دانشگاه مازندران

دانشکده علوم پایه

عنوان:

روش های آنالیز غیر خطی برای حل برخی از مسائل مقدار مرزی شامل عملگر $p-$لاپلاسین

جهت اخذ درجه دکتری

(ریاضی محض، گرایش آنالیز غیر خطی کاربردی)

استاد راهنما:

پروفسور قاسم علیزاده افروزی

اساتید مشاور:

دکتر حسین ترابی تهرانی

(عضو هیئت علمی دانشگاه نوادا)

دکتر علی تقوی

نگارش :

سید هاشم رسولی

خرداد ۱۳۸۸

چکیـده

در این پایان نامه، با سه روش مفید از آنالیز تابعی غیر خطی به بررسی وجود جواب مثبت برای برخی از مسائل مقدار مرزی شامل عملگر $p-$لاپلاسین می پردازیم. به عبارت دقیقتر، ابتدا وجود جواب های مثبت، برای مسئله مقدار مرزی غیر خطی

$$\begin{cases} -\Delta_p u = g(x,u) & in\,\Omega, \\ u = 0 & on\ \partial\Omega, \end{cases}$$

را با استفاده از روش جواب های بالایی و پایینی مورد تجزیه و تحلیل قرار می دهیم، جایی که Ω یک دامنه کراندار درR^n ، $\partial\Omega$ از رده C^2 و Δ_p عملگر $p-$لاپلاسین($p > 1$) می‌باشد، که به صورت زیر تعریف می شود :

$$\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u).$$

سپس با استفاده از قضیه نقطه ثابت شودر(Schouder fixed point theorem) ، وجود جواب‌های مثبت برای رده‌ای از دستگاه‌های $p-$لاپلاسین با پارامترهای چندگانه به صورت زیر را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda_1 f(v) + \mu_1 h(u) & in\,\Omega, \\ -\Delta_q v = \lambda_2 g(u) + \mu_2 k(v) & in\,\Omega, \\ u = 0 = v & on\,\partial\Omega. \end{cases}$$

سرانجام با استفاده از روش های تغییراتی به بررسی وجود جواب برای یک رده از مسائل مقدار مرزی با شرایط مرزی غیر خطی به صورت زیر

$$\begin{cases} -\Delta_p u + m(x)\,|u|^{p-2}u = \lambda\, a(x)|u|^{q-2}u, & x \in \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial n} = b(x)|u|^{r-2}u, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

و همچنین برای رده‌ای از دستگاه‌های $p-$لاپلاسین با پارامترهای چندگانه و شرایط مرزی غیر خطی به شکل

$$\begin{cases} -\Delta_p u + m(x)\,|u|^{p-۲}u = \lambda\,|u|^{\gamma-۲}u + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\,c(x)\,|u|^{\alpha-۲}\,u\,|v|^{\beta}, & x \in \Omega, \\ -\Delta_p v + m(x)\,|v|^{p-۲}v = \mu\,|v|^{\gamma-۲}v + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\,c(x)\,|u|^{\alpha}\,|v|^{\beta-۲}\,v, & x \in \Omega, \\ u = \circ = v, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

خواهیم پرداخت .

فهرست مندرجات

مقدمه

« مسائل دنیای واقعی ماهیت غیرخطی دارند. به این دلیل روشهای آنالیز غیرخطی ابزارهای مهم مدلسازی ریاضیات نوین هستند. »

آنالیز غیر خطی یکی از جذاب ترین و پرکاربردترین شاخه های آنالیز ریاضی است که در دهه های پایانی این قرن توسعه‌ی فراوانی یافته است. نتایج پرشمار در این زمینه و کاربرد آن در مسائل مختلف مهندسی، فیزیکی، بهینه سازی، اقتصادی و علوم زیستی گواه این مطلب است. در واقع در مدل سازی پدیده‌های طبیعی پیچیده به مسائل مقدار مرزی غیرخطی می‌رسیم و لذا بررسی وجود جواب اینگونه از مسائل امروزه بعنوان یکی از دغدغه‌های اصلی آنالیزدانان درآمده است. آنالیز غیرخطی با سه روش عمده‌ی یکنوایی، توپولوژیکی و تغییراتی به بررسی اینگونه از مسائل می پردازد.

