دانشگاه تفرش
دانشکده ریاضی

حل عددی معادلات تحولی غیرخطی با استفاده از توابع اسپلاین غیرچندجمله‌ای

اکرم سالاری پناه

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
ریاضی کاربردی - آنالیز عددی

اساتید راهنما:
دکتر نبی‌اله گودرزوند چگینی
دکتر رضا مختاری

۱۳۸۹

بسم الله الرحمن الرحيم

پیشکش به

پدر عزیز و مادر صبور و مهربانم و به دست‌های پر مهر ایشان.
اینک به پاس داشت آن همه ایثار ثمره تلاشم را به قلب‌های
مهربانشان هدیه می‌کنم و تقدیم به همسر مهربان و فداکارم که چندی است
هم پیمان شده ایم مسیر زندگی‌یمان را در جاده رضایت خداوند طی کنیم.

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا روش اسپلاین‌های غیرچندجمله‌ای جهت حل عددی معادله برگرز اصلاح شده غیرخطی بررسی شده است. پایداری روش با استفاده از آنالیز پایداری فون نیومن مورد بررسی قرار گرفته است و نشان می‌دهیم که روش به طور مشروط پایدار است. با مثال‌های عددی کاربرد و دقت روش ارائه شده را در مقایسه با روش بی-اسپلاین نشان می‌دهیم.

سپس این روش در حل عددی معادلات ساین-گوردن و RLW به کار گرفته شده است. جهت بررسی دقت روش نتایج عددی با سایر روش‌های موجود مقایسه شده است.

تقدیر و تشکر

منّت خدای را عزّوجل، که طاعتش موجب قربت است و بشکر اندرش مزید نعمت. هر نفسی که فرو می‌رود ممدّ حیات است و چون برمی‌آید مفرّح ذات. پس در هر نفسی دو نعمت موجود است و بر هر نعمت شکری واجب.

خدا را شکر بی‌انتها که مرحله دیگری از تحصیلات را به مدد خودش پشت سر گذاشتم. اکنون که به لطف او نگارش این پایان‌نامه به انتها رسیده است، بر خود لازم می‌دانم ابتدا از استاد ارجمند جناب آقای دکتر چگینی تشکر کنم و همچنین از جناب آقای دکتر مختاری به پاس راهنمایی‌های ارزشمند ایشان در انجام این پایان‌نامه نهایت قدردانی را داشته باشم و از تمام اساتید و دوستانی که مرا در این پایان‌نامه یاری دادند قدردانی می‌کنم.

از سرکار خانم دکتر مشهدی و جناب آقای دکتر شاهرضایی که داوری این پایان‌نامه را تقبل کردند سپاسگذاری می‌کنم.

و در انتها سپاس و ستایش خود را به پیشگاه پدر و مادر عزیزم که تمام وجودم از آنهاست، تقدیم می‌نمایم و همچنین از خواهر و برادر مهربانم و همسر عزیزم که در تمام مراحل این پایان‌نامه راهنما، حامی و دلگرمی‌ام بود کمال تشکر را دارم.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

مقدمه

با پیشرفت روزافزون علوم، نیاز بشر به حل مسائل ریاضی که در جنبه‌های گوناگون زندگی کاربرد فراوانی دارند در حال افزایش است. از آنجایی که نمی‌توان هر مسئله را با روش تحلیلی حل کرد و یا بعضی از روش‌های تحلیلی بسیار پیچیده و طولانی هستند، روش‌های عددی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند.

با رشد سرعت محاسبات، بشر در پی دقیق‌تر کردن این روش‌های عددی است. از جمله روش‌های عددی در حل مسائل معادلات دیفرانسیل معمولی و با مشتقات پاره‌ای می‌توان به روش‌های اسپلاین و اسپلاین‌های غیرچندجمله‌ای اشاره کرد. در این پایان‌نامه یک روش عددی جهت حل چند معادله تحولی غیرخطی بر مبنای اسپلاین غیرچندجمله‌ای به کار گرفته شده است که شامل مطالب زیر است:

