وزارت علوم و تحقیقات و فناوری
دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)
دانشکدۀ علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامۀ کارشناسی ارشد رشتۀ ریاضی محض
گرایش هندسه

عنوان

خمینه های ریمانی با انحنای منفی غیر ثابت و نقص همگنی کوچک

استاد راهنما
دکتر رضا میرزایی

استاد مشاور
دکتر عبدالرحمن رازانی

توسط
حسن زیرک کلیشمی

دی ۱۳۹۰

چکیده

در این رساله فرض می کنیم که M یک $G-C_k$–منیفلد با انحنای منفی و $k \leq ۲$ و $M^G \neq \emptyset$ است. سپس M را از نقطه نظر توپولوژیکی بررسی می کنیم. همچنین نشان می دهیم که اگر M یک $G-C_۱$–منیفلد با انحنای منفی باشد و $dimM \geq ۳$، آنگاه M با $R^k \times T^r$ دیفئومرفیک است یا $\pi_۱(M) = Z$ و مدارهای اصلی با $S^{n-۲} \times R$ پوشانده می شوند. در آخر ثابت می کنیم که اگر M یک $G-C_۲$–منیفلد با انحنای منفی، همبند ساده نباشد و همچنین $M^G \neq \emptyset$، آنگاه M با $S^۱ \times R^{n-۱}$ یا $B^۲ \times R^{n-۲}$ دیفئومرفیک می باشد، که در آن $B^۲$ نوار موبیوس است.

کلمات کلیدی: منیفلد ریمانی، گروه لی، انحنای مقطعی.

مقدمه

فرض کنیم M یک منیفلد ریمانی کامل و G زیرگروه لی بسته و همبند از گروه ایزومتری ها باشد. مدار شامل x را به صورت $G(x)=\{gx : g\in G\}$ تعریف می کنیم که به وضوح یک منیفلد است. اگر m برابر با بیشترین بعد این مدارها باشد، تفاضل بین بعد M و m را که با k نشان می دهیم، نقص همگنی G روی M می نامیم و M را $G-C_k$–منیفلد می نامیم. $G-C_0$–منیفلد، G–منیفلد همگن می باشد. G–منیفلدهای همگن از نقطه نظرهای گوناگونی مورد بررسی قرار گرفته اند. کوبایاشی [1] ثابت کرد که منیفلدهای همگن با انحنای منفی همبند ساده هستند. بنابراین با R^n دیفئومرفیک می باشند. اما این حقیقت در مورد منیفلدها با نقص همگنی بالاتر صدق نمی کند. مطالعه $G-C_2$–منیفلدها در حالت کلی یک مسئله باز است. الکسیوسکی [2] منیفلدهای فشرده با نقص همگنی دو را از نقطه نظر جبری بررسی کرده است. پودستا[3] و اسپیرو[4] نتایج جالبی در باره $G-C_1$–منیفلدها با انحنای منفی بدست آوردند. آن ها ثابت کردند که اگر M یک $G-C_1$–منیفلد با انحنای منفی و با بعد بزرگتر یا مساوی سه باشد، آنگاه M با $R^k\times T^r$ دیفئومرفیک است یا $\pi_1(M)=Z$ و مدار های اصلی با $S^{n-2}\times R$ پوشانده می شود.

ما $G-C_2$–منیفلدهای با انحنای منفی را مورد بررسی قرار می دهیم و ثابت می کنیم که تحت شرایطی M با $S^1\times R^{n-1}$ یا $B^2\times R^{n-2}$ دیفئومرفیک می باشد.

