بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شیراز

دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی گرایش آنالیز

درونیابی چندگانه و توابع اکسترمال
در
فضای برگمن

توسط:
ابوالحسن فریدونی

استاد راهنما:
دکتر کاظم مصالحه

خرداد ۱۳۸۷

به نام خدا

درونیابی چند گانه و توابع اکسترمال در فضای برگمن

به وسیله‌ی:

ابوالحسن فریدونی

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته‌ی:

ریاضی-آنالیز

از دانشگاه شیراز

شیراز

جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: عالی.................................

دکتر کاظم مصالحه ، استادیار ریاضی(رئیس کمیته) ....

دکتر بهمن یوسفی، استاد ریاضی..

دکتر بهرام خانی رباطی ، دانشیار ریاضی..

اردیبهشت ماه 1387

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

با سپاس فراوان از استاد ارجمند جناب
آقای دکتر مصالحه و پدر و مادر عزیزم

چکیده

درونیابی چندگانه و توابع اکسترمال در فضای برگمن

بوسیله‌ی:

ابوالحسن فریدونی

در این پایان نامه پس از معرفی مفاهیم درونیابی ، توابع اکسترمال و چگالی دنباله‌ها، روابط بین درونیاب بودن یک دنباله و تابع اکسترمال آن با شرط $0 < P < \infty$، بیان می‌گردد.

شرط لازم و کافی برای درونیاب چندگانه بودن یک دنباله در فصل سه ارائه می‌گردد. روابط بین درونیابی و توابع هسته در همین فصل مشاهده می‌شود.

در فصل چهارم شرط نمونه گیری بودن یک دنباله در فضای F_{ϕ}^{p}، باشرط $0 < p < 1$ عرضه می‌شود.

فهرست مطالب

فصـــــل اول

مقــدمه

بخـش یک

تعـاریـف

تعریف ۱-۱-۱:

برای $0 < p < +\infty$ فضای برگمن A^p مجموعه توابع تحلیلی روی قرص $\boldsymbol{D}$ می‌باشد که

$$\|f\|_p^p = \frac{1}{\pi}\int_D |f(z)|^p \;\; dAz \quad < \infty$$

و $\boldsymbol{dA}$ نشان دهندهٔ اندازهٔ لبگ سطح می‌باشد.

تعریف ۱-۱-۲:

تبدیل مولیوس $\qquad \phi_a(z) = \dfrac{a-z}{1-\bar{a}z}$

تبصره ۱-۱-۳:

عملگر با تعریف زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \varepsilon_a :\; & A^2 \to \mathbb{C} \\ & f \mapsto f(a) \end{aligned}$$

ε_a یک عملگر خطی است.

با توجه به نتیجه $\boldsymbol{I.1.7}$ از [۱۸] اگر $\boldsymbol{L=\{a\}}$ ، آنگاه $\boldsymbol{L}$ یک مجموعه فشرده است در نتیجه

ثابت $\boldsymbol{C}$ وجود دارد که برای هر $f \in A^2$ خواهیم داشت

$$|f(a)| \leq \; C\|f\|$$

برای هر $f \in A^p$ خواهیم داشت

$$|\varepsilon_a(f)| \leq C\|f\|$$

که نشان می‌دهد ε_a عملگری کراندار است. با به کاربردن قضیه نمایش ریس تابع یکتایی $k_a \in A^p$ موجود است که

$$f(a) = \varepsilon_a(f) = < f, k_a >$$

تعریف ۱-۱-۴:

$k_a \in A^p$ را هسته باز تولید می‌نامیم و توجه می‌کنیم که برای هر $f \in A^p$،

$$.f(a) = < f, k_a >$$

تعریف ۱-۱-۵:

H^p مجموعه همه توابع تحلیلی روی قرص‌یکه $\boldsymbol{D}$ می‌باشد که نرم $\|.\|_{H^p}$ آن متناهی است یعنی

$$\|f\|_H^p = \lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^p d\theta < \infty$$

تعریف ۱-۱-۶:

دنبال $\Gamma = \{z_k\} \subseteq D$ یک دنباله درونیاب برای A^p نامیده می‌شود اگر برای هر دنباله مانند $\{w_k\}$ که در شرط زیر

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - |z_k|^2\right)^2 |w_k|^p < \infty$$

صدق کند، تابع $f \in A^p$ موجود باشد که برای هر $\boldsymbol{k}$ داشته باشیم:

$$.f(z_k) = w_k$$

تعریف ۱-۱-۷:

دنباله $\{z_k\} \subseteq D$ دنباله A^p – صفر نامیده می‌شود اگر تابعی غیر صفر مانند $f \in A^p$ موجود باشد که دقیقاً در z_k ها صفر شود. اگر یک عنصر در دنباله m بار تکرار شود f باید در آن نقطه صفری دقیقاً از مرتبه m داشته باشد. در این حالت تابع f را یک تابع A^p – صفر روی دنباله $\{z_k\}$ می‌نامیم.

تعریف ۱-۱-۸:

گوئیم f روی دنباله $\{z_k\}$ صفر می‌شود اگر برای هر k، $f(z_k) = 0$؛ که مرتبه صفر f در z_k برابر یا بیشتر از مرتبه تکرار z_k در دنباله است. در این تعریف f می‌تواند در هر جای دیگر نیز صفر شود.

تعریف ۱-۱-۹:

دنباله $\{z_k\} \subseteq D$ از نقاط غیرتکراری یک دنباله درونیاب چندگانه برای فضای A^p نامیده می‌شود اگر برای هر دنباله مانند $\left\{w_k = (w_k, \dots, w_k^{n-1})\right\}_{k=1}^{\infty}$ که در شرط زیر صدق کند

$$\sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|^2)^{2+lp} |w_k^l|^p < \infty$$

آنگاه تابع $f \in A^p$ موجود باشد که برای هر k داشته باشیم:

$$f^{(l)}(z_k) = w_k^l \qquad 0 \le l \le n-1$$

از این جا به بعد n را ثابت فرض می‌کنیم.

تعریف ۱-۱-۱۰:

دنباله A^p – صفر چندگانه مانند دنباله A^p – صفر تعریف می‌شود. برای هر k

$$f^{(l)}(z_k) = 0 \qquad 0 \le l \le n-1$$

$$f^{(n)}(z_k) \neq 0$$

تعریف ۱-۱-۱۱:

فضای برگمن وزن دار $A^2(w)$

A^2 با نرم $\|.\|_2$ و ضرب داخلی $<.,.>$ یک فضای هیلبرت است. با لحاظ کردن تابع تحلیلی و مثبت $w(z)$ در تعریف $\|.\|_2$ و $<.,.>$ (به صورت زیر) فضای وزن‌دار $A^2(w)$ را به دست می‌آوریم. w تابع وزن نامیده می‌شود.

$$\|f\|_2^2 = \int_D |f(z)|^2 w(z)\, dA(z)$$

$$< f, g >= \int_D f(z)\overline{g(z)} w(z)\, dA(z)$$

از ویژگی‌های خطی تابع مقدار یاب $\varepsilon_a : A^2(w) \to \mathbb{C}$، هستهٔ باز تولیدی $k_w(., a)$ به دست می‌آید.

$k_w(., a)$ وابسته به وزن w و نقطه a است و همچون قبل

$$f(a) = \langle f, k_W(., a) \rangle = \int_D f(z)\overline{k_W(z, a)}\, w(z)\, d(z)$$

در حقیقت تابع هسته در حالت کلی به صورت تابع دو متغیره به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$k_W : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$$

$$(b, a) \to k_W(b, a)$$

تعریف ۱-۱-۱۲:

اگر $A(n)$ و $B(n)$ توابعی برحسب n باشند، می‌نویسیم $A(n) \approx B(n)$ اگر $0<c$ یافت گردد که برای هر n نسبت‌های $A(n)$ به $B(n)$ و بالعکس از پایین توسط c کراندار باشند.

تعریف ۱-۱-۱۳ :

تابع h که روی D تحلیلی می‌باشد دارای خاصیت زیر میانگین موضعی[1] است اگر برای هر $z \in D$، $r_0 > 0$ موجود باشد به طوری که

$$h(z) \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z + re^{i\theta})\, d\theta$$

در جایی که $0 \le r < r_0$.