در فصل اول به بیان تعریف درونیابی و درونیابی اسپلاین پرداخته شده است. در فصل دوم درونیابی به کمک توابع اسپلاین غیرچندجمله‌ای مطرح شده است و یک مثال جهت بررسی دقت این نوع درونیابی آورده شده است. در فصل سوم معادله دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای غیرخطی برگرز با روش اسپلاین غیرچندجمله‌ای حل شده است. پایداری روش به کمک روش فون نیومن بررسی شده است. جهت بررسی دقت این روش نتایج عددی با نتایج عددی روش بی-اسپلاین مقایسه شده است. در فصل چهارم در یک کار پژوهشی معادله Sine-Gordon با روش اسپلاین‌های غیرچندجمله‌ای حل شده است و خطای روش نیز محاسبه شده است. در فصل پنجم نیز در یک کار پژوهشی معادله موج‌های طولی منظم RLW که یکی از معادلات مطرح در مطالعه موج‌های متفرق‌کننده است توسط روش اسپلاین غیرچندجمله‌ای حل شده است و نمودارهای حرکت تک سلیتون و برهم‌کنش دو موج سلیتونی در این فصل شبیه‌سازی شده‌اند. نتایج عددی حاصل از این روش به صورت جداول اعداد در دسترس هستند.

مطالب این پایان‌نامه بر اساس مرجع [۱] تنظیم شده است.

فصل ۱

مقدمات

۱.۱ مقدمه

قبل از ساخت اولین کامپیوترهای رقمی، در حل عددی مسائل ریاضی، محاسبات به صورت دستی انجام می‌شدند. سخت و طاقت فرسا بودن کار محاسبات دستی ایجاب می‌کرد که، از روش‌هایی استفاده شود که دارای محاسبات کمتر بودند. در آن زمان برای جلوگیری از اتلاف وقت و هزینه زیاد از نتایج کار دیگران که به صورت جداول اعداد در دسترس بود استفاده می‌شد و فرمول‌های درونیابی بر پایه‌ی تفاضلات متناهی به طور وسیعی به کار گرفته می‌شد و مبحث جدیدی به نام حساب تفاضلات متناهی ابداع شده بود که در حل مسائل گوناگون آنالیز عددی و ریاضی کاربردی به کار می‌رفت.

از زمان استفاده وسیع از کامپیوترهای رقمی در دهه ۱۹۵۰ انقلابی در آنالیز عددی از جمله نظریه تقریب و درونیابی ایجاد شد که نقش جداول عددی سنتی و تفاضلات متناهی را تقلیل داد. اما هنوز روش‌های دستی و جداول اعداد در بسیاری از مسائل پیچیده‌ی ریاضی و یا در فیزیک ریاضی کاربرد فراوان دارند. امروزه با استفاده از ماشین‌حساب و رایانه‌ها، درونیابی جدولی کمتر مورد استفاده است ولی از آن جهت که فرمول‌های به دست آمده در موارد دیگر مفید هستند، مسائل درونیابی همچنان از مسائل عمده آنالیز عددی به شمار می‌آیند.

نظریه درونیابی چندجمله‌ای کاربردهای مهمی دارد. از جمله نخستین کاربرد آن تهیه ابزارهای ریاضی جهت ایجاد روش‌هایی در زمینه‌های نظریه تقریب، انتگرال‌گیری عددی، حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای است. کاربرد دیگر آن تهیه وسایلی جهت کار با توابع جدولی است. از گذشته تا به حال از نقطه نظر محاسباتی شکل‌های مناسبی برای درونیابی چندجمله‌ای با داده‌های جدولی به دست آمده است. نظریه درونیابی تکه‌ای چندجمله‌ای از اوایل دهه ۱۹۶۰ به بعد با معرفی توابع اسپلاین بسیار متداول شد. آغاز نظریه توابع اسپلاین را عمدتاً به شونبرگ [۱] در مقاله‌های ۱۹۴۶ او نسبت می‌دهند.