در فصل اول این پروژه ابتدا با تعاریف و قضایای مقدماتی که در فصل های آتی مورد استفاده قرار

---

[1] Kobayashi

[2] Alekseevesky

[3] Podesta

[4] Spiro

می گیرند، آشنا می شویم. در فصل دوم منیفلد ریمانی از نقص همگنی یک را بررسی می کنیم و به نتایجی که از پودستا و اسپیرو مطرح شد، می پردازیم. فصل سوم در رابطه با نقص همگنی روی R^m می باشد. در فصل آخر که هدف نهایی این رساله می باشد، منیفلدهای ریمانی با نقص همگنی دو و انحنای منفی را مورد مطالعه قرار می دهیم که برگرفته از مقاله دکتر میرزایی تحت عنوان $On\ negatively\ curved\ G-manifolds\ of\ low\ cohomogeneity$ است.

فهرست مندرجات

فصل ۱

پیش نیازها

۱—۱ منیفلدها

تعریف ۱.۱ فرض کنیم M, N دو خمینه باشند و $p \in M$، می گوییم نگاشت $F : M \longrightarrow N$ در نقطه p هموار است هرگاه برای هر نقشه (U, ϕ) که $p \in U$ و هر نقشه (V, ψ) که $F(p) \in V$، نگاشت $\hat{F} = \psi o F o \phi^{-1}$ در نقطه $\phi(p)$ هموارباشد. نگاشت $F : M \longrightarrow N$ را هموار می نامیم اگر برای هر $p \in M$، F در p هموار باشد.

تعریف ۲.۱ نگاشت هموار $F : M \longrightarrow N$ را دیفئومرفیسم[۱] نامند هر گاه F^{-1} موجود و هموار باشد.

تعریف ۳.۱ برای هر $p \in M$ مجموعه بردارهای مماس بر M در نقطه p را فضای مماس بر M در p می نامند و با علامت T_pM نشان می دهند.

قضیه ۱.۱ ([۱۶]). T_pM یک فضای برداری است.

تعریف ۴.۱ هرگاه S یک زیرمنیفلد s—بعدی از منیفلد m—بعدی M باشد، اختلاف بعد آنها یعنی $(m - s)$ را نقص بعد S در M می نامیم.

تعریف ۵.۱ فرض کنیم M یک منیفلد با بعد n است. یک برگ بندی[۲] k—بعدی روی M عبارت است از گردایه F از زیرمنیفلدهای k—بعدی از M به نام برگ، چنان که

[۱] diffeomorphism
[۲] Foliation

الف) زیرمنیفلد های مذکور همبند و جدا از هم هستند،

ب) حول هر نقطه $p \in M$، نقشه‌ی (U,ϕ) موجود است، چنان که

$$\phi(U) = U_{۱} \times U_{۲} \subset R^{n-k} \times R^k$$

و برای هر برگ N متعلق به F، اگر $N \cap U \neq \emptyset$ آنگاه $N \cap U$ اجتماع شمارایی از مجموعه هایی به صورت

$$\phi^{-۱}(\{c\} \times R^k)\ ,\ c \in R^{n-k}$$

می باشد. چنین مجموعه ای را یک برش می نامیم.

تعریف ۶.۱ فرض کنیم $\phi : M \longrightarrow N$ یک نگاشت هموار و X و Y به ترتیب میدان های برداری روی M و N هستند. می گوییم X و Y ، $\phi-$وابسته هستند هرگاه برای هر $p \in M$ رابطه‌ی زیر برقرار باشد.

$$d\phi(X_p) = Y_{\phi(p)}$$

تعریف ۷.۱ منیفلد M جهت پذیر است، هرگاه گردایه $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ از نقشه ها موجود باشد، چنانکه این گردایه‌ی M را بپوشاند و برای هر دو نقشه $(U_{۱}, \phi_{۱})$ و $(U_{۲}, \phi_{۲})$ متعلق به گردایه مذکور، دترمینان ماتریس ژاکوبی $\phi_{۱} o \phi_{۲}^{-۱}$، مثبت باشد. در این حالت $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ را یک جهت برای M می نامیم.