تعریف ۱-۱-۱۴:

به تابع حقیقی مقداری که دارای خاصیت مقدار زیر میانگین موضعی است تابع زیر توافقی[2] گفته می‌شود اگر روی D از بالا نیمه پیوسته باشد.

تعریف ۱-۱-۱۵:

برای تابع زیر توافقی ϕ ، F_ϕ^p مجموعه توابع تحلیلی روی D تعریف می‌شود که برای هر $f \in F_\phi^p$ داشته باشیم:

---

[1] - ***Local sub mean value property***

[2] - ***Sub harmonic***

$$\|f\|_{\phi,p}=\left\{\int_D |f(z)|^p \frac{e^{-\phi(z)}}{1-|z|^2}\,dA(z)\right\}^{\frac{1}{P}}<\infty$$

تعریف ۱-۱-۱۶:

f تابعی شعاعی نامیده می‌شود اگر $f(z)=f(|z|)$.

تعریف ۱-۱-۱۷:

متر شبه هذلولوی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho(z_1, z_2)=\left|\phi_{z_2}(z_1)\right|$$

تعریف ۱-۱-۱۸:

دنباله $\Gamma=\{z_k\}$ به طور یکنواخت مجزا نامیده می‌شود اگر $0<\delta$ موجود باشد به طوری که

$$\rho(z_j, z_k)\geq\delta \quad \forall k\neq j$$

تعریف ۱-۱-۱۹:

فرض کنیم $\Gamma=\{z_k\}$ دنباله‌ای به طور یکنواخت مجزا و $\frac{1}{2}<r<1$ باشد تعریف می‌کنیم:

$$D(\Gamma,r)=\frac{\sum_{|z_k|<r}(\log\frac{1}{|z_k|})}{\log\frac{1}{1-r}}$$

$D^+(\Gamma)$ را چگالی یکنواخت بالا می‌نامیم و بدین صورت تعریف می‌کنیم

$$D^+(\Gamma)=\limsup_{r\to 1}\ \sup_{\xi\in D} D\left(\phi_\xi(\Gamma),r\right)$$

و همین طور چگالی یکنواخت پائین

$$D^-(\Gamma)=\liminf_{r\to 1}\ \sup_{\xi\in D} D\left(\phi_\xi(\Gamma),r\right).$$

بخش دو

پیش نیازها

تبصره ۱-۲-۱:

$\|f\|_p$ همه خواص نرم را دارد: $\|\alpha f\|_p = |\alpha|\|f\|_p$ و برای $1 \leq p < \infty$ داریم : $\|f+g\|_p < \|f\|_p + \|g\|_p$؛ اما برای $0 < p < 1$ نامساوی مثلثی را با رابطه زیر جایگزین می‌کنیم.

$$\|f+g\|_p^p \leq \|f\|_p^p + \|g\|_p^p.$$

می‌بینیم که A^p یک فضای برداری (خطی) و نیز یک فضای متریک است.

تبصره ۱-۲-۲:

همگرایی با نرم $\|.\|_p$ همگرایی یکنواخت روی هر زیر مجموعه فشرده را نتیجه می‌دهد.

برهان:

اگر $\{f_n\} \subseteq A^p$ و $\|f_n - f\|_p \to 0$. با توجه نتیجه *I.1.7* از مرجع[۱۸] روی هر

مجموعه فشرده L عدد ثابت C موجود است به طوری که

که طرف چپ تعریف نرم همگرایی یکنواخت روی مجموعه فشردهٔ L است.

$$\sup_{z\in L}|f_n(z) - f(z)| \leq C\|f_n - f\|_p \to 0$$

یعنی در صورتیکه f_n به f با $\|.\|_p$ همگرا باشد با نرم همگرایی یکنواخت نیز روی L

همگراست.

گزاره ۱-۲-۳:

اگر $1 < p < \infty$, A^p یک فضای با ناخ است.

برهان: به [۷] مراجعه کنید.

