إنه من سليمان وإنه بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه کردستان
دانشکده علوم
گروه فیزیک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
گرایش اطلاعات کوانتومی

عنوان

# بررسی انتقال درهم‌تنیدگی از الکترون‌ها به فوتون‌ها با استفاده از نقاط کوانتومی

استاد راهنما

**دکتر شهریار سلیمی**

استاد مشاور

**دکتر آرش سروری**

نگارش

**برهان احمدی**

**اسفند ۱۳۹۱**

سلامی چو بوی خوش آشنایی
بر آن مردم دیده روشنایی
نمی بینم از همدمان هیچ بر جای
دلم خون شد از غصه ساقی کجایی
رفیقان چنان عهد صحبت شکستند
که گویی نبوده ست خود آشنایی [1]

[1] حافظ

# راه کم گذر...

دو جاده‌ی جنگلی از هم جدا می‌شدند.

و متاسفانه گذر از هر دو ممکن بود.

در مقام رهگذر مدت‌ها ایستادم.

تا در حد ممکن ببینم که این دو در کجا منشعب می‌شوند.

آنگاه به راهی دیگر به همان زیبایی نگاه کردم.

و شاید بتوان گفت که این راه بهتر بود.

زیرا علف با پوشش سبزش منظره‌ی دلنشینی را به وجود آورده بود.

در آن صبح برگ‌ها به طور یکنواخت بر روی هر دو مسیر آرام گرفته بود،

که نشان می‌داد هنوز کسی بر روی آنها قدم نگذاشته بود.

اوه، من اولی را برای روزی دیگر نگه داشتم.

گرچه می‌دانستم که چگونه یک راه به راه به راهی دیگر منتهی می‌شود

و تردید داشتم که می‌توانم از آن باز گردم.

من با آه و حسرت از این مطلب یاد خواهم کرد.

در جایی که قرن‌ها و فرسنگ‌ها با اینجا فاصله دارد:

دو جاده‌ی جنگلی از هم جدا می‌شدند، و من...

من جاده‌ای را که کم گذر بود برگزیدم.

و تمام تفاوت‌ها ناشی از این انتخاب بود.

رابرت فراست[۲](۱۹۶۳-۱۸۷۴)

---

[۲] Robert Frost

هر آن که جانب اهل وفا نگه دارد
خداش در همه حال از بلا نگه دارد

حدیث دوست نگویم مگر به حضرت دوست
که آشنا سخن آشنا نگه دارد

دلا معاش چنان کن که گر بلغزد پای
فرشته‌ات به دو دست دعا نگه دارد

صبا بر آن سر زلف ار دل مرا بینی
ز روی لطف بگویش که جا نگه دارد

چو گفتمش که دلم را نگاه دار چه گفت
ز دست بنده چه خیزد خدا نگه دارد

سر و زر و دل و جانم فدای آن یاری
که حق صحبت مهر و وفا نگه دارد

غبار راهگذارت کجاست تا حافظ
به یادگار نسیم صبا نگه دارد

# سپاس گزاری...

در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ اساتید راهنمای خود، جناب آقای دکتر شهریار سلیمی و جناب آقای دکتر آرش سروری صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده‌ی ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر حسن زاده و جناب آقای دکتر قطبی که زحمت مطالعه و داوری را تقبل فرمودند، کمال تشکر و امتنان را دارم.

از اساتید دوره‌ی کارشناسی‌ام در دانشگاه کردستان خانم دکتر طاعتی، خانم دکتر عالمی پور، جناب آقای دکتر سعیدی، جناب آقای دکتر ستاره، جناب آقای دکتر کرمی و جناب آقای دکتر ملک‌الکلامی به پاس دلسوزی‌هایشان سپاس گزارم.

در پایین نه در آخر، بوسه می‌زنم بر دستان پدر و مادر عزیزم و تشکر می‌کنم از برادر عزیز و خواهر مهربانم به پاس عاطفه‌ی سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

در پایان تشکر می‌کنم از دوستان خوبم خصوصا حیدر شیخ احمدی، طیب گل عنبری و ابوالحسن محمدی که همیشه اولین کسانی بودند که از آنها کمک می گرفتم و تحملم می کردند. همچنین از وریا ربیعی، ستار نصری، هژیر حسن خالی، سروش حاصلی، روژین یوسف جانی، فرزین آدابی، دکتر علی آقامحمدی، ایمان حسن زاده و داوود بیننده و همه ی آن هایی که هر یک به‌نحوی در دوره‌ی تحصیلی کارشناسی ارشد مرا یاری کردند.