تعریف ۸.۱ فرض کنیم M یک منیفلد و برای هر $p \in M$ یک ضرب داخلی به صورت $\langle , \rangle_p$ روی T_pM موجود است. در این صورت $\langle , \rangle$ را هموار می نامیم هرگاه برای میدان های برداری هموار X, Y تابع

زیر هموار باشد.

$$\begin{cases} \langle X,Y\rangle : M \longrightarrow R \\ p \longrightarrow \langle X,Y\rangle_p \end{cases}$$

تعریف ۹.۱ منیفلد M همراه با متر $\langle,\rangle$ را ریمانی[۳] می نامیم هرگاه $\langle,\rangle$ هموار باشد.

تعریف ۱۰.۱ منحنی $\alpha : I \longrightarrow M$ را یک منحنی انتگرال برای میدان برداری V می نامیم هرگاه برای هر $t \in I$

$$\alpha'(t) = V_{\alpha(t)}$$

یعنی بردار سرعت منحنی α در هر نقطه برابر V است.

۱-۲ گروه های لی

تعریف ۱۱.۱ منیفلد G را گروه لی می نامیم هر گاه G گروه باشد و نگاشت های زیر

$$۱)\begin{cases} G\times G \longrightarrow G \\ (x,y) \longrightarrow x*y \end{cases} ;۲)\begin{cases} G \longrightarrow G \\ x \longrightarrow x^{-۱} \end{cases}$$

هموار باشند. همچنین $*$ عمل گروه است و $x^{-۱}$ وارون عنصر x نسبت به این عمل می باشد.

مثال ۱.۱ $(R^n,+),(R-\{\circ\},\times),(R,+)$ گروههای لی هستند.

---
[۳] Riemannian

تعریف ۱۲.۱ فرض کنیم $(G_1,*)$ و $(G_2,\bullet)$ گروه لی هستند. نگاشت هموار $F:G_1\longrightarrow G_2$ را هومومرفیسم گروه های لی می نامیم هرگاه $F(x*y)=F(x)\bullet F(y)$. که برای سادگی می نویسیم $F(xy)=F(x)F(y)$.

قضیه ۲.۱ ([۱۶]). اگر G_1 و G_2 دو گروه لی باشند آنگاه $G_1\times G_2$ نیز گروه لی است.

قضیه ۳.۱ ([۵]).(قضیه کارتان) هر زیرگروه بسته از یک گروه لی گروه لی است.

قضیه ۴.۱ ([۱۶]). فرض کنیم G یک گروه لی و H یک زیرگروه G و علاوه بر آن زیر منیفلد معمولی G است در این صورت H یک گروه لی است.

تعریف ۱۳.۱ فرض کنیم G یک گروه لی و $a\in G$. نگاشت های l_a و R_a را که به صورت زیر تعریف می شوند انتقال های چپ و راست می نامیم.

$$۱)\begin{cases} R_a:G\longrightarrow G\\ R_a(x)=xa\end{cases};۲)\begin{cases} L_a:G\longrightarrow G\\ L_a(x)=ax\end{cases}$$

به سادگی دیده می شود که R_a و L_a هموار هستند. ضمنا R_a و L_a وارون پذیرند در واقع $(R_a)^{-1}=R_{a^{-1}}$ و $(L_a)^{-1}=L_{a^{-1}}$. پس L_a و R_a دیفئومرفیسم هستند.

تعریف ۱۴.۱ فرض کنیم G یک گروه لی و H زیر مجموعه ای از G باشد. H را در صورتی یک زیرگروه لی از G می نامیم که شرط های زیر برقرار باشند:

الف) H یک زیرگروه G باشد.

ب) H دارای ساختمان هموار باشد به طوریکه نسبت به آن یک گروه لی باشد.

پ) نگاشت جزئیت $\iota : H \longrightarrow G$ یک غوطه ورسازی یک به یک باشد.

تعریف ۱۵.۱ فرض کنیم G یک گروه لی باشد. یک متر ریمانی روی G را پایای چپ[۴] گوییم هرگاه

$$\langle u, v\rangle = \langle d(L_x)_y u, d(L_x)_y v\rangle_{L_x(y)} \quad x, y \in G, u, v \in T_y G$$

متریک پایای راست[۵] نیز به همین روش تعریف می شود.

