{t} \in M_S$ داشته باشیم

$$\begin{aligned} \frac{r}{s}\frac{m}{t} \in P_S \quad &\Rightarrow \quad \exists \ t' \in S \ ; \ t'rm \in P \\ &\Rightarrow \quad m \in P \ \text{یا} \ r \in (P : M) \\ &\Rightarrow \quad \frac{m}{t} \in P_S \ \text{یا} \ \frac{r}{s} \in (P_S : M_S) \end{aligned}$$

در نتیجه P_S زیرمدول اولی از M_S می‌باشد. در ادامه نشان می‌دهیم $(P_S : M_S) = p_S$. با توجه به این که $(P : M) = p$، لذا $p_S \subseteq (P_S : M_S)$. حال فرض کنید $\frac{r}{s} \in (P_S : M_S)$. چون $P \neq M$، لذا $m \in M \setminus P$ وجود دارد به طوری که، $\frac{r}{s}\frac{m}{1} \in p_S$. در نتیجه

$$\begin{aligned} \exists \, t \in S \ ; \ trm \in P \quad &\Rightarrow \quad tr \in (P : M) = p \\ &\Rightarrow \quad r \in p \end{aligned}$$

و لذا $(P_S : M_S) \subseteq p_S$. بنابراین نگاشت φ خوش تعریف است. به طور مشابه ψ نیز خوش تعریف می‌باشد. اما به سادگی می‌توان نشان داد که $\varphi \circ \psi = I_B$ و $\psi \circ \varphi = I_A$ و لذا حکم ثابت است. □

نتیجه ۳۲.۱.۱. *اگر P زیرمدول اولی از M باشد، آنگاه* $(P : M)_S = (P_S : M_S)$.

اثبات. در ضمن اثبات گزاره قبل بیان شده است. □

تعریف ۳۳.۱.۱. زیرمدول سره N از R مدول M نیم اول است، هرگاه به ازای هر $r \in R$ و $m \in M$، $r^2 m \in N$ ایجاب کند که $rm \in N$.

لم ۳۴.۱.۱. *هر اشتراکی از زیرمدول‌های اول یک زیرمدول، نیم اول است. اما عکس آن درست نیست یعنی هر زیرمدول نیم اول لزوماً اشتراکی از زیرمدول‌های اول نمی‌باشد.*

اثبات. حکم را برای $K \cap N$ که K و N زیرمدول‌های اول می‌باشند، ثابت می‌کنیم و به هر اشتراک دلخواه از زیرمدول‌های اول تعمیم می‌دهیم. فرض کنید $r \in R$ و $x \in M$ دلخواه باشند و

$r^2x \in K \cap N$. در این صورت

$$\begin{aligned} r^2x \in K \text{ و } r^2x \in N &\Rightarrow (rx \in K \text{ یا } r \in (K:M)) \text{ و } (rx \in N \text{ یا } r \in (N:M)) \\ &\Rightarrow rx \in K \cap N \text{ یا } r \in (K:M) \cap (N:M) \\ &\Rightarrow rx \in K \cap N \text{ یا } r \in (K \cap N:M) \\ &\Rightarrow rx \in K \cap N \text{ یا } rM \subseteq (K \cap N) \\ &\Rightarrow rx \in K \cap N. \end{aligned}$$

لذا $K \cap N$ نیم اول است. □

تعریف ۳۵.۱.۱. گوییم مدول M نیم اول است هرگاه صفر زیرمدول نیم اول آن باشد. همچنین R–مدول M را به طور کامل نیم اول (تقریباً به طور کامل نیم اول) گوییم، هرگاه هر زیرمدول سره (هر زیرمدول سره غیر صفر) آن نیم اول باشد.

لم ۳۶.۱.۱. *اگر صفر تنها زیرمدول نیم اول از R– مدول ناصفر M باشد، آنگاه صفر تنها زیرمدول اول M نیز می‌باشد.*

اثبات. به برهان خلف فرض کنید M اول نباشد. در این صورت $r \in R$ و $m \in M$ وجود دارند به طوری که $rm = 0$ ولی $0 \neq m \in M$ و $rM \neq (0)$.
مجموعه $M \neq \{m \in M : rm = 0\} = N \neq (0)$ را در نظر بگیرید. نشان می‌دهیم که N نیم اول است. برای این منظور فرض کنید $a^2m \in N, a \in R, m \in M$. در این صورت $ra^2m = 0$. بنابراین $(ra)^2m = 0$ چون M نیم اول است، $ram = 0$. پس $am \in N$. در نتیجه N نیم اول است و با این که (0) تنها زیرمدول نیم اول M است در تناقض می‌باشد. پس (0) زیرمدول اول M است، که به وضوح تنها زیرمدول اول نیز هست. □

گزاره ۳۷.۱.۱. *فرض کنید R یک دامنه صحیح و $K \neq R$ میدان کسرهای آن باشد. در این صورت زیرمدول صفر از K تنها زیرمدول نیم اول آن است.*

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که (0) زیرمدول اول K است. برای این منظور فرض کنید $r \in R$ و $\frac{a}{s} \in K$، که $a, s \in R$ و $s \neq 0$. در این صورت $r\frac{a}{s} = 0$ نتیجه می‌دهد $ra = 0$. چون R دامنه صحیح است، لذا $r = 0$ یا $a = 0$. بنابراین $\frac{a}{s} \in (0)$ یا $r \in (0 : K)$. در نتیجه (0) زیرمدول اول است. حال فرض کنید $(0) \neq N \subseteq K$ یک R–زیرمدول نیم اول از K باشد. حال به ازای