اسفند ۱۳۹۱

# چکیده

در این پایان‌نامه می‌خواهیم چگونگی و میزان انتقال درهم‌تنیدگی[۳] از اسپین[۴] الکترون‌های محبوس در نقاط کوانتومی[۵] به قطبش فوتون‌ها[۶] را مورد مطالعه قرار دهیم. در واقع فرآیند بدین‌گونه است که نقاط کوانتومی را با الکترون‌ها و حفره‌ها[۷] باردار کرده به طوریکه با هم در هم‌تنیده باشند. سپس با استفاده از این ذرات، اکسیتون‌هایی[۸] (ترکیب الکترون و حفره) را درست می‌کنیم. چون اکسیتون‌ها ناپایدارند لذا به سرعت نابود شده و در این فرآیند نابودی، فوتون‌هایی با قطبش مثبت یا منفی تولید می‌کنند. حال باید بدانیم فوتون‌های تولید شده تا چه اندازه درهم‌تنیده هستند و چگونه می‌توان این درهم‌تنیدگی را کم یا زیاد کرد. چگونگی و میزان انتقال این درهم‌تنیدگی کاربردهای زیادی در اطلاعات و انتقال کوانتومی[۹] دارد. برای محاسبه‌ی میزان درهم‌تنیدگی منتقل شده از نامساوی بل[۱۰] استفاده می‌کنیم.



**کلمات کلیدی:** *درهم‌تنیدگی، اسپین، نقاط کوانتومی، قطبش*


[۳] Entanglement
[۴] Spin
[۵] Quantum Dots
[۶] Photon Polarization
[۷] Hole
[۸] Exiton
[۹] Quantum Information and Teleportation
[۱۰] Bell Inequality

# فهرست مطالب


**۱ مقدمه** **۱**

**۲ درهم‌تنیدگی کوانتومی** **۳**

۱.۲ مقدمه‌ای در مورد درهم‌تنیدگی کوانتومی . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۳

۲.۲ نامساوی بل . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۵

**۳ فرایندهای تصادفی** **۸**

۱.۳ فضای احتمال . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۸

۱.۱.۳ اصول موضوعه یا بدیهیات احتمال . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۸

۲.۳ متغیر تصادفی . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۹

۳.۳ احتمال های متصل . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۱۰

۱.۳.۳ احتمالات شرطی . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۱۰

**۴ فرایندهای مارکووی** **۱۱**

۱.۴ مقدمه . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۱۱

۲.۴ فرایندهای تصادفی . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۱۱

۳.۴ فرایند مارکووی . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۱۲

۱.۳.۴ معادله دیفرانسیل چاپمن-کولموگوروف . . . . . . . . . . . . . . . . ۱۳
۲.۳.۴ معادله دیفرانسیل تصادفی . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۱۴
۴.۴ فرایندهای قطعی تکه تکه . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۱۵
۱.۴.۴ یک مثال واقعی . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۱۶

**۵ معادله‌ی مادر کوانتومی ۲۰**
۱.۵ مقدمه . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۲۰
۲.۵ دینامیک سیستم‌های کوانتومی باز . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۲۰
۳.۵ استخراج میکروسکوپیکی معادله ی لیندبلند . . . . . . . . . . . . . . . . . ۲۲
۴.۵ معادله ی مادر اپتیکی کوانتومی . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۲۷
۱.۴.۵ ماده در میدان تابشی کوانتیده . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۲۷

**۶ نقطه‌ی کوانتومی ۲۹**
۱.۶ مقدمه در مورد فناوری نانو . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۲۹
۲.۶ روش ساخت و خواص نقاط کوانتومی . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۳۱
۳.۶ ساختار نواری نیمرساناها . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۳۴

**۷ بررسی تونل زنی الکترون‌های باند رسانش در یک نقطه‌ی کوانتومی دوقلو ۳۶**
۱.۷ مقدمه . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۳۶
۲.۷ سامانه‌ی برهمکنش کننده با محیط . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۳۸
۳.۷ اعمال پرتوی لیزر خارجی در حال تشدید با سامانه . . . . . . . . . . . . ۴۴

**۸ پیوست ۴۹**

# لیست تصاویر


۱.۴ سامانه‌ی متشکل از شش نقطه‌ی کوانتومی که با محیط نیز برهمکنش دارد. . . . . . . ۱۷