---

[۱] Shoenberg

بعد از ۱۹۴۶ شونبرگ و تعدادی از شاگردان او به تحقیق و کار روی اسپلاین‌ها ادامه دادند. به خصوص شونبرگ و ویتنی [۲] در سال‌های ۱۹۴۹ و ۱۹۵۳ برای نخستین بار یک قضیه برای وجود اسپلاین‌های درونیاب اثبات کردند. این توابع تکه‌ای چندجمله‌ای، به‌انحاء گوناگون در نظریه تقریب، گرافیک رایانه‌ای، برازش داده‌ها، انتگرال‌گیری عددی، حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی و حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای به کار گرفته می‌شوند. برای یک مطالعه کلی می‌توان به آلبرگ و همکاران [۳] ۱۹۶۷ و دبور [۴] ۱۹۷۸ و شومیکر [۵] ۱۹۸۱ مراجعه کرد.

در این میان درونیابی با استفاده از توابع اسپلاین درجه سه از دیرباز نسبت به سایر توابع اسپلاین بیشتر مورد استفاده بوده است زیرا این توابع نسبتاً هموار هستند و مشکلات چندجمله‌ای‌های با درجات بالاتر را ندارند.

۲.۱ درونیابی و انواع آن

اگر رده‌ای خاص از توابع یک متغیره x را با نماد $P(x, a_۰, a_۱, \cdots, a_n)$ نمایش دهیم با پیدا کردن $n+۱$ پارامتر $a_۰, a_۱, \cdots, a_n$، هر تابع از این رده مشخص می‌شود.

تعریف ۱.۲.۱. اگر زوج نقاط حقیقی یا مختلط $(x_i, f_i), \quad i = ۰, ۱, \cdots, n$ را به طوری که $x_i \neq x_k$ برای هر $i \neq k$، از یک تابع جدولی داشته باشیم، مسئله درونیابی $P(x, a_۰, a_۱, \cdots, a_n)$ عبارت است از تعیین $n+۱$ پارامتر $a_۰, a_۱, \ldots, a_n$، به طوری که:

$$P(x_i, a_۰, a_۱, \cdots, a_n) = f_i, \qquad i = ۰, ۱, \cdots, n.$$

۱.۲.۱ درونیابی خطی

اگر $P(x, a_۰, a_۱, \cdots, a_n)$ به طور خطی به پارامترهای $a_۰, a_۱, \cdots, a_n$، بستگی داشته باشد یک درونیابی خطی نامیده می‌شود. یعنی

$$P(x, a_۰, a_۱, \cdots, a_n) = a_۰ p_۰(x) + a_۱ p_۱(x) + \cdots + a_n p_n(x).$$

که $\{p_۰(x), p_۱(x), \cdots, p_n(x)\}$ مجموعه‌ی مولد فضای درونیابی نامیده می‌شود و اگر تشکیل یک مجموعه مستقل خطی را نیز بدهند آنگاه پایه‌ای برای فضای درونیابی محسوب می‌شود. درونیابی خطی نیز انواع مختلفی دارد که در ذیل به طور خلاصه به آنها اشاره می‌شود.

---

[۲] Viteni

[۳] Ahlberg et al

[۴] Debor

[۵] Schumaker

درونیابی چند جمله‌ای

از جمله درونیابی‌های خطی می‌توان به درونیابی چندجمله‌ای اشاره کرد که عبارت است از:

$$P(x, a_۰, a_۱, \cdots, a_n) = a_۰ + a_۱ x + \cdots + a_n x^n,$$

و در قضیه (۲.۲.۱) به وجود آن اشاره شده است. این نوع درونیابی به نوبه خود شامل درونیابی لاگرانژ، نیوتن، هرمیتی و $\cdots$ است.

قضیه ۲.۲.۱. برای $n+۱$ نقطه درونیاب $i = ۰, ۱, \cdots, n$ ، (x_i, f_i) به طوری که x_i ها دوبه‌دو مجزا باشند، یک چندجمله‌ای از درجه کمتر یا مساوی n به صورت یکتا وجود دارد به طوری که

$$P(x_i, a_۰, a_۱, \cdots, a_n) = f_i, \qquad i = ۰, ۱, \cdots, n.$$

اثبات: مرجع [۲].