گزاره ۱-۲-۴:

A^2 با ضرب داخلی زیر یک فضای هیلبرت است.

$$< f, g > = \frac{1}{\pi} \int_D f(z)\overline{g(z)}\, dA(z)$$

A^2 با متر $d_2(.,.) = \|.\|_2$ یک فضای با ناخ، در نتیجه یک فضای متریک کامل است.

مثال ۱-۲-۵:

برای فضای A^2 داریم $k_a(z) = \frac{1}{(1-\bar{a}z)^2}$.

گزاره ۱-۲-۶:

اگر $p \underset{\neq}{<} q$ آنگاه $A^q \underset{\neq}{\subset} A^{2p}$.

برهان: به [۷] مراجعه شود.

گزاره ۱-۲-۷:

$$H^p \subset A^p.$$

برهان: به [۷] مراجعه کنید.

تبصره ۱-۲-۸:

فرض می‌کنیم هیچ عضو دنباله درونیاب $\Gamma = \{z_k\}$ تکرار نمی‌شود.

نتیجه ۱-۲-۹:

هر زیر دنباله از یک دنباله درونیاب خود یک دنباله درونیاب است.

برهان: به [۷] نگاه کنید.

قضیه ۱-۲-۱۰:

هر زیر مجموعه از یک دنباله A^p − صفر(چندگانه) یک دنباله A^p − صفر (چندگانه) است.

برهان: به مرجع [۷] مراجعه کنید.

قضیه ۱-۲-۱۱:

دنباله Γ که شامل نقاط مجزای درون قرص یکه می‌باشد یک دنباله درونیاب برای فضای A^p است اگر و تنها اگر Γ به طور یکنواخت مجزا باشد و $D^+(\Gamma) < \frac{1}{p}$.

برهان: در [۲۱] موجود است.

تبصره ۱-۲-۱۲ :

$$\overline{k_w(b,a)} = <\overline{k_w(.,a)}, \ \overline{k_w(.,b)}> = \int_D \overline{k_w(z,a)\overline{k_w(z,b)}}w(z) \ dA(z) =$$

$$= \int_D k_w(z,b)\overline{k_w(z,a)}w(z) \ dA(z) = <k_w(.,b), k_w(.,a)> = k_w(a,b)$$

پس

$$\overline{k_w(b,a)} = k_w(a,b)$$

$$k_w(\xi,\xi) = < k_w(.,\xi), k_w(.,\xi) = \int_D k_w(z,\xi)\overline{k_w(z,\xi)}w(z)\ dA(z) =$$
$$= \int_D k_w(\xi,z)\overline{k_w(\xi,z)}w(z)\ dA(z) = \int_D |k_w(z,\xi)|^2\ w(z)\ dA(z)$$
$$= \|k_w(.,\xi)\|_2^2 > 0$$

در نتیجه

$$k_w(\xi,\xi) = \|k_w(.,\xi)\|_2^2 > 0 \qquad \square$$

قضیه ۱-۲-۱۳:

اگر $h:\Omega \to D$ تابع تحلیلی و همدیس باشد و k_w تابع هسته با وزن w برروی دامنه تابع h و $k_{w'}$ تابع هسته روی برد h با وزن w' باشد آنگاه

$$k_w(a,b) = \overline{h'(b)}k_{w'}\big(h(a),h(b)\big)\,h'(a)$$

برهان: به مرجع [۷] نگاه کنید.

قضیه ۱-۲-۱۴:

اجتماع تعداد متناهی دنباله درونیاب دنباله‌ای درونیاب است.

برهان: به [۷] مراجعه شود.

قضیه ۱-۲-۱۵:

خاصیت درونیابی دنباله ها تحت تبدیل موبیوس پایدار است.

برهان: اگر $\Gamma = \{z_k\}$ دنباله‌ای درونیاب باشد قرار می دهیم $\xi_k = \phi(z_k)$.