۱.۶ یک نقطه‌ی کوانتومی دوقلو حاوی دو الکترون یکی با اسپین بالا و دیگری با اسپین پایین . . . ۳۲

۱.۷ باندهای انرژی نقطه ی کوانتومی دوقلو. (a) بدون ولتاژ گیت. (b) با ولتاز گیت . . . ۳۹

۲.۷ درایه‌ی صفرصفر ماتریس چگالی ($\rho_{۰۰}$) بر حسب زمان وقتی $l=۰/۸$، $m=۰/۴$ و $\rho_{۰۰}(t=۰)=۱$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۴۶

۳.۷ درایه‌ی یک‌یک ماتریس چگالی ($\rho_{۱۱}$) بر حسب زمان وقتی $l=۰/۸$، $m=۰/۴$ و $\rho_{۱۱}(t=۰)=۰$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۴۶

۴.۷ درایه‌ی دودو ماتریس چگالی ($\rho_{۲۲}$) بر حسب زمان وقتی $l=۰/۸$، $m=۰/۴$ و $\rho_{۲۲}(t=۰)=۰$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۴۶

۵.۷ درایه‌ی صفرصفر ماتریس چگالی ($\rho_{۰۰}$) بر حسب زمان وقتی $\frac{l}{p}=۲$، $l=۰/۸$، $m=۰/۴$ و $\rho_{۰۰}(t=۰)=۱$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۴۶

۶.۷ درایه‌ی یک‌یک ماتریس چگالی ($\rho_{۱۱}$) بر حسب زمان وقتی $\frac{l}{p}=۲$، $l=۰/۸$، $m=۰/۴$ و $\rho_{۱۱}(t=۰)=۰$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۴۷

۷.۷ درایه‌ی دودو ماتریس چگالی ($\rho_{۲۲}$) بر حسب زمان وقتی $\frac{l}{p}=۲$، $l=۰/۸$، $m=۰/۴$ و $\rho_{۲۲}(t=۰)=۰$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۴۷

۸.۷ درایه‌ی صفرصفر ماتریس چگالی ($\rho_{۰۰}$) بر حسب زمان وقتی $\frac{l}{p} = ۱$، $l = ۰/۸$، $m = ۰/۴$ و $\rho_{۰۰}(t = ۰) = ۱$. . . . . . ۴۷

۹.۷ درایه‌ی یک‌یک ماتریس چگالی ($\rho_{۱۱}$) بر حسب زمان وقتی $\frac{l}{p} = ۱$، $l = ۰/۸$، $m = ۰/۴$ و $\rho_{۱۱}(t = ۰) = ۰$. . . . . . ۴۷

۱۰.۷ درایه‌ی صفرصفر ماتریس چگالی ($\rho_{۰۰}$) بر حسب زمان وقتی $\frac{l}{p} = \frac{۱}{۲}$، $l = ۰/۸$، $m = ۰/۴$ و $\rho_{۰۰}(t = ۰) = ۱$. . . . . . ۴۸

۱۱.۷ درایه‌ی یک‌یک ماتریس چگالی ($\rho_{۱۱}$) بر حسب زمان وقتی $\frac{l}{p} = \frac{۱}{۲}$، $l = ۰/۸$، $m = ۰/۴$ و $\rho_{۱۱}(t = ۰) = ۰$. . . . . . ۴۸

۱۲.۷ درایه‌ی صفرصفر ماتریس چگالی ($\rho_{۰۰}$) بر حسب زمان وقتی $\frac{l}{p} = \frac{۱}{۱۰}$، $l = ۰/۸$، $m = ۰/۴$ و $\rho_{۰۰}(t = ۰) = ۱$. . . . . . ۴۸

۱۳.۷ درایه‌ی یک‌یک ماتریس چگالی ($\rho_{۱۱}$) بر حسب زمان وقتی $\frac{l}{p} = \frac{۱}{۱۰}$، $l = ۰/۸$، $m = ۰/۴$ و $\rho_{۱۱}(t = ۰) = ۰$. . . . . . ۴۸