در این پایان نامه بااستفاده از روشهای آنالیز غیرخطی به بررسی وجود جواب برای برخی از مسائل مقدار مرزی می‌پردازیم. به عبارت دقیقتر پس از یادآوری تعاریف، قضایا و مقدمات لازم در فصل اول، در فصل‌های دوم، سوم و چهارم به ترتیب با استفاده از روش جواب‌های بالایی و پایینی، روش نقطه‌ی ثابت و روش تغییراتی به مطالعه‌ی وجود جواب‌های مثبت برای رده‌ای از مسائل مقدار مرزی خواهیم پرداخت.

فصل ۱

تعاریف، مفاهیم و قضایای مقدماتی

در این فصل به معرفی مفاهیم ابتدایی که در سراسر این پایان‌نامه مورد استفاده قرار می‌گیرند، می‌پردازیم. ابتدا معادلات دیفرانسیل جزیی و برخی کاربردهای آن را معرفی می‌کنیم، سپس عملگر بیضوی را تعریف نموده و مروری گذرا بر فضاهای باناخ، هیلبرت، L^p، سوبولوف و قضایای مرتبط با آنها خواهیم داشت.

۱.۱ تعاریف و مفاهیم پایه‌ای

تعریف ۱.۱.۱ (**معادله دیفرانسیل**)

هر معادله شامل یک متغیر وابسته و مشتقاتش نسبت به یک یا چند متغیر مستقل را معادله دیفرانسیل گویند. معادلات دیفرانسیل کاربرد زیادی در ریاضیات، فیزیک، مهندسی، اقتصاد و بسیاری از زمینه های دیگر علوم دارند.

تعریف ۲.۱.۱ (**معادله دیفرانسیل جزیی**)

هر رابطه بین متغیرهای مستقل $x_1, ..., x_n$ و متغیرهای تابع u و مشتقات متغیر تابع نسبت به متغیرهای مستقل را یک معادله دیفرانسیل جزیی گویند. اگر $u = f(x_1, ..., x_n)$ یک تابع چند متغیره باشد، مشتق مرتبه kام u نسبت به مولفه x_i را به صورت $\frac{\partial^k u}{\partial x_i^k}$ نشان می‌دهیم، هرگاه بزرگترین مرتبه مشتق ظاهر شده k باشد، معادله دیفرانسیل از مرتبه k است.

تعریف ۳.۱.۱ (**دامنه**)

فرض کنیم R^n فضای اقلیدسی n—بعدی $(n \geq 2)$ با نقاط $(x_1, ..., x_n)$ که $x_i \in R$ و $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ باشد. در این صورت $\Omega \subset R^n$ را یک دامنه گوییم هرگاه باز و همبند باشد.

تعریف ۴.۱.۱ :

مجموعه همه توابع پیوسته روی Ω را با $C(\Omega)$ نشان می‌دهیم . برای $k \in N$، $C^k(\Omega)$ نشاندهنده توابعی هستند که همه مشتقات تا مرتبه kـام آنها روی Ω پیوسته است. $C^\infty(\Omega)$ کلاس همه توابعی هستند که برای هر عدد طبیعی k متعلق به $C^k(\Omega)$ باشد. $C^k(\bar{\Omega})$ مجموعه توابعی در $C^k(\Omega)$ است که تمام مشتقات نابیشتر از k آنها به طور پیوسته به $\bar{\Omega}$ توسیع می‌یابند.