تعریف ۱٦.۱ فرض کنیم M, N دو منیفلد ریمانی هستند. دیفئومرفیسم $f : M \longrightarrow N$ را ایزومتری[٦] می نامیم اگر

$$\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)} \quad \forall p \in M, u, v T_p M.$$

توجه شود که اگر M یک منیفلد ریمانی باشد. گردایه همه ایزومتری های M همراه با عمل ترکیب توابع یک گروه است که به صورت زیر نمایش داده می شود.

$$Iso(M) = \{f : M \longrightarrow M : \ \text{یک ایزومتری است.}\ f\}.$$

قضیه ۵.۱ ([۱٦]). $Iso(M)$ همراه با عمل ترکیب توابع یک گروه لی است.

تعریف ۱۷.۱ نگاشت $f : M \longrightarrow M$ را همدیسی[۷] می نامیم هرگاه تابع مثبت $\lambda : M \longrightarrow R$ موجود

[۴] left invariant

[۵] right invariant

[٦] isometry

[۷] conformal

باشد به طوری که

$$\langle df_p(v), df_p(w)\rangle = \lambda^{2}(p)\langle v, w\rangle; p \in M$$

اگر $\lambda^{2}(p) = 1$ آنگاه f ایزومتری است.

نگاشت های همدیس زاویه را حفظ می کنند ولی طول را در عدد $\lambda(p)$ ضرب می کنند.

نگاشت های همدیس در R^n ترکیبی از سه نگاشت ایزومتری، تجانس و تقارن نسبت به کره واحد می باشند. مرجع [۴] را ببینید.

تعریف ۱.۱۸ اگر X یک فضای توپولوژیک و $\sim$ یک رابطه هم ارزی روی X باشد مجموعه رده های هم ارزی را با $X/\sim$ نمایش می دهیم و نگاشت $x \mapsto [x]$ که به هر نقطه رده هم ارزی آن را نسبت می دهد به صورت $\pi : X \longrightarrow \frac{X}{\sim}$ نمایش می دهیم.

توپولوژی خارج قسمتی[۸] روی $X/\sim$ به این صورت تعریف می شود:

مجموعه‌ی $U \subset X/\sim$ باز نامیده می شود اگر و تنها اگر $\pi^{-1}(U)$ در X باز باشد. به سادگی می توان تحقیق کرد که این یک توپولوژی روی $X/\sim$ تعریف می کند.

تعریف ۱.۱۹ فرض کنیم G یک گروه و X یک مجموعه است. می گوییم G روی X عمل می کند هرگاه هر نگاشت $\phi : G \times X \longrightarrow X$ با شرایط زیر موجود باشد.

الف) برای هر $x \in X$، $\phi(e, x) = x$

ب) برای عضوهای دلخواه g و h از G و هر عضو $x \in X$:

$$\phi(g, \phi(h, x)) = \phi(gh, x)$$

[۸] Quotient topology

توجه : اگر گروه G روی مجموعه X توسط ϕ عمل کند معمولا برای سادگی به جای $\phi(g,x)$ می نویسیم gx. بنابراین شروط الف و ب در تعریف فوق به صورت زیر نوشته می شوند

الف) $ex=x$ ب) $g(hx)=(gh)x$

تعریف ۲۰.۱ اگر G روی X عمل کند و $x \in X$ آنگاه زیرگروه پایاگر x به صورت زیر تعریف می شود:

$$G_x=\{g \in G : gx=x\}$$

به سادگی می توان نشان داد که G_x یک زیرگروه G است.