# فصل ۱

# مقدمه

هرگونه ذخیره‌سازی، انتقال و پردازش اطلاعات نیاز به یک حامل فیزیکی دارد. نظریه اطلاعات کوانتومی بر پایه‌ی این ایده که سامانه‌های [1] منفرد کوانتومی مانند: اتم‌ها، فوتون ها، الکترون‌ها و ... را می‌توان به عنوان حامل‌های اولیه‌ی اطلاعات مورد استفاده قرار دارد، استوار است. دو دلیل عمده جهت لزوم بررسی و تحقیق در زمین‌ی اطلاعات کوانتومی وجود دارد. از یک طرف واحدهای معمولی ذخیره‌سازی و پردازش اطلاعات در کامپیترهای کلاسیکی روز به روز کوچکتر می‌شوند به طوری که در آینده‌ی بسیار نزدیک ابعاد و مقیاس ترانزیستورها به مرز مقیاس نانو می‌رسد یعنی جایی که قوانین مکانیک کوانتومی حاکم هستند. از طرف دیگر امروزه امکان ذخیره‌سازی و دستکاری حالات منفرد کوانتومی توسط روش‌های پیچیده‌ی اپتیک کوانتومی و فیزیک حالت جامد فراهم آورده شده است.

درهم‌تنیدگی نوعی همبستگی است که فقط در سامانه‌های کوانتومی دیده می شود. به طوریکه دو ذره‌ی کوانتومی با آنکه خیلی از هم دورند باز هم یک همبستگی (کوانتومی) بین آنها می‌تواند وجود داشته باشد که این امر باعث می‌شود عمل اندازه گیری روی یکی بر دیگری تاثیر گذار باشد. به این همبستگی کوانتومی، درهم‌تنیدگی می‌گویند و نظیر کلاسیکی هم ندارد.

از طرف دیگر تحقیق و بررسی در زمینه‌ی علوم مرتبط با نانو از این لحاظ اهمیت دارد که دنیای نانو (دنیای مزوسکوپیک) پل ارتباطی بین دنیای میکروسکوپیک و ماکروسکوپیک است. بنابراین انتظار می‌رود در ابعاد نانو بتوان برخی از چهره های مکانیک کوانتومی را به کمیت‌های ماکروسکوپی مرتبط ساخت. از جمله این

[1] System

چهره‌ها درهم‌تنیدگی است. شاید تحقیق و بررسی درهم‌تنیدگی کوانتومی در ساختارهای نانو کلید گشایش رموز نهفته در این خاصیت مهم کوانتومی باشد.

در چندین دهه‌ی گذشته محققین بیشتر به بررسی درهم‌تنیدگی بین ذرات در فواصل دور می‌پرداختند. اما از دهه‌ی گذشته تا به حال مردم به سمت بررسی درهم‌تنیدگی در فواصل خیلی نزدیک (در مقیاس اتمی) روی آورده‌اند.

نقطه‌ی کوانتومی [۲] یکی از مناسب ترین گزینه‌ها برای بررسی میزان و انتقال درهم‌تنیدگی در فواصل بسیار نزدیک است. نقطه‌ی کوانتومی یک پتانسیل کاسه مانند است که می‌توان در آن تعداد معدودی الکترون را محبوس کرد یعنی دقیقا همانند یک اتم و به همین دلیل است که به آنها اتم‌های مصنوعی یا دست ساخت بشر نیز می‌گوییم.

یک روش معمول برای ساختن نقاط کوانتومی محدود کردن یک گاز الکترونی دو بعدی در یک نیمه‌رسانا است. این فرآیند محدودسازی، یک پتانسیل کاسه مانند ایجاد می کند که الکترون‌های رسانش در این پتانسیل حبس می‌شوند، لذا یک نقطه‌ی کوانتومی تشکیل می شود.

در این راستا ما نیز در این پایان‌نامه به بررسی و تحقیق خواص درهم‌تنیدگی و چگونگی انتقال و محاسبه‌ی میزان درهم‌تنیدگی در سامانه‌های متشکل از نقاط کوانتومی در حضور محیط و عامل خارجی مانند یک لیزر می‌پردازیم.

[۲] Quantum Dot

# فصل ۲

# درهم‌تنیدگی کوانتومی

## ۱.۲ مقدمه‌ای در مورد درهم‌تنیدگی کوانتومی

آنچه مکانیک کوانتومی را از مکانیک کلاسیک متمایز می‌کند **اصل عدم قطعیت** است و هر چیز تازه، متفاوت و عجیبی که در مکانیک کوانتومی پیدا می‌شود سرچشمه‌ی آن اصل عدم قطعیت هایزنبرگ است. خوب اصل عدم قطعیت چیست؟ اصل عدم قطعیت تعبیر اصل برهمنهی است (به کلمه‌ی "تعبیر" توجه کنید). یعنی این اصل بیان می‌کند که هرگاه تابع حالت سامانه برابر با برهمهنی دو بردار حالت دیگر باشد این برهمنهی به صورت یک عدم قطعیت در حالت سامانه تعبیر می‌شود. بدین‌گونه که اولا قبل از اندازه‌گیری بی‌معنی است حرف زدن در مورد حالت سامانه و دوما با قطعیت نمی‌توان گفت که: اگر روی سامانه اندازه‌گیری انجام دهیم، سامانه روی کدام حالت می‌افتد!