تعریف ۵.۱.۱ :

محمل یک تابع پیوسته f روی R^n به صورت زیر تعریف می شود:

$$supp\, f = \overline{\{x \in R^n :\ f(x) \neq \circ\}} = K$$

یعنی برای هر $x \in R^n$ اگر x عضو K نباشد آنگاه $f(x) = \circ$. همان طور که می دانیم (طبق قضیه هاینه برل) مجموعه های بسته و کراندار در R^n فشرده می باشند بنابراین اگر محمل f کراندار باشد می گوییم f دارای محمل فشرده است. فضای همه توابع پیوسته f که محمل فشرده دارند را با $C_\circ(R^n)$ نمایش می دهیم. مشابهاً $C_\circ(\Omega)$ نشاندهنده توابع پیوسته روی Ω می باشد که محمل آنها یک زیرمجموعه فشرده از Ω است. همچنین $C_\circ^k(\Omega)$ نیز به طریق مشابه قابل تعریف است.

تعریف ۶.۱.۱ (تابع آزمون)

تابع f، تعریف شده روی مجموعه باز غیر تهی $\Omega \subset R^n$ را یک تابع آزمون نامند هرگاه $f \in C^\infty(\Omega)$ و یک مجموعه فشرده مانند $K \subset \Omega$ موجود باشد به طوری که محمل f در K قرار داشته باشد. مجموعه تمام این توابع را با $C_\circ^\infty(\Omega)$ نشان می دهند.

تعریف ۷.۱.۱ (مجموعه های اندازه پذیر و توابع اندازه پذیر)

فرض می کنیم Ω یک دامنه در R^n و μ اندازه لبگ در R^n باشد. مجموعه هایی که روی آنها μ خوش تعریف است را مجموعه های اندازه پذیر می نامیم. توابع f را که برای آنها مجموعه$\{x \in R^n : f(x) < \alpha\}$ برای هر α حقیقی یک مجموعه اندازه پذیر باشد توابع اندازه پذیر می نامیم.

تعریف ۸.۱.۱ (فضای $L^p(\Omega)$)

فرض کنید Ω یک دامنه کراندار در R^n و p یک عدد حقیقی مثبت باشد و همچنین u یک تابع اندازه پذیر و تعریف شده روی Ω باشد. تعریف می کنیم:

$$\|u\|_p = \{\int_\Omega |u(x)|^p dx\}^{\frac{1}{p}}$$

در این صورت $L^p(\Omega)$ را متشکل از همه u هایی می گوییم که برای آنها داشته باشیم:

$$\|u\|_p < \infty$$

$\|u\|_p$ را نرم L^p تابع u می نامیم. در $L^p(\Omega)$ توابعی را یکی می گیریم که به طور تقریباً همه جا با هم برابر باشند، یعنی اندازه نقاطی که با هم برابر نیستند برابر با صفر باشد. می گوییم $u = 0$ در $L^p(\Omega)$ اگر $u(x) = 0$ به طور تقریباً همه جا در Ω. بعلاوه $L^p(\Omega)$ یک فضای برداری است.[۶۹]

قضیه ۹.۱.۱ (نامساوی هولدر) [۱]

اگر $1 < p < \infty$، $u \in L^p(\Omega)$، $v \in L^q(\Omega)$ و $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$، آنگاه $uv \in L^1(\Omega)$ و نیز

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

قضیه ۱۰.۱.۱ (نامساوی مینکوفسکی) [۱]

اگر $1 < p < \infty$، $u, v \in L^p(\Omega)$، آنگاه $u + v \in L^p(\Omega)$ و نیز

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p.$$

قضیه ۱۱.۱.۱ (نامساوی یانگ) [۱]

فرض کنیم p و q اعداد حقیقی مثبتی باشند بطوریکه $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. هر گاه $a \geq 0$ و $b \geq 0$ آنگاه

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

تعریف ۱۲.۱.۱ (انتگرال پذیری موضعی تابع f روی دامنه Ω)

مجموعه همه توابع تعریف شده روی قلمرو Ω که انتگرال شان تعریف شده و متناهی باشد را توابع انتگرال پذیر می نامیم. اغلب اوقات با توابعی که به طور موضعی انتگرال پذیر هستند روبرو می شویم یعنی توابعی که روی هر زیر مجموعه فشرده از Ω انتگرال پذیر هستند و لزومی ندارد که روی خود Ω انتگرال پذیر باشند. مجموعه همه چنین توابعی را با $L^1_{loc}(\Omega)$ نشان می دهیم.