تعریف ۲۱.۱ اگر G روی X عمل کند مجموعه $G(x)$ را که به صورت زیر تعریف می شود مدار گذرا از x می نامند.

$$G(x)=\{gx : g \in G\}$$

عمل ϕ روی X به ترتیب زیر یک رابطه هم ارزی روی X تعریف می کند:

$x \sim y$ اگر و تنها اگر $g \in G$ وجود داشته باشد به طوری که $\phi(g,x)=y$

مجموعه رده های هم ارزی را با X/ϕ نشان می دهیم. مدار x تحت عمل ϕ همان رده هم ارزی x نسبت به رابطه هم ارزی $\sim$ است.

تعریف ۲۲.۱ اگر عمل ϕ تنها دارای یک رده هم ارزی باشد، یعنی برای هر دو عضو $x,y \in X$ بتوان $g \in G$ را یافت به طوریکه $\phi(g,x)=y$ آنگاه ϕ را متعدی (ترایا) می نامیم.

تعریف ۲۳.۱ فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک، G گروه توپولوژیک و ϕ یک عمل G بر X باشد. اگر $\phi : G \times X \longrightarrow X$ پیوسته باشد سه تایی (ϕ, G, X) را یک گروه تبدیلات پیوسته X می نامیم.

قضیه ۶.۱ ([۱۷]). فرض کنیم $\phi : G \times X \longrightarrow X$ یک عمل پیوسته و $X/\sim$ به توپولوژی خارج قسمتی مجهز شده است. در این صورت:

الف) به ازای هر $g \in G$، ϕ_g یک هومئومرفیسم است.

ب) نگاشت $\pi : X \longrightarrow X/\phi$ که به صورت $\pi(x) = Gx$ تعریف می شود باز است.

تعریف ۲۴.۱ فرض کنیم M یک منیفلد هموار و G یک گروه لی باشند. عمل

$$\phi : G \times M \longrightarrow M$$

را هموار می نامیم در صورتی که ϕ یک نگاشت هموار باشد.

قضیه ۷.۱ ([۱۷]). فرض کنیم $\phi : G \times M \longrightarrow M$ یک عمل هموار گروه لی G بر منیفلد هموار M باشد. در این صورت:

الف) برای هر $g \in G$، ϕ_g یک دیفئومرفیسم هموار از M به M است.

ب) برای هر $x \in M$، G_x یک زیر گروه لی بسته در G است.

۱—۳ منیفلدهای خارج قسمتی و فضای پوششی

یادآوری: اگر Γ یک گروه گسسته باشد، که روی M عمل می کند، مدار گذرا از x را به صورت زیر نشان می دهیم.

$$\Gamma(x) = \{g(x) : g \in \Gamma\}$$

این گردایه یک افراز برای M است. یعنی $M = \bigcup \Gamma(x_i)$ و اگر $x_1 \neq x_2$، اشتراک $\Gamma(x_1)$ با $\Gamma(x_2)$ یا تهی است یا این دو با هم برابرند.

مجموعه خارج قسمتی M/Γ به صورت زیر تعریف می شود:

$$M/\Gamma = \{\Gamma(x) : x \in M\}$$

$\Gamma(x)$ در M یک مجموعه و در M/Γ یک نقطه است. از نظر شهودی اگر نقاط مجموعه $\Gamma(x)$ در M را به هم بچسبانیم یک نقطه در M/Γ پدید می آید.

نکته ۱.۱ اگر Γ یک زیرگروه گسسته از ایزومتری های M باشد (یعنی $dim\Gamma = 0$ و Γ از نقاط مجزا تشکیل شده باشد.) آنگاه M/Γ یک منیفلد ریمانی است و

$$dimM = dimM/\Gamma$$

مرجع [۱۶] را ببینید.

توجه: اگر Γ یک گروه لی غیر گسسته باشد و $dim\Gamma \geq 1$ آنگاه

$$dimM/\Gamma = dimM - dim\Gamma$$

توجه: در حالی که Γ غیر گسسته باشد، در ادامه به جای آن از علامت G استفاده می کنیم.
یادآوری: اگر G روی M عمل کند، M/G معمولا یک منیفلد با لبه است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$M/G = \{G(x) : x \in M\}$$

توضیح: اگر G روی M عمل کند دو نوع مدار وجود دارد که در زیر آن ها را معرفی می کنیم.