درونیابی مثلثاتی

از جمله درونیابی‌های خطی می‌توان به درونیابی مثلثاتی اشاره کرد که عبارت است از:

$$P(x, a_۰, a_۱, \cdots, a_n) = a_۰ + a_۱ e^{ix} + \cdots + a_n e^{nix}.$$

۲.۲.۱ درونیابی غیرخطی

اگر $P(x, a_۰, a_۱, \cdots, a_n)$ به طور خطی به پارامترهای $a_۰, a_۱, \cdots, a_n$، وابسته نباشد یک درونیابی غیرخطی داریم. درونیابی غیرخطی نیز انواع مختلفی دارد که در زیر به طور خلاصه به آنها اشاره خواهد شد.

درونیابی کسری

از جمله درونیابی‌های غیرخطی می‌توان به درونیابی کسری اشاره کرد که به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$P(x, a_۰, a_۱, \cdots, a_n, b_۰, b_۱, \cdots, b_n) = \frac{a_۰ + a_۱ x + \cdots + a_n x^n}{b_۰ + b_۱ x + \cdots + b_n x^n}.$$

درونیابی نمایی

رده دیگری از درونیابی غیرخطی، درونیابی نمایی است که فرمول آن به صورت زیر است:

$$P(x, a_۰, a_۱, \cdots, a_n, \lambda_۰, \lambda_۱, \cdots, \lambda_n) = a_۰ e^{\lambda_۰ x} + a_۱ e^{\lambda_۱ x} + \cdots + a_n e^{\lambda_n x}.$$

۳.۱ درونیابی اسپلاین

در درونیابی چندجمله‌ای با بیشتر شدن تعداد نقاط درونیاب، درجه چندجمله‌ای درونیاب نیز بالاتر می‌رود که این می‌تواند باعث نوسانات شدید تابع درونیاب شود و خطای تابع در نقاط نزدیک مرز به طور فاحشی افزایش پیدا کند و به همین سبب خطای درونیابی افزایش پیدا کند. جهت مرتفع کردن این مشکل، ابتدا بازه درونیابی به تعداد متناهی زیربازه افراز شده سپس در هر زیربازه تابع با یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه k درونیابی می‌شود. این نوع درونیابی، درونیابی تکه‌ای چندجمله‌ای از درجه k نام دارد.

یکی از انواع درونیابی تکه‌ای چندجمله‌ای، درونیابی اسپلاین است که به علت هموارى تابع تقریب، دقت این روش از روش‌های دیگر بالاتر است. توابع اسپلاین منحنی‌های درونیاب هموارتری را نسبت به درونیابی‌های دیگر تولید می‌کنند. توابع تقریب اسپلاین در پروژه‌های کاربردی، علوم گرافیکی، گراف و در روش‌های عددی و تقریب توابع کاربردهای وسیعی دارند.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید $\Delta = \{a = x_۰ < x_۱ < \cdots < x_n = b\}$ یک افراز از بازه $[a, b]$ باشد. یک تابع اسپلاین از درجه k روی افراز Δ یک تابع حقیقی $S : [a, b] \to R$ با خواص زیر است:

۱- تابع $S(x)$ روی هر یک از زیربازه‌های $[x_i, x_{i+۱}]$ یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه k می‌باشد.

۲- تابع $S(x)$ روی بازه $[a, b]$ به طور پیوسته $k - ۱$ بار مشتق‌پذیر است. یا به عبارتی $S(x) \in C^{k-۱}[a, b]$.

اگر $(x_i, f_i), \quad i = ۰, ۱, \cdots, n$ زوج نقاط درونیاب باشند یک درونیابی اسپلاین از درجه k، پیدا کردن یک تابع اسپلاین از درجه k است به طوری که نقاط درونیابی در آن صدق کنند.

یکی از انواع تابع اسپلاینی که در بسیاری از مسائل، تقریب مناسب‌تری می‌دهد تابع اسپلاین درجه سه یا تابع اسپلاین مکعبی است. بنابراین تابع اسپلاین مکعبی را در نظر گرفته و دو روش برای به دست آوردن آن در ادامه معرفی می‌کنیم.

۱.۳.۱ روش اول

۱- ابتدا بازه $[a, b]$ را به صورت $\Delta = \{a = x_۰ < x_۱ < \cdots < x_n = b\}$ افراز کرده که x_i ها نقاط درونیاب هستند و مقدار تابع در این نقاط مشخص شده است.