برای دنباله دلخواه $\{v_k\}$ فرض کنید

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-|\xi k|^2\right)^2 |v_k|^p < \infty \ \text{و}\quad w_k = v_k\phi'(z_k)^{\frac{2}{p}}$$

می‌دانیم $|\phi'(z)| = \dfrac{1-|\phi(z)|^2}{1-|z|^2} \neq 0$ پس

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|^2)^2|w_k|^P = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-|\phi(z_k)|^2}{|\phi'(z_k)|}\right)^2 \left|v_k\phi'(z_k)^{\frac{2}{P}}\right|^P =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(1-|\xi_k|^2)^2|v_k|^P < \infty$$

$\{z_k\}$دنباله‌ای درونیاب است پس $f \in A^P$ موجود است که برای هر $\{w_k\}$با شرط فوق، f تابع درونیاب $\{w_k\}$ است. g را به صورتی تعریف می کنیم که داشته باشیم

$$f(z) = g(\phi(z))\ \phi'(z)^{\frac{2}{P}}$$

بنابراین
$$f(z_k) = g(\phi(z_k))\ \phi'(z_k)^{\frac{2}{P}}$$

و
$$g(\xi_k) = \frac{w_k}{\phi'(z_k)^{\frac{2}{P}}} = v_k$$

از طرفی

$$\|g\|_P^P = \frac{1}{\pi}\int_D |g(z)|^P dA(z) = \frac{1}{\pi}\int_D |g(\phi(w))|^P\ |\phi'(w)|^2 dA(w)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_D \left| g(\phi(w))\phi'(w)^{\frac{2}{P}} \right|^P dA(w) = \frac{1}{\pi}\int_D |f(w)|^P dA(w)$$

$$= \|f\|_P^P < \infty$$

پس $\|g\|_P < \infty$ یعنی $g \in A^P$ و g برای دنباله $\{\xi_k\}$ یک تابع درونیاب است. اما از اینکه $\Gamma' = \phi(\Gamma)$، می‌توانیم بگوئیم خاصیت درونیابی دنباله ها تحت تبدیل موبیوس پایدار است.

□

فرمول ینسن ۱-۲-۱۶:

اگر $\Gamma = \{z_k\}$ صفرهای تابع تحلیلی f روی D باشد که $f(0) \neq 0$، آنگاه

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} log\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta = log|f(0)| + \sum_{\substack{|w|<r \\ w\in\Gamma}} log\frac{r}{|w|}$$

$\sum$ روی اعضای $w \in \Gamma$ انجام می‌شود که درون قرص باز به شعاع r قرار دارند.

لم ۱-۲-۱۷:

اگر Λ دنباله‌ای از نقاط درون حلقه $\{a < |z| < 1\}$ باشد و $D^+(\Lambda) < \alpha$، آنگاه تابع تحلیلی g روی قرص یکه وجود دارد که g روی Λ صفر می‌شود و $g(0)=1$. ثابت c وابسته به α و $D^+(\Lambda)$ یافت می‌شود که

$$|g(z)| \leq c\left(1 - |z|^2\right)^{-\alpha}$$

برهان: به [۲۴] نگاه کنید.

البته در [۲۵] نسخه دیگری از این لم موجود است.

نکته ۱-۲-۱۸:

$$\left|\phi_z(\xi)\right| = \left|\phi_\xi(z)\right| \quad \text{و} \quad \left|\phi_{\phi_\xi(z)}(w)\right| = \left|\phi_{\phi_\xi(w)}(z)\right|$$

برهان: به [۷] مراجعه شود!

لم ۱-۲-۱۹:

اگر Γ دنباله‌ای به طور یکنواخت مجزا باشد و $a \in R$. ثابت C وابسته به p و a و Γ موجود است که

$$\sum_{z_n \in \Omega} \left(1-\left|z_k\right|^2\right)^a \left|f(z_k)\right|^p \leq C' \int_{p(z,\Omega)<\delta(\Gamma)} \left|f(z)\right|^p \left(1-\left|z_k\right|^2\right)^{a-2} dA(z)$$

که Ω زیر مجموعه‌ای اندازه پذیر از D و f تابع تحلیلی است و $\delta(\Gamma) = \inf_{j \neq k} \rho(z_j, z_k)$.

برهان: به [۲۴] نگاه کنید.

فصل دو

تابع اکسترمال و درونیابی