تعریف **۲۵.۱** برای $x \in M$، مدار $D = Gx$ را اصلی (تکین) می نامیم هرگاه تصویر x تحت نگاشت تصویری کانونی زیر

$$\begin{cases} \pi : M \longrightarrow M/G \\ \pi(x) = G(x) \end{cases}$$

یک نقطه درونی (مرزی) از M/G باشد.
نقطه x را معمولی (تکین) نامیم هرگاه مدار Dx اصلی (تکین) باشد.
مجموعه مدارهای اصلی را باM_{reg} و مدارهای تکین را با M_s نشان می دهیم

تعریف **۲۶.۱** منیفلد ریمانی همبند M را همگن[۹] گوییم، هرگاه $Iso(M)$ به طور متعدی روی M عمل کند. به عبارت دیگر به ازای هر $p, q \in M$ ایزومتری ψ از M موجود باشد که $\psi(p) = q$

تعریف **۲۷.۱** اگر $n = dimM$ و $m = \max\{dimG(x) : x \in M\}$، آنگاه عدد $k = n - m$ را نقص همگنی[۱۰] عمل G روی M می نامند. و با علامت $coho(M, G)$ نشان می دهند. در این حالت M را یک $G - C_k$−منیفلد می نامیم.

---
[۹] homogeneous
[۱۰] cohomogeneity

گزاره ۱.۱ هر زیرگروه غیر بدیهی گسسته از $(R,+)$ ، با $(Z,+)$ ایزومرفیک است.

اثبات: فرض کنیم H یک زیرگروه غیر بدیهی و گسسته از $(R,+)$ است. قرار می دهیم $a = inf\{x : x \in H; x > 0\}$. ابتدا نشان می دهیم که $a \in H$. فرض کنیم که a متعلق به H نباشد. یک دنباله h_n در H وجود دارد به طوری که $h_n \rightarrowtail a$ و برای هر $n \neq m$ داریم $h_n \neq h_m$. روشن است که n, m موجودند چنان چه $h_m > h_n$ و $h_m - h_n < a$. از آن جا که h_n و h_m هر دو متعلق به H می باشند و H یک زیرگروه $(R,+)$ است، $h_m - h_n \in H$. این متناقض با تعریف a می باشد. بنابراین $a \in H$. حال نشان می دهیم که $H = aZ = \{am : m \in Z\}$. روشن است که $aZ \subseteq H$. حال فرض می کنیم که $h \in H$ و عدد صحیح m را به طوری که $ma \leq h < (m+1)a$ در نظر می گیریم. داریم $0 \leq h - ma < a$. از آن جا که $h - ma \in H$ با توجه به تعریف a نتیجه می شود $h - ma = 0$. پس $H = ma$. لذا $H \subseteq aZ$. بنابراین $H = aZ$ و H با Z ایزومرفیک است. ■

تعریف ۲۸.۱ اگر گروه بنیادی M در نقطه x_0 گروه بدیهی باشد، می گوییم M در x_0 همبند ساده است.

تعریف ۲۹.۱ فرض کنیم X, Y دو فضای توپولوژیک و $P : X \longrightarrow Y$ یک تابع پیوسته و برای هر $q \in Y$ همسایگی مانند U موجود است به طوریکه

۱) $P^{-1}(U) = \bigcup V_i$ که‌برای هر i، V_i یک مجموعه باز در X باشد،

۲) $P : V_i \longrightarrow U$ هومئومرفیسم است،

۳) برای هر $i \neq j$؛ $V_i \cap V_j = \varnothing$

در این صورت می گوییم $P : X \longrightarrow Y$ نگاشت پوششی[11]، X فضای پوششی[12] برای Y و U همسایگی