اما به این جواب در مورد سوال بالا توجه کنید: نمی‌توان دو تا مشاهده‌پذیر ناسازگار مانند تکانه و مکان را به طور همزمان و به طور دقیق اندازه‌گیری کرد. یعنی اگر یکی را دقیقا اندازه‌گیری کنید اطلاعات مربوط به دیگری را کاملا از دست می‌دهید و تحت هیچ شرایطی قادر به تعیین دیگری به طور دقیق نیستید ولی آیا چنین چیزی ممکن است! حتی آلبرت اینشتین تا آخر عمرش نپذیرفت! به کلمه‌ی "نمی‌توان" توجه کنید. در اینجا وقتی می‌گوییم نمی‌توان، فورا این نکته به ذهن خطور می‌کند که ما انسانها و تکنولوژی‌هایمان به دلیل برهمکنش با سامانه و خراب کردن سامانه به طور اجتناب‌ناپذیری نمی‌توانیم ولی یک موجود "غیر مادی و ماوراء طبیعی" می‌تواند! در حالی‌که آنچه هایزنبرگ بیان کرد این بود که: "بی‌معنی" است (به

کلمه‌ی ”بی‌معنی” توجه کنید) حرف زدن در مورد تعین کردن مقدار دو مشاهده‌پذیر ناسازگار به طور دقیق و همزمان. یعنی اینجا بحث توانایی نیست بلکه بحث این است که بی‌معنی است اگر ”بپرسیم”: آیا می‌توان دو مشاهده‌پذیر ناسازگار را به طور دقیق و همزمان اندازه‌گیری کرد؟ به بیان دیگر این سوال ”قابلیت اجرا” ندارد. دقیقا مثل این است که بگوییم: ”می‌توان” در هندسه‌ی تخت اقلیدسی مثلثی درست کرد که مجموع زوایای داخلی‌اش بزرگتر از ۱۸۰ درجه باشد. اما همانطور که می‌دانیم در هندسه‌ی تخت اقلیدسی بی‌معنی است حرف زدن در مورد مثلثی که مجموع زوایای داخلی آن بیشتر از ۱۸۰ درجه باشد، بلکه این کار قابلیت اجرا شدن ندارد. لذا اگر اصل عدم قطعیت پوچ و بی‌معنی است اصل مجموع زوایای داخلی یک مثلث از قبل‌تر پوچ و بی‌معنی بوده و لذا اصل عدم قطعیت اصلا چیز تازه‌ای نیست و اینشتین اول بایستی از هندسه‌ی اقلیدسی ایراد می‌گرفت!

حال **درهم‌تنیدگی** چیست؟ و آیا چیز تازه و متفاوتی است؟ اگر بله، پس طبق حرف‌های بنده باید ریشه در اصل عدم قطعیت داشته باشد!

درهم‌تنیدگی یک هم‌بستگی کوانتومی (بدین معنا که فقط در سامانه‌های کوانتومی تا به حال دیده شده است!) بین دو سامانه‌ی کوانتومی است. فرض کنید سامانه A با سامانه B درهم‌تنیده است و هر دو هم دو حالته بوده و بردار حالت کل دو سامانه $۱/\sqrt{۲}(|۱۲\rangle + |۲۱\rangle)$ است. حال این یعنی اینکه اگر روی سامانه A اندازه‌گیری انجام بدهیم و حالت مثلا $|۱\rangle$ را بدهد آنگاه حالت سامانه‌ی کل روی $|۱۲\rangle$ می افتد و لذا حالت سامانه B الزاما $|۲\rangle$ می‌شود. این یعنی درهم‌تنیدگی. چونکه حالت سامانه B وابسته به نتیجه‌ی اندازه‌گیری روی سامانه A است که یعنی سامانه‌های A و B با هم درهم‌تنیده هستند. حال اینجا، کاربرد اصل عدم قطعیت کجاست؟ جواب این است که اگر سامانه‌ی کل را به صورت S = A + B در نظر بگیریم، آنگاه می‌بینیم که اینجا حالت سامانه کل S به صورت $۱/\sqrt{۲}(|\alpha\rangle + |\beta\rangle)$ است که در آن $|\alpha\rangle = |۱۲\rangle$ و $|\beta\rangle = |۲۱\rangle$. حال دیدن کاربرد اصل عدم قطعیت واضح است. چون اصل عدم قطعیت در مورد این رابطه بیان می‌کند (یا به بیان دیگر تعبیر می‌کند): که سامانه‌ی S نه در حالت $|\alpha\rangle$ است و نه در حالت $|\beta\rangle$، بلکه در هر دو حالت است و با قطعیت نمی‌توان گفت که: اگر اندازه‌گیری انجام دهیم روی حالت مثلا