۲- با انتقال پایه‌های اصلی $\{۱, x, x^۲, x^۳\}$ برای هر زیربازه، یک سری پایه منحصر به فرد در هر زیربازه مشخص می‌شود. به طور مثال در زیربازه $[x_i, x_{i+۱}]$ پایه‌ها عبارتند از:

$$\left\{ ۱, (x - x_i), (x - x_i)^۲, (x - x_i)^۳ \right\}.$$

۳- در هر زیربازه تابع تقریب به صورت ترکیب خطی از پایه‌های همان زیربازه نوشته می‌شود. به طور مثال برای زیربازه $[x_i, x_{i+۱}]$ تابع تقریب به صورت زیر است:

$$s_i(x) = a_i(x - x_i)^۳ + b_i(x - x_i)^۲ + c_i(x - x_i) + d_i.$$

در اینجا n زیربازه وجود دارد که در هر یک ۴ پارامتر مجهول a_i, b_i, c_i, d_i وجود دارد، بنابراین برای به دست آوردن این ضرایب مجهول به $۴n$ معادله نیاز است. این معادلات را باید از شرایط حاکم بر درونیابی که در زیر آورده شده‌اند استخراج کرد.

۱. نقاط درونیاب $(x_i, f_i),\ \ i = ۰, ۱, \cdots, n$، در تابع تقریب صدق می‌کنند.

۲. پیوستگی مشتق اول تابع تقریب در بازه $[a, b]$.

۳. پیوستگی مشتق دوم تابع تقریب در بازه $[a, b]$.

با توجه به شرط ۱ نقاط درونیاب $(x_۱, f_۱), (x_۰, f_۰)$ باید در زیرتابع $s_۰(x)$ صدق کنند، که نتیجه دو معادله به صورت زیر است:

$$\begin{cases} s_۰(x_۰) = f_۰ & (۱) \\ s_۰(x_۱) = f_۱ & (۲) \end{cases}$$

و به همین ترتیب برای تمام $s_i(x),\ \ i = ۱, \cdots, n - ۱$. بنابراین ۲n معادله به دست می‌آید. در ادامه شرط های دو و سه را به صورت زیر به $S(x)$ تحمیل می‌کنیم.

تابع $S(x)$ در $x = x_i,\ \ i = ۱, \cdots, n - ۱$ مشتقات مرتبه اول و دوم پیوسته دارد یعنی در این نقاط باید مشتقات چپ و راست مساوی باشند بنابراین:

$$\begin{cases} s'_{i-۱}(x_i) - s'_i(x_i) = ۰ \\ s''_{i-۱}(x_i) - s''_i(x_i) = ۰ \qquad i = ۱, \cdots, n - ۱. \end{cases} \tag{۱.۱}$$

با اعمال تمام شرایط تا کنون ۲-۴n معادله حاصل شده است. برای اینکه تابع اسپلاین به طور یکتا مشخص شود دو معادله دیگر نیاز است. می‌توان دو شرط اضافی به درونیابی تحمیل کرد و با این دو شرط تابع اسپلاین مورد نظر را به دست آورد. با توجه به دو شرط اضافی، سه نوع اسپلاین متفاوت به دست می‌آید که عبارتند از:

۱ - اسپلاین طبیعی: اگر شرط‌های $S''(a) = ۰$ و $S''(b) = ۰$ اضافه شوند، آنگاه دو معادله زیر به دست می‌آیند و اسپلاین حاصل، اسپلاین طبیعی نامیده می‌شود.

$$\begin{cases} s''_۰(x_۰) = ۰ \\ s''_{n-۱}(x_n) = ۰ \end{cases}$$

۲ - اسپلاین متناوب: اگر شرط‌های

$$\begin{aligned} S(a) &= S(b) \\ S'(a) &= S'(b) \\ S''(a) &= S''(b) \end{aligned}$$

اضافه شوند، آنگاه دو معادله زیر به دست می‌آیند و اسپلاین حاصل را اسپلاین متناوب گویند. البته لازم هست که نقاط درونیابی نیز شرط $f_۰ = f_n$ را داشته باشند.

$$\begin{cases} s'_۰(x_۰) - s'_{n-۱}(x_n) = ۰ \\ s''_۰(x_۰) - s''_{n-۱}(x_n) = ۰ \end{cases}$$