[11] Covering map

[12] Covering space

قابل قبول برای q است و مجموعه زیر را تار[۱۳] روی q می نامیم.

$$\{x_i\} = P^{-1}(q)$$

تعریف ۳۰.۱ فرض کنیم که $P : \tilde{M} \longrightarrow M$ یک نگاشت پوششی باشد، نگاشت ایزومتری $\delta : \tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}$ را یک نگاشت صلب[۱۴] می نامند، هرگاه $Po\delta = P$. گردایه همه انتقال های صلب[۱۵] را با علامت Δ نشان می دهیم.

$$\Delta = \{\delta : \tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}\}$$

در این صورت Δ همراه با ترکیب توابع یک گروه است. در واقع Δ یک زیرگروه گسسته از گروه ایزومتری های $\tilde{M}$ است.([۱۶])

نکته ۲.۱ اگر δ یک نگاشت صلب باشد، برای هر $b \in M$ نگاشت δ تار روی b را حفظ می کند. یعنی اگر $x_i \in P^{-1}(b)$، آنگاه $\delta(x_i) \in P^{-1}(b)$. زیرا اگر $P(x_i) = b$ آنگاه داریم:

$$P(\delta(x_i)) = \delta(x_i) = b \Longrightarrow \delta(x_i) \in P^{-1}(b)$$

یادآوری : اگر M یک خمینه ریمانی باشد، یک فضای توپولوژیک $\tilde{M}$ موجود است چنان چه $\tilde{M}$ یک فضای پوششی همبند ساده برای M است. فرض کنیم $P : \tilde{M} \longrightarrow M$ نگاشت پوششی مربوطه است. می

[۱۳] Fiber

[۱۴] deck transformation

[۱۵] deck transformation group

توانیم یک ساختار روی $\tilde{M}$ قرار دهیم که $\tilde{M}$ تبدیل به یک خمینه و $P : \tilde{M} \longrightarrow M$ دیفئومرفیسم موضعی باشد. برای هر $a \in \tilde{M}$ فرض کنیم $b = P(a)$ و فرض کنیم U یک همسایگی قابل قبول برای b است. در صورت نیاز می توانیم U را آنقدر کوچک اختیار کنیم که U دامنه یک نقشه (U, ϕ) برای M باشد. حال فرض کنیم $P^{-1}(U) = \bigcup_i V_i$ در این صورت a متعلق به یکی از V_i مثلا V_1 است.

حال نقشه $(V_1, \phi o P)$ را حول a در نظر می گیریم. گردایه همه نقشه هایی را که به این شکل ساخته می شوند، $\tilde{M}$ را تبدیل به یک خمینه هموار می کند. واضح است که $P : \tilde{M} \longrightarrow M$ دیفئومرفیسم موضعی است.

حال فرض کنیم M یک خمینه ریمانی است. ضرب درونی زیر را روی $T_a\tilde{M}$ در نظر می گیریم.

$$\langle V, W \rangle = \langle dP(V), dP(W) \rangle_b \ : V, W \in T_a\tilde{M}$$

به سادگی می توان دید که $\tilde{M}$ با ضرب درونی تعریف شده، یک خمینه ریمانی است و لذا نگاشت $P : \tilde{M} \longrightarrow M$ یک ایزومتری موضعی است. در این صورت $\tilde{M}$ را یک فضای پوششی عام برای M می نامیم.

قضیه ۸.۱ ([۱۶]). اگر M یک منیفلد ریمانی و $\tilde{M}$ فضای پوششی عام برای M و Δ گردایه همه انتقال های صلب باشد آنگاه:

$$\tilde{M}/\Delta \simeq M$$

قضیه ۹.۱ اگر $P : \tilde{M} \longrightarrow M$ یک نگاشت پوششی و $\tilde{M}$ فضای پوششی عام برای M باشد، آنگاه گروه بنیادی M با گروه انتقال های صلب ایزومرفیک است.

$$\pi_1(M) \simeq \Delta$$