$|\alpha\rangle$ می‌افتد و تا قبل از اندازه‌گیری هم بی‌معنی است که در مورد حالت سامانه حرف بزنیم حتی این جمله که گفتم: "سامانه S در هر دو حالت است" درست نیست و فقط باید گفت: تا قبل از اندازه‌گیری حرف زدن در این مورد بی‌معنی است.

اصل تمیزناپذیری هم یک چیز دیگر تازه و متفاوت موجود در کوانتوم است که آن هم ریشه در اصل عدم قطعیت دارد که اینجا مجال صحبت کردن در این مورد نیست. در بخش بعد نامساوی بل را بررسی می‌کنیم. این نامساوی را بل در جواب ایرادهای اینشتین به مکانیک کوانتومی پیدا کرد و ثابت می‌کند که اگر فرض‌های اینشتین را به مکانیک کوانتومی بیفزاییم به تناقض می‌رسیم.

## ۲.۲ نامساوی بل

آلبرت اینشتین با مکانیک کوانتومی و فرمول بندی آن هیچ مشکلی نداشت. او فقط برداشتش از مکانیک کوانتومی متفاوت بود. اینشتین می گفت که: تابع چگالی احتمال که برابر است با $\psi(x,t)\psi^*(x,t)$ تابعی است همانند تابع چگالی توزیع ماکسول-بولتزمن. یعنی اینکه هر ذره ای که مثلا تابع موجش $\psi(x,t)$ است، این ذره در هر زمانی یک مکان مشخص دارد چه ما از این مکان خبر داشته باشیم چه نه. کار ما اینست که فرمولی بهتر و کاراتر از فرمول شرودینگر، که تحول $\psi(x,t)$ با زمان را می دهد، پیدا کنیم که مکان ذره را بر حسب زمان به طور دقیق بدهد، از اینرو متغیر پنهان را پیشنهاد داد. اما همانطور که گفتم مشکل بر سر دید و نگرش (کلاسیکی!) اینشتین است نه فرمول بندی شرودینگر و همین دید اشتباه او را به معرفی کردن متغیر پنهان سوق داد. اما از کجا می دانیم دید هایزنبرگ و طرفدارانش درست یا درست ترند از دید اینشتین و طرفدارانش. جواب این سوال را یک دانشمند به نام بل حدود پانزده سال بعد از اینکه اینشتین مقاله ای تحت عنوان مکانیک کوانتومی توصیف درستی از جهان را به ما به نمی دهد داد که به نامساوی بل مشهور است. جالب اینست که بل خودش ابتدا از طرفداران اینشتین بود. برای اثبات نامساوی بل به طریق زیر عمل می کنیم [۱].

فرض کنید یک منبع داریم که تعداد زیادی جفت الکترون هایی که بردار حالت آنها $|\psi\rangle = ۱/\sqrt{۲}(|۱۲\rangle -$