۳ - اسپلاین مقید یا کامل: اگر $t_۱$ و $t_۲$ دو عدد حقیقی باشند با اضافه کردن دو شرط

$$S\prime(a) = t_۱$$
$$S'(b) = t_۲$$

دو معادله زیر به دست می‌آیند و اسپلاین حاصل مقید یا کامل نامیده می‌شود.

$$\begin{cases} s'_۰(x_۰) = t_۱ \\ s'_{n-۱}(x_n) = t_۲ \end{cases}$$

با اضافه کردن دو معادله که به یکی از روش‌های بالا به دست می‌آید به معادلات قبل می‌توان یک دستگاه ۴n معادله با ۴n مجهول به دست آورد. به طور مثال دستگاه معادلات اسپلاین طبیعی به صورت زیر است.

$$\begin{cases} s_۰(x_۰) = f_۰ & (۱) \\ s_۰(x_۱) = f_۱ & (۲) \\ s_۱(x_۱) = f_۱ & \\ s_۱(x_۲) = f_۲ & \\ \vdots & \vdots \\ s_{n-۱}(x_{n-۱}) = f_{n-۱} & (۲n-۱) \\ s_{n-۱}(x_n) = f_n & (۲n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ s'_۰(x_۱) - s'_۱(x_۱) = ۰ & (۲n+۱) \\ s'_۱(x_۲) - s'_۲(x_۲) = ۰ & (۲n+۲) \\ & \\ s''_{n-۲}(x_{n-۱}) - s''_{n-۱}(x_{n-۱}) = ۰ & (۴n-۲) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ s''_۰(x_۰) = ۰ & (۴n-۱) \\ s''_{n-۱}(x_n) = ۰ & (۴n) \end{cases}$$

با حل دستگاه معادلات فوق ضرایب تابع اسپلاین تعیین می‌گردد.

۲.۳.۱ روش دوم

تابع اسپلاین مکعبی توسط گشتاورهای خود نیز قابل تعریف است و گشتاورها از حل یک دستگاه خطی به دست می‌آیند. در این روش تعداد مجهولات نسبت به روش قبل از ۴n به n+۱ کاهش می‌یابد. بنابراین به نظر می‌رسد که این روش مقرون به صرفه‌تر باشد.

اگر $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ افرازی از بازه $[a, b]$ باشد و $(x_i, f_i), \quad i = 0, 1, \cdots, n$ ها نقاط درونیاب باشند، قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} h_{i+1} &:= x_{i+1} - x_i, & i &= 0, 1, \cdots, n-1 \\ M_i &:= s''(x_i), & i &= 0, 1, \cdots, n. \end{aligned}$$

M_i ها گشتاورهای تابع اسپلاین مکعبی نامیده می‌شوند. از آنجایی که تابع اسپلاین مکعبی در هر زیربازه $[x_i, x_{i+1}]$یک تابع از درجه حداکثر سه است بنابراین مشتق دوم آن در هر زیربازه یک تابع خطی از درجه یک می‌باشد:

$$s_i''(x) = M_i \frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}} + M_{i+1} \frac{x - x_i}{h_{i+1}} \quad x \in [x_i, x_{i+1}]. \tag{۲.۱}$$

با دو بار انتگرال‌گیری از(۲.۱) تابع اسپلاین مکعبی در بازه $[x_i, x_{i+1}]$ مشخص می‌شود:

$$s_i'(x) = -M_i \frac{(x_{i+1} - x)^2}{2h_{i+1}} + M_{i+1} \frac{(x - x_i)^2}{2h_{i+1}} + A_i \tag{۳.۱}$$

$$s_i(x) = M_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_{i+1}} + M_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h_{i+1}} + A_i(x - x_i) + B_i \tag{۴.۱}$$

که A_iو B_i ثابت‌های انتگرال‌گیری هستند. برای به دست آوردن ثابت‌های انتگرال‌گیری نقاط درونیاب (x_i, f_i)و (x_{i+1}, f_{i+1}) در (۴.۱) صدق داده می‌شوند بنابراین:

$$\begin{aligned} B_i &= f_i - M_i \frac{h_{i+1}^2}{6}, \\ A_i &= \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{6}(M_{i+1} - M_i) \end{aligned} \tag{۵.۱}$$