تعریف ۱۳.۱.۱ (سوپریمم اساسی)

فرض کنید u یک تابع اندازه پذیر روی Ω باشد. می گوییم u به طور اساسی کراندار است هر گاه یک ثابت $\alpha \in R$ وجود داشته باشد به طوری که رابطه $|u(x)| \leq \alpha$ به طور تقریباً همه جا

در Ω برقرار باشد. به بزرگترین کران پایین (اینفیمم) چنین α هایی سوپریمم اساسی می گوییم و آن را با نماد زیر نشان می دهیم:

$$ess\ sup_{x\in D}|u(x)| = inf\{\alpha :\ \mu(\{x : |u(x)| > \alpha\}) = 0\}$$

تعریف ۱۴.۱.۱ (فضای $L^\infty(\Omega)$)

$L^\infty(\Omega)$ فضای برداری متشکل از همه توابعی است که سوپریمم اساسی آنها متناهی باشد. نرم در این فضا به صورت زیر تعریف می شود:

$$||u||_\infty = ess\ sup_{x\in D}|u(x)|$$

تعریف ۱۵.۱.۱ (فضای $L^p_{loc}(\Omega)$)

برای $1 \leq p < \infty$، $L^p_{loc}(\Omega)$ عبارت است از توابع حقیقی مقدار و اندازه پذیر u روی Ω به طوری که برای هر زیر مجموعه فشرده K از Ω داشته باشیم:

$$\int_K |u(x)|^p dx < \infty$$

۲.۱ فضاهای باناخ و هیلبرت

تعریف ۱.۲.۱ (فضای خطی نرمدار و باناخ)

فضای برداری X را یک فضای خطی نرمدار نامیم هر گاه نرم روی X که با نگاشت

$$\begin{cases} P : X \to R \\ x \mapsto \|x\| \end{cases}$$

معرفی می شود دارای شرایط زیر باشد:

۱) $\circ \leq \|x\|$ برای هر $x \in X$ و $\|x\| = \circ$ اگر و تنها اگر $x = \circ$،

۲) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ برای هر $x \in X$ و هر $\alpha \in R$،

۳) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ برای هر $x, y \in X$.

یک فضای نرمدار خطی X، تحت متر تعریف شده‌ی زیر یک فضای متریک می باشد:

$$d(x, y) = \|x - y\| \qquad ; \qquad \forall x, y \in X$$

در نتیجه یک دنباله $\{x_n\} \subset X$ همگرا به عنصر $x \in X$ است، هر گاه

$$\|x_n - x\| \to \circ$$

همچنین $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است هر گاه $\|x_m - x_n\| \to \circ$ وقتی که $m, n \to \infty$. هر فضای باناخ یک فضای خطی نرمدار است که با متر تعریف شده به وسیله نرمش تام (کامل) باشد یعنی هر دنباله کوشی در X با متر تعریف شده به وسیله نرمش به نقطه ای از X همگرا باشد.

تعریف ۲.۲.۱ (فضای ضرب داخلی و هیلبرت)

فضای برداری (حقیقی) H را یک فضای ضرب داخلی نامیم هر گاه به هر زوج مرتب از بردارهای x, y در H یک عدد حقیقی مانند $< x, y >$ به نام حاصلضرب داخلی x, y چنان مربوط شده باشد که قواعد زیر برقرار باشند:

۱) برای هر $x, y \in H$ ، $< x, y >=< y, x >$،

۲) برای هر $\lambda_۱, \lambda_۲ \in R$ و هر $x_۱, x_۲, y \in H$ داشته باشیم:

$$< \lambda_۱ x_۱ + \lambda_۲ x_۲, y >= \lambda_۱ < x_۱, y > + \lambda_۲ < x_۲, y >$$

۳) برای هر $x \in H$ ، $< x, x > \geq ۰$ ،

۴) $x = ۰$ اگر و تنها اگر $< x, x >= ۰$.