$|21\rangle)$ است. این دو الکترون یکی به سمت راست و دیگری به سمت چپ می رود. آلیس در سمت چپ و باب در سمت راست قرار دارد. لذا آلیس و باب هر کدام یک الکترون از هر جفت الکترون را دریافت می کنند و می توانند اسپین را در هر راستایی مانند $a$، $b$ و $c$. الکترون‌های دریافتی را به طریق زیر به سه گروه تقسیم می‌کنیم. مثلا اگر نتیجه اندازه‌گیری آلیس روی یک الکترون وقتی $\sigma_a$ (اسپین در راستای $a$ ) را اندازه‌گیری می کند برابر $+1$ و نتیجه $\sigma_b$ برابر $+1$ و نتیجه $\sigma_c$ برابر $-1$ باشد، می‌گوییم این الکترون به گروه $(a_+, b_+, c_-)$ تعلق دارد. باید تاکید کنیم که ما نمی‌گوییم که آلیس $\sigma_a$، $\sigma_b$ و $\sigma_c$ را به طور همزمان اندازه گیری می کند. مثلا اگر $\sigma_a$ را اندازه گیری کند دیگر هیچکدام از $\sigma_b$ و $\sigma_c$ را نمی تواند دقیقا اندازه گیری نمی کند، می دانید چرا؟ چون با اصل عدم قطعیت در تناقض است. ولی طبق اصل واقعیت می توان گفت که با وجود اصل عدم قطیت باز هم می توان گفت که مقادیر $\sigma_b$ و $\sigma_c$ مستقل از همدیگر مقطوعند ولی ما از آن ها خبر نداریم. از اینرو می توان حداقل آن ها را حدس زد. همچنین از آنجا که بردار حالت دو ذره را می دانیم لذا اگر ذره آلیس متعلق به گروه $(a_+, b_+, c_-)$ آنگاه ذره باب متعلق به گروه $(a_-, b_-, c_+)$ خواهد بود. $N_i$ را می گیریم تعداد جفت الکترون های اندازه گیری شده توسط آلیس و باب که متعلق به دو گروه مثلا $(a_+, b_+, c_-)$ و $(a_-, b_-, c_+)$ هستند. لذا می نویسیم

$$\begin{cases} N_1 & \rightarrow & (a_+, b_+, c_+), & (a_-, b_-, c_-) \\ N_2 & \rightarrow & (a_+, b_+, c_-), & (a_-, b_-, c_+) \\ N_3 & \rightarrow & (a_+, b_-, c_+), & (a_-, b_+, c_-) \\ N_4 & \rightarrow & (a_+, b_-, c_-), & (a_-, b_+, c_+) \\ N_5 & \rightarrow & (a_-, b_+, c_+), & (a_+, b_-, c_-) \\ N_6 & \rightarrow & (a_-, b_+, c_-), & (a_+, b_-, c_+) \\ N_7 & \rightarrow & (a_-, b_-, c_+), & (a_+, b_+, c_-) \\ N_8 & \rightarrow & (a_-, b_-, c_-), & (a_+, b_+, c_+) \end{cases} \tag{1.2}$$

حال اگر $p(a_+, b_+)$ احتمال این باشد که آلیس $\sigma_a = +1$ و باب نیز $\sigma_b = +1$ را بعد از اندازه گیری بدست آورند، آنگاه

$$p(a_+, b_+) = \frac{N_3 + N_4}{N_t}, \tag{2.2}$$

که در آن $N_t = \sum_i^8 N_i$ است. به طور مشابه بدست می آوریم که

$$p(a_+, c_+) = \frac{N_2 + N_4}{N_t}, \tag{3.2}$$

$$p(c_+, b_+) = \frac{N_3 + N_7}{N_t}. \qquad (۴.۲)$$

از آنجایی که $N_i \geq 0$، لذا داریم $N_3 + N_4 \leq (N_2 + N_4) + (N_3 + N_7)$ بنابراین از این می رسیم به نامساوی بل

$$p(a_+, b_+) \leq p(a_+, c_+) + p(c_+, b_+). \qquad (۵.۲)$$

باید اشاره کنیم که ما در اینجا از اصل موضعیت استفاده کردیم. در واقع اگر یک الکترون به گروه یک متعلق بوده و آلیس تصمیم بگیرد که $\sigma_a$ را اندازه بگیرد، نتیجه اندازه گیریش قطعا $+1$ خواهد بود مستقل از این واقعیت که باب می تواند در هر راستایی از $a$، $b$ یا $c$ اندازه گیری انجام دهد. حال از کوانتوم استفاده می کنیم برای حساب کردن $p(a_+, b_+)$، $p(a_+, c_+)$ و $p(c_+, b_+)$. بگذارید اول $p(a_+, b_+)$ را حساب کنیم. اگر با یک اندازه گیری $\sigma_a = +1$ را بدست آورد آنگاه حالت الکترون باب می افتد روی ویژه حالت $|-\rangle_a$ با ویژه مقدار $-1$. لذا طبق اصول مکانیک کوانتومی واضح است که با این بردار حالت احتمال اینکه باب با یک اندازه گیری $\sigma_b = +1$ را بدست آورد برابر است با $|\langle+||-\rangle_a|^2 = \sin^2(\frac{\theta_{ab}}{2})$، که در آن $\theta_{ab}$ زاویه بین محورهای $a$ و $b$ است. از آنجایی که آلیس $\sigma_a = +1$ را با احتمال $\frac{1}{2}$ بدست می آورد، لذا داریم