حال $s_i(x)$ برحسب گشتاورهایش عبارت است از:

$$s_i(x) = \alpha_i(x - x_i)^3 + \beta_i(x - x_i)^2 + \gamma_i(x - x_i) + \delta_i \tag{۶.۱}$$

به طوری که:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{s_i'''(x_i)}{6} = \frac{M_{i+1} - Mi}{6h_{i+1}}, & s_i''(x_i) &= 2\beta_i = M_i \\ s_i'(x_i) &= \gamma_i = -M_i \frac{h^2}{6} + A_i, & s_i(x_i) &= \delta_i = f_i. \end{aligned}$$

شرط پیوستگی مشتق اول تابع اسپلاین در نقاط $x = x_i, \;\; i = ۱, ۲, \cdots, n-۱$ منجر به n-۱ معادله برای گشتاورهای M_i می‌شود. با جایگذاری مقدار (۵.۱) برای A_i در (۳.۱) داریم:

$$s_i'(x) = -M_i\frac{(x_{i+۱}-x)^۲}{۲h_{i+۱}} + M_{i+۱}\frac{(x-x_i)^۲}{۲h_{i+۱}} + \frac{f_{i+۱}-f_i}{h_{i+۱}} - \frac{h_{i+۱}}{۶}(M_{i+۱}-M_i)$$

از آنجایی که در هر نقطه $x = x_i$مشتق چپ و مشتق راست با هم برابر هستند:

$$s_i'(x_i) = s_{i-۱}'(x_i)$$

بنابراین

$$\frac{h_i}{۶}M_{i-۱} + \frac{h_i+h_{i+۱}}{۳}M_i + \frac{h_{i+۱}}{۶}M_{i+۱} = \frac{f_{i+۱}-f_i}{h_{i+۱}} - \frac{f_i-f_{i-۱}}{h_i} \qquad (۷.۱)$$

در نتیجه n-۱ معادله برای n+۱ گشتاور وجود دارد. دو معادله دیگر که برای حل دستگاه احتیاج است را می‌توان جداگانه از هر کدام از شرایط مرزی (۱)، (۲) و (۳) به دست آورد:

۱-

$$s_۰''(a) = M_۰ = ۰ = M_n = s_{n-۱}''(b)$$

۲-

$$\begin{aligned} s_۰''(a) &= s_{n-۱}''(b) \Longrightarrow M_۰ = M_n, \\ s_۰'(a) &= s_{n-۱}'(b) \Longrightarrow \frac{h_n}{۶}M_{n-۱} + \frac{h_n+h_۱}{۳}M_n + \frac{h_۱}{۶}M_۱ \\ &= \frac{f_۱-f_n}{h_۱} - \frac{f_n-f_{n-۱}}{h_n}. \end{aligned}$$

شرط آخر با (۷.۱) برای i=n یکسان است اگر قرار دهیم:

$$h_{n+۱} := h_۱ \quad M_{n+۱} := M_۱ \quad f_{n+۱} := f_۱.$$

یادآوری می‌کنیم که شرط (۲) احتیاج دارد که $f_n = f_۰$.

۳-

$$\begin{aligned} s_۰'(a) &= f_۰' \Longrightarrow \frac{h_۱}{۳}M_۰ + \frac{h_۱}{۶}M_۱ = \frac{f_۱-f_۰}{h_۱} - f_۰' \\ s_{n-۱}'(b) &= f_n' \Longrightarrow \frac{h_n}{۶}M_{n-۱} + \frac{h_n}{۳}M_n = f_n' - \frac{f_n-f_{n-۱}}{h_n}. \end{aligned}$$

فرمول (۷.۱) می‌تواند به فرم زیر نوشته شود:

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i, \qquad i = 1, 2, ..., n-1, \tag{8.1}$$

با معرفی

$$\begin{aligned}
\lambda_i : &= \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, \qquad \mu_i := 1 - \lambda_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} \\
d_i : &= \frac{6}{h_i + h_{i+1}}\{\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_j}\}.
\end{aligned}$$

در قسمت (۱) علاوه بر این موارد زیر تعریف می‌شود:

$$\lambda_0 := 0, \quad d_0 := 0, \quad \mu_n := 0, \quad d_n := 0, \tag{9.1}$$

ودر قسمت (۳)

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &:= 1, \qquad d_0 := \frac{6}{h_1}(\frac{f_1 - f_0}{h_1} - f'_0) \\
\mu_n &:= 1, \qquad d_n := \frac{6}{h_n}(f'_n - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_n}).
\end{aligned} \tag{10.1}$$

پس با توجه به موارد فوق در مورد قسمت‌های (۱) و(۳) دستگاه معادلات خطی زیر برای گشتاورها حاصل می‌شود:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
2M_0 & + & \lambda_0 M_1 & & & & & & & = & d_0, \\
\mu_1 M_0 & + & 2M_1 & + & \lambda_1 M_2 & & & & & = & d_1, \\
 & \cdot & & \cdot & & \cdot & & & & & \cdot \\
 & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & & & \cdot \\
 & & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & & \cdot \\
 & & & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\
 & & & & \mu_{n-1} M_{n-2} & + & 2M_{n-1} & + & \lambda_{n-1} M_n & = & d_{n-1}, \\
 & & & & & & \mu_n M_{n-1} & + & 2M_n & = & d_n.
\end{array} \tag{11.1}$$

درمورد قسمت (۲) نیز تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
\lambda_n : &= \frac{h_1}{h_n + h_1}, \qquad \mu_n := 1 - \lambda_n = \frac{h_n}{h_n + h_1} \\
d_n : &= \frac{6}{h_n + h_1}\{\frac{f_1 - f_n}{h_1} - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_n}\}.
\end{aligned}$$

که $M_1, M_2, \cdots, M_n = M_0$ و دستگاه معادلات مربوط به این قسمت عبارت است از:

$$
\begin{array}{cccccccc}
2M_1 & + & \lambda_1 M_2 & & & & \mu_1 M_n = & d_1, \\
\mu_2 M_1 & + & 2M_2 & + & \lambda_2 M_3 & & = & d_2, \\
. & & . & & . & & & . \\
 & . & & . & & . & & . \\
 & & . & & . & & . & . \\
 & & & . & & . & . & . \\
 & & \mu_{n-2} M_{n-2} & + & 2M_{n-1} & + & \lambda_{n-1} M_n = & d_{n-1}, \\
\lambda_n & & & & \mu_n M_{n-1} & + & 2M_n = & d_n.
\end{array}
$$

قضیه ۲.۳.۱. به ازای هر افراز $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ از بازه $[a, b]$ دستگاه (۱۲.۱) از معادلات خطی جواب یکتا دارد.

۴.۱ نتایج عددی

در اینجا با آوردن یک مثال دقت درونیابی به کمک اسپلاین مکعبی طبیعی و مقید را مقایسه خواهیم کرد.

مثال ۱.۴.۱. تابع

$$f(x) = \sin(x) + 0.1\sin(32x)$$

را نظر بگیرید. با توجه به نقاط درونیاب $(x_i, f_i),\ \ i = 0, \cdots, n$ تابع را در بازه $[0, 0.3]$ با دو روش اسپلاین مکعبی طبیعی و مقید درونیابی می‌کنیم. دقت هر روش توسط نرم یک، نرم دو و نرم بینهایت سنجیده می‌شود. نتایج عددی در جداول (۱.۱) و (۲.۱) به ترتیب به کمک توابع اسپلاین طبیعی و اسپلاین مقید با طول گام‌های متفاوت آورده شده‌اند. خطاها در نقاط x محاسبه شده‌اند.

نتیجه ۲.۴.۱. با مقایسه نتایج عددی در جدول‌های (۱.۱) و (۲.۱) نتیجه می‌شود که برای تابع $f(x)$ که مشتق $(k-1)$ام آن در نقاط مرزی a و b صفر نیست روش اسپلاین درجه k مقید دقیق‌تر از روش اسپلاین درجه k طبیعی است. ولی برای توابعی که مشتق مرتبه $(k-1)$ام آن صفر باشد نتایج این دو درونیابی یکسان است.