بنابر خاصیت (۳) می توان $\|x\|$ یعنی نرم بردار $x \in H$ را ریشه دوم نامنفی $< x, x >$ تعریف کرد. یعنی:

$$\|x\| =< x, x >^{\frac{۱}{۲}} \qquad ; \qquad \forall x \in H$$

در این صورت به وضوح شرایط (۱) و (۲) در تعریف ۱.۲.۱ برقرارند. برای اثبات نامساوی مثلثی مطابق نامساوی کوشی—شوارتز به ازای هر $x, y \in H$ داریم:

$$| < x, y > | \leq \|x\| \|y\|$$

و همچنین با کمک نامساوی $< x, y > \leq | < x, y > |$ به دست خواهیم آورد:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^۲ &= < x + y, x + y >= \|x\|^۲ + ۲ < x, y > + \|y\|^۲ \\ &\leq (\|x\| + \|y\|)^۲ \end{aligned}$$

پس:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

بنابراین تمام اصول موضوع یک فضای نرمدار خطی برقرار می باشد لذا یک فضای ضرب داخلی H، یک فضای نرمدار خطی نیز است. هر گاه این فضای ضرب داخلی تام باشد آنرا یک فضای هیلبرت می گویند.

قضیه ۳.۲.۱ (کامل بودن $L^p(\Omega)$)

$L^p(\Omega)$ به ازای $1 \leq p < \infty$ و هر دامنه‌ی Ω در R^n یک فضای باناخ است، بعلاوه اگر $p = 2$، آنگاه $L^2(\Omega)$ یک فضای هیلبرت با ضرب داخلی زیر می باشد:

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega u\, v\, dx.$$

۳.۱ عملگرهای بیضوی، اتحادهای گرین و قضیه دیورژانس

تعریف ۱.۳.۱ (بردار گرادیان)

اگر u در R^n تعریف شده باشد گرادیان u در $x = (x_1, ..., x_n)$ برداری است در R^n که با $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n})$ تعریف می شود.

تعریف ۲.۳.۱ (دیورژانس)

اگر $u = (u_1, ..., u_n)$ یک میدان برداری باشد دیورژانس u در $x = (x_1, ..., x_n)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$div\, u = \nabla . u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial u_n}{\partial x_n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$$

تعریف ۳.۳.۱ (عملگرهای بیضوی)

فرض کنید Ω یک ناحیه هموار و کراندار در R^n باشد.

مسئله‌ای به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} Lu(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ Bu(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \qquad (1.1)$$

که در آن عملگر دیفرانسیلی L به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L = -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\partial_i\partial_j + \sum_{i=1}^{N} a_i\partial_i + c \qquad (2.1)$$

عملگر فوق را در نقطه $x = (x_1, ..., x_N) \in \Omega$ بیضوی گوییم اگر و تنها اگر ضریب مثبت $\mu(x)$ موجود باشد به طوریکه

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \mu(x)\sum_{i=1}^{N}\xi_i^2$$

برای هر بردار حقیقی $(\xi_1, ..., \xi_N)$.

عملگر L را بر Ω بیضوی گوییم هرگاه بر هر نقطه از Ω بیضوی باشد.

همچنین این عملگر را بیضوی یکنواخت می‌نامیم اگر در هر نقطه از Ω بیضوی باشد و یک ثابت μ_0 موجود باشد به طوری که $\mu(x) \geq \mu_0$ برای هر $x \in \Omega$.

عملگر بیضوی یکنواخت L را از نوع دیورژانس گوییم اگر

$$L(u) = \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}u)cu$$

با ضرایب کراندار $a_{ij} = a_{ji}$ باشد.

فرض کنید ضرایب L یعنی a_{ij}، a_i و c همگی در $C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ باشند.

عملگر مرزی B به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B = b_{0} + b_{1}\frac{\partial}{\partial n}$$

تعریف می‌شود که در آن $\frac{\partial}{\partial n}$ بیانگر مشتق در جهت بردار یکه نرمال خارجی بر Ω می‌باشد. در حالتی که $b_1 = 0$ و $b_0 = 1$ عملگر (۱.۱) را یک معادله بیضوی با شرط مرزی دیریکله، $b_1 = 1$ و $b_0 = 1$ عملگر (۱.۱) را یک معادله بیضوی با شرط مرزی نیومن و اگر $b_1 = 1$ و $b_0 \in R$ آن را یک معادله بیضوی با شرط مرزی نوع سوم یا رابین گوییم.