$$p(a_+, b_+) = \frac{1}{2} \sin^2(\frac{\theta_{ab}}{2}). \qquad (۶.۲)$$

به طریق مشابه $p(a_+, c_+)$ و $p(c_+, b_+)$ را نیز بدست می آوریم. بنابراین نامساوی بل (۱.۷) را می توان به این طریق زیر نوشت

$$\sin^2(\frac{\theta_{ab}}{2}) \leq \sin^2(\frac{\theta_{ac}}{2}) + \sin^2(\frac{\theta_{cb}}{2}). \qquad (۷.۲)$$

اگر ما محورهای $a$، $b$ و $c$ را طوری بگیریم که $\theta_{ab} = 2\theta$، $\theta_{ab} = \theta$، $\theta_{ab} = \theta$، در اینصورت این نامساوی به ازای $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ نقض می شود. لذا به این نتیجه می رسیم که اصولی که اینشتین به مکانیک کوانتومی افزود به تناقض می انجامد!!!

# فصل ۳

# فرایندهای تصادفی

## ۱.۳ فضای احتمال

در این فصل نظریه احتمال کلاسیک و فرایندهای تصادفی را توضیح می‌دهیم [۲]. فضای احتمال یک مفهوم بنیادی در نظریه‌ی احتمال است. فضای احتمال شامل دو قسمت است: فضای نمونه‌ی رخدادها، $\sigma-algebra$ ی رخدادها و اندازه‌گیری احتمال روی $\sigma-algebra$. این مفاهیم را در ادامه توضیح می‌دهیم. بیشتر مردم از تجربیاتشان یک برداشتی از احتمال دارند. اما به هر حال یک فرمولبندی دقیق مفاهیم شهودی همیشه مشکل بوده و معلوم شده که آسانترین راه این است که نظریه‌ی احتمال را به عنوان یک علم نظری بدیهی پایه‌گذاری کنیم که در آن یک اندازه‌گیری احتمال $P(A)$ به هر مجموعه‌ی $A$ ،در فضای رخدادها ،نسبت داده می‌شود. مجموعه‌ی تمام رخدادها را فضای نمونه که آن را $\Omega$ می‌نامند و مجموعه‌ی تهی را نیز با $\phi$ نشان می‌دهند. حال برای اینکه احتمال را تعریف کنیم لازم است که فضای نمونه‌ی ما تحت مجموعه‌ای از اعمال انجام شده روی آن بسته باشد که ریاضیدانان به این مفهوم $\sigma - algebra$، می‌گویند.

### ۱.۱.۳ اصول موضوعه یا بدیهیات احتمال

احتمال رخداد $A$، $P(A)$، را به عنوان تابعی از $A$ که بدیهیات احتمالی زیر را ارضا می‌کند معرفی می‌کنیم:

.۱

$$P(A) \geq 0 \qquad (۱.۳)$$

۲.

$$P(\Omega) = ۱ \tag{۲.۳}$$

۳. اگر $A_i$ ها مجموعه‌ای از مجموعه‌های بدون همپوشانی باشد بطوریکه

$$A_i \bigcap A_j = \phi \tag{۳.۳}$$

برای همه $i \neq j$، پس

$$P(\cup_i A) = \Sigma_i P(A_i). \tag{۴.۳}$$

این سه بدیهی همه‌ی بدیهیات لازم‌اند. البته متعاقبنا می‌توان دو اصل بدیهی دیگر از بدیهیات بالا استخراج کرد، که به صورت زیر است:

۴. اگر $B$ متمم مجموعه $A$ باشد آنگاه

$$P(B) = ۱ - P(A) \tag{۵.۳}$$

۵.

$$P(\phi) = ۰. \tag{۶.۳}$$

## ۲.۳ متغیر تصادفی

اگر $\Omega$ فضای نمونه، $R$ فضای اعداد حقیقی و $\omega$ عنصری از فضای نمونه باشد آنگاه متغیر تصادفی $X$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$X(\omega) : \Omega \to R \tag{۷.۳}$$

که به هر عنصری در فضای نمونه یک عدد $X(\omega)$ نسبت می‌دهد.