تعریف ۴.۳.۱ (عملگر لاپلاسین)

عملگر $L = \Delta$ را عملگر لاپلاس می‌نامیم اگر در معادله (۲.۱) داشته باشیم:

$$a_{ij} = \delta_{ij}, \qquad a_i = 0, \qquad c = 0.$$

همچنین عملگر لاپلاس را می‌توان به صورت $\Delta u = div(\nabla u)$ تعریف کرد.

تعریف ۵.۳.۱ (عملگر p−لاپلاسین)

عملگر $L = \Delta_p$ را عملگر p−لاپلاس برای $1 < p < \infty$ گوییم اگر:

$$L(u) = \Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$$

باشد. به سادگی می توان دید که Δ_p یک عملگر بیضوی است.

تعریف ۶.۳.۱ (مشتق در جهت بردار واحد)

فرض کنید u در R^n تعریف شده است مشتق u در جهت بردار واحد $\vec{n}$ در نقطه $p_\circ \in R^n$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\frac{\partial u}{\partial n_\circ}|_{p_\circ} = (\nabla u)_{p_\circ}.\vec{n}$$

که در آن (.) نشانگر ضرب داخلی دو بردار در فضای R^n است.

قضیه ۷.۳.۱ (دیورژانس)

فرض کنید $\vec{v} = (v_1, ..., v_n)$ یک میدان برداری روی $\Omega \subset R^n$ باشد به طوری که $\vec{v} \in C^1(\bar{\Omega}, R^n), v_j \in C^1(\bar{\Omega})$ آنگاه:

$$\int_{\partial\Omega} \vec{v}.\vec{n}\, ds = \int_{\Omega} div\vec{v}\, dx$$

که در آن $\vec{n}$ یک بردار نرمال برونسوی عمود بر سطح $\partial\Omega$ و ds نمایش دهنده عنصر $(n-1)-$ بعدی در $\partial\Omega$ می باشد. به ویژه اگر u یک تابع در $C^2(\bar{\Omega})$ باشد با جایگذاری $\vec{v} = \nabla u$ در رابطه فوق داریم:

$$\int_{\Omega} \Delta u\, dx = \int_{\partial\Omega} \nabla u.n\, ds = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds$$

تعریف ۸.۳.۱ (اتحادهای گرین)

فرض کنید $\Omega \subset R^n$ یک دامنه کراندار با مرز هموار و $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$ باشد آنگاه اگر در قضیه دیورژانس قرار دهیم $\vec{v} = v\,\nabla u$، اتحاد اول گرین به صورت زیر به دست می آید:

$$\int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = \int_{\Omega} (v\Delta u + \nabla u.\nabla v)\, dx,$$

اگر در اتحاد اول گرین $u = v$ باشد داریم:

$$\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = \int_{\Omega} (u\Delta u + |\nabla u|^2)\, dx,$$

حال اگر $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ و روی Ω، $\Delta u = 0$ و همچنین داشته باشیم $u = 0$ یا $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ روی $\partial\Omega$، آنگاه $|\nabla v| = 0$، یعنی u در Ω ثابت است. اگر در اتحاد اول گرین $v = 1$ باشد داریم:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = \int_{\Omega} \Delta u\, dx,$$

با تعویض کردن v, u در اتحاد اول گرین و کم کردن این دو رابطه اتحاد دوم گرین به صورت زیر به دست می آید:

$$\int_{\partial\Omega} (v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n})\, ds = \int_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v)\, dx,$$

۴.۱ فضاهای سوبولف

فرض کنید $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ یک $n-$ تایی از اعداد صحیح نامنفی α_i باشد در این صورت α یک چند اندیس نامیده می‌شود و تعریف می‌کنیم:

$$|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n \qquad , \qquad \alpha! = (\alpha_1)!...(\alpha_n